RESOLUCION NUMERICA DEL PENDULO INVERTIDO

Osvaldo Fornaro[†]
IFIMAT: Instituto de Física de Materiales Tandil
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Pinto 399 (B7000GHG) Tandil, Argentina
email: ofornaro@exa.unicen.edu.ar

[†] *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas*

Dadas las coordenadas generalizadas y las ecuaciones de ligadura, es posible derivar las ecuaciones diferenciales de movimiento que definen un sistema mecánico, mediante la aplicación de las ecuaciones de Lagrange o Hamilton. En muchas ocasiones, no es posible integrar fácilmente el sistema de ecuaciones diferenciales resultante y por lo tanto no se puede utilizar expresiones analíticas para describir el movimiento del sistema. En este trabajo se propone utilizar métodos numéricos sencillos (por ejemplo: Runge-Kutta de cuarto orden) como una herramienta adicional en el estudio de sistemas mecánicos. Como ejemplo, se propone el movimiento de un péndulo plano caracterizado por poseer energía mecánica total inicial $E_i = 2mgl$ y cuyo punto de anclaje se desplaza verticalmente siguiendo una función del tiempo $\varepsilon \cos \omega t$.

Given the generalized coordinates and constrain equations, it is possible to derive the differential motion equations that define a mechanical system, by using Lagrange or Hamilton equations. However, in many opportunities it is not possible to make a direct integration, and so, it is not possible the use of analitical expressions to describe the problem. In this work, it is proposed to use simple numerical methods (ie: fourth order Runge-Kutta) as a tool in the study of mechanical systems. As an example, it is shown the motion of a pendulum with initial mechanical energy $E_i = 2mgl$, when the pivot is vertically displaced with a time function $\varepsilon \cos \omega t$.

I. INTRODUCCION

El movimiento del péndulo plano actuando en un campo gravitatorio uniforme es un caso típico de estudio en la Mecánica Clásica[1,2] y constituye un ejemplo típico en la introducción a la física no-lineal. Su estudio ha recibido particular atención debido a que la ecuación diferencial que describe el movimiento aparece frecuentemente en diversas ramas de la física moderna y por ello suele utilizarse como modelo sencillo en muchos sistemas físicos[3,4].

Un caso de estudio especialmente interesante lo constituye un péndulo cuyo eje de fijación se mueve periódicamente en forma vertical. A este dispositivo se lo conoce como *Péndulo de Kapitza,* ya que fue Pjotr Kapitza uno de los que estudió en detalle en forma experimental el comportamiento de este sistema[3].

En este sistema, los parámetros que definen el movimiento son: la frecuencia y amplitud del movimiento del punto de fijación, la energía mecánica inicial y el valor del término disipativo contenido en la ecuación de movimiento. En función de los valores de estos parámetros, el péndulo puede desarrollar una familia de respuestas diferentes, rico en fenómenos no-lineales. Por ejemplo, para $E_i = 2mgl$ y ω correspondiente a la resonancia paramétrica, el movimiento resultante será en una sola dirección. Sin embargo, en cercanías de este valor, puede moverse alrededor del mínimo en movimiento periódico y abrúptamente empezar a girar en torno al centro, y luego recomenzar su movimiento periódico alrededor de un mínimo y comenzar a girar nuevamente en el mismo sentido o en el contrario. Con el incremento del rozamiento, los efectos de la resonancia paramétrica pueden desaparecer. Este comportamiento es utilizado como ejemplo de introducción al caos en sistemas mecánicos[5].

Otra situación interesante aparece cuando el movimiento del punto de sujeción posee frecuencias altas respecto a la frecuencia propia, o amplitudes que no pueden considerarse pequeñas respecto a la longitud l del péndulo. En este caso puede ocurrir la estabilización del movimiento del péndulo en la posición superior.

Dada la complejidad matemática de la ecuación diferencial involucrada, se hace difícil interpretar el movimiento resultante en forma analítica, salvo para algunas condiciones iniciales simples. El objetivo de este trabajo es resolver la ecuación diferencial utilizando un método numérico, para poder simular diferentes condiciones iniciales y verificar la respuesta del sistema para diferentes condiciones iniciales y valores de los parámetros característicos.

II. SISTEMA FISICO

El dispositivo bajo estudio puede verse en la Figura 1. La partícula de masa m está sujeta a la barra rígida l que se supone sin peso y puede girar libremente alrededor del punto O, que además posee un movimiento vertical periódico con una frecuencia ω. Si fijamos nuestro sistema de referencia en la posición media de este desplazamiento, la posición de O estará dada por $\varepsilon \cos \omega t$. La fase puede tomarse arbitrariamente nula, ya que no se han fijado aun las condiciones iniciales del movimiento. Dado que ϕ describe el sistema por completo como única coordenada generalizada, la ecuación de Lagrange puede escribirse como[1,2]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = f_\phi \qquad (1)$$

donde $\mathcal{L} = T - V$ es la Lagrangiana del sistema, definida como la diferencia entre la energía cinética y la potencial, mientras que f_ϕ representa las fuerzas generalizadas que actúan sobre el sistema y no pueden ser tenidas en cuenta en el potencial V.

La posición de m queda descrita en coordenadas de laboratorio según x, horizontal e y en la dirección vertical. Desarrollando T y V, obtenemos en forma directa:

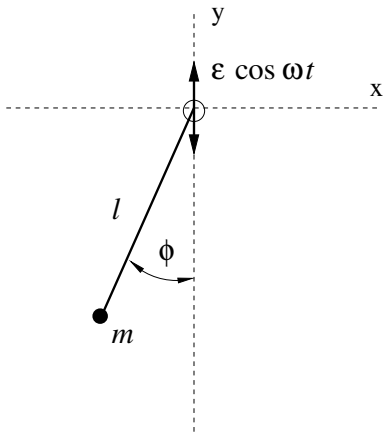

Figura 1: Esquema del movimiento estudiado. Ver el texto por los detalles.

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \ & \tfrac{m}{2}\left(l\dot{\phi}\right)^2 \ + \tfrac{m}{2}\varepsilon\omega^2 \mathrm{sen}^2\omega t - \\ & - m\varepsilon\omega l\dot{\phi}\ \mathrm{sen}\ \omega t\ \mathrm{sen}\ \phi \\ & - mg\varepsilon\cos\omega t + mgl\cos\phi\end{aligned} \tag{2}$$

Aplicando (1) surge la ecuación diferencial de movimiento del sistema:

$$ml^2\ddot{\phi} + b\dot{\phi} + ml\left(g - \varepsilon\omega^2\cos\omega t\right)\mathrm{sen}\,\phi = 0 \tag{3}$$

o reescrita en forma conveniente

$$\ddot{\phi} + \beta\dot{\phi} + \omega_0^2\left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{l}\right)\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\cos\omega t\right]\mathrm{sen}\,\phi = 0 \tag{4}$$

donde se ha utilizado la igualdad $\beta = b/2ml^2$ representando un coeficiente de amortiguamiento y $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ corresponde a la frecuencia propia del péndulo.

Esta ecuación es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden y dado que se quiere obtener la respuesta para valores arbitrarios de la energía, no es posible utilizar la aproximación de pequeña amplitud, $\mathrm{sen}\,\phi \approx \phi$ para simplificarla[1]. Por el mismo motivo no tiene sentido plantear la solución por el método de las perturbaciones o de soluciones sucesivas[2]. La ecuación (4) puede descomponerse en un sistema de dos ecuaciones de primer orden

$$\begin{cases} \dot{\phi} &= \psi \\ \dot{\psi} &= -\beta\psi - \omega_0^2\left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{l}\right)\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\cos\omega t\right]\mathrm{sen}\,\phi \end{cases} \tag{5}$$

asociado a las condiciones iniciales

$$\begin{cases} \phi(0) &= \phi_0 \\ \psi(0) &= \dot{\phi}(0) = \psi_0 \end{cases} \tag{6}$$

El sistema (5)-(6) puede resolverse utilizando métodos numéricos sencillos. En este trabajo se propone utilizar el método de Runge-Kutta de cuarto orden para tal fin.

III. IMPLEMENTACION DEL METODO NUMERICO

Dada una función $y' = f(x,y)$, el método de de Runge-Kutta de cuarto orden permite calcular iterativamente el valor de la función incógnita y en cada punto del intervalo donde se ha definido la función, a partir del cálculo anterior, por medio de una serie de potencias de la función en el sub-intervalo entre los puntos consecutivos, sin necesidad de calcular realmente las derivadas de la función $f(x,y)$[6,7]

Entonces

$$\begin{aligned} y_0 &= f(0) \\ y_{n+1} &= y_n + (K_1 + 2K_2 2K_3 + K_4)/6 \end{aligned} \tag{7}$$

donde h es el intervalo en x entre y_{n+1} e y_n, y

$$\begin{aligned} K_1 &= hf(t,w) \\ K_2 &= hf(t + h/2, w + K_1/2) \\ K_3 &= hf(t + h/2, w + K_2/2) \\ K_4 &= hf(t + h, w + K_3) \end{aligned} \tag{8}$$

Este algoritmo es muy sencillo de programar, ya que se necesita sólamente calcular los miembros a derecha de la ecuación (8) en cada paso del cálculo, eligiendo un valor del intervalo h adecuado para minimizar el error[6], que se mantendrá en un cuarto orden en h.

En nuestro caso, el sistema fue implementado en C estándard utilizando las Librerías Numéricas Meschach[8] que poseen Licencia de libre utilización con propósitos académicos. El programa fue desarrollado de tal modo que los datos de entrada puedan ser ingresados manualmente sin recompilación del código en cada caso estudiado. Los datos necesarios para cada ejecución son: las condiciones iniciales $\phi(0)$ y $\dot{\phi}(0)$ y los parámetros que caracterizan al sistema: ω (frecuencia de la pulsación externa); ε (amplitud de la pulsación) y β (factor de amortiguamiento). En el cálculo se asume $g = 1$ y $l = 1$ y por lo tanto $\omega_0 = 1$. Otros valores que definen la integración son el tiempo inicial y final y el paso de integración h. Cabe destacar que existen numerosas librerías numéricas y programas gratuitos y comerciales, que pueden resolver el sistema (5-6). No es el propósito de este trabajo recopilar dicha información, sino más bien el de utilizar uno de los métodos accesibles para estudiar el sistema físico en cuestión.

IV. DISCUSION DE LOS RESULTADOS

Mediante la utilización del programa desarrollado es posible reproducir el funcionamiento del sistema mecánico de la Figura 1 bajo diferentes situaciones. A continuación se muestran diferentes casos que permiten introducir al estudiante a escenarios más complejos como son las manifestaciones del comportamiento no lineal, bifurcaciones de la solución, e introducción al caos. Así, en el punto **A.** se comprueba el funcionamiento del programa bajo una situación conocida, dada por energías moderadasy frecuencias de la pulsación $\omega < \omega_0$. En **B. C.** y **D.** se muestra la respuesta para la energía inicial $E = 2mgl$ y frecuencias desde $\omega \approx \omega_0$ hasta varias veces su valor, pasando por la resonancia paramétrica. En el punto **E.** se discute la estabilización

del funcionamiento invertido del péndulo y finalmente en **F.** se analiza el efecto del coeficiente de rozamiento β sobre la selección del punto de funcionamiento del sistema.

A. PEQUEÑAS AMPLITUDES

En principio se comprobó el funcionamiento del programa para pequeñas amplitudes de la pulsación externa y frecuencias menores que la característica del sistema, $\omega < \omega_0$. Se consideró una energía inicial menor a $2mgl$. El movimiento resultante es la contribución del cuasiperiódico del péndulo en el sistema de referencia no inercial en el que el punto de fijación se mueve con la ley $\varepsilon \cos \omega t$. Para el cálculo se tomó $\omega = 0.5\omega_0$; $\beta = 0.01$; $\phi(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = \sqrt{g/l} = 1$.

En la Figura 2 se representó el movimiento en el espacio de fases $\left(\phi, \dot{\phi}\right)$. La órbita en este espacio es una espiral que tiende al centro a medida que la amplitud del péndulo disminuye. Para tiempos muy grandes, m se moverá prácticamente en forma vertical, siguiendo el desplazamiento del pivote. En nuestro caso, se puede observar que la espiral de la Figura 2 se deforma periódicamente por la contribución de la pulsación externa.

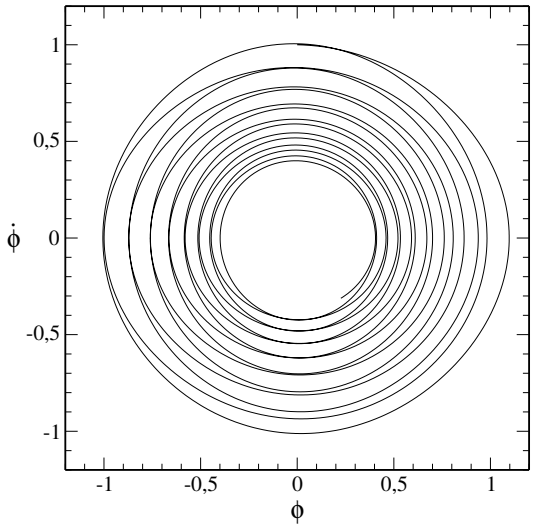

Figura 2: Movimiento resultante con las condiciones $\omega = 0.5\ \omega_0$; $\beta = 0.01$; $\phi(0) = 0$; $\dot{\phi}(0) = \sqrt{g/l} = 1$ en el espacio de Fases $\left(\phi, \dot{\phi}\right)$. La espiral hacia el centro indica que el movimiento es disipativo.

B. ENERGIA INICIAL $E_i = 2mgl$, $\omega \to \omega_0$

Para interpretar la respuesta del sistema, analicemos primero el caso homogéneo; $\varepsilon = 0$. Si se considera una Energía inicial $E_i = 2mgl$, la partícula m subirá hasta el punto superior, $(\phi = \pi)$, aunque no puede alcanzarlo, debido en principio a que para $\phi = \pi$ el potencial alcanza un máximo local, siendo ésta una situación de equilibrio inestable, pero además de esto el término de amortiguamiento ocasiona una pérdida de energía mecánica, por lo que la velocidad se anula antes de alcanzar el punto superior. La respuesta para la solución no homogénea, $(\varepsilon > 0)$, dependerá del valor que tome $\dot{\phi}$ para $(\phi = \pi)$. De este modo, si ϕ alcanza el punto superior con velocidad $\left|\dot{\phi}\right| > 0$, el péndulo tendrá suficiente energía para pasar por este punto y completar al menos una revolución alrededor del centro. En caso contrario, cambiará de dirección y retornará con dirección al mínimo.

En la Figura 3 a) podemos observar el comportamiento de ϕ en función del tiempo con las condiciones particulares $\omega = \omega_0$; $\beta = 0.01$; $\phi(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = 2$. Al comienzo de la simulación, ϕ se aleja de $\phi = 0$, efectuando una revolución alrededor del centro y permaneciendo alrededor del próximo mínimo, $\phi = 2\pi$. En el diagrama de fases de la Figura 3 b) se observa como la partícula se desplaza desde las coordenadas $\left(\phi = 0, \dot{\phi} = 2\right)$ hacia la espiral centrada en

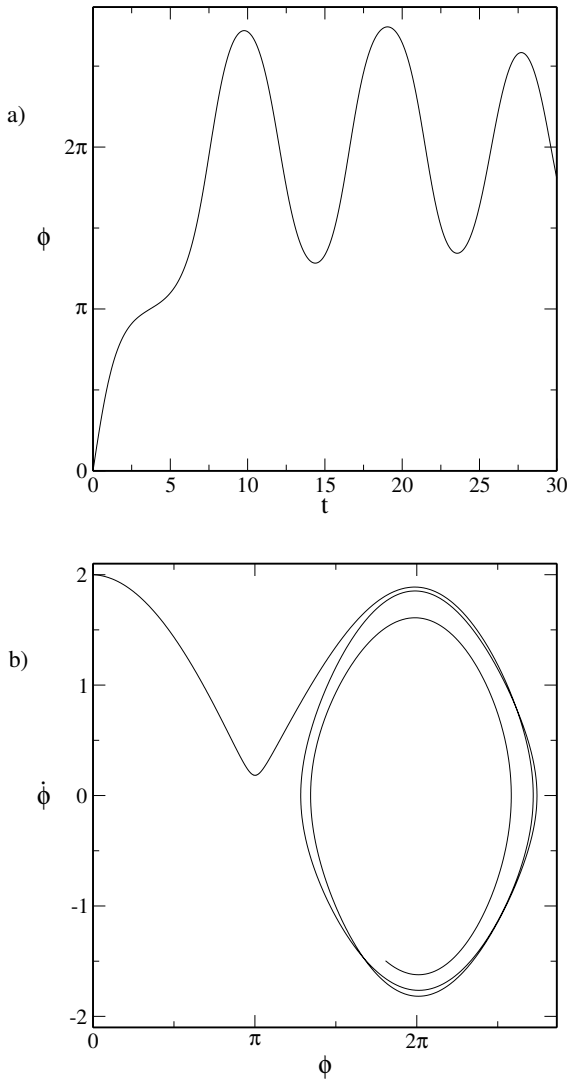

Figura 3: Movimiento resultante con las condiciones $\omega = \omega_0$; $\beta = 0.01$; $\phi(0) = 0$; $\dot{\phi}(0) = 2$. a) $\phi(t)$; b) espacio de Fases $\left(\phi, \dot{\phi}\right)$. Notar el mínimo alrededor de $\phi = 2\pi$

$\left(\phi = 2\pi, \dot{\phi} = 0\right)$.

Podemos decir que para pequeños valores de ε, el movimiento del péndulo resultará decreciente en amplitud, aún para valores de la energía inicial del orden de $2mgl$. Sólamente resta conocer si alcanzará a realizar un giro, aunque esto podrá depender de la relación entre la frecuancia propia y la externa y de la fase del movimiento.

C. ENERGIA INICIAL $E_0 = 2mgl$, $\omega \simeq 2.2\omega_0$

Cuando la frecuencia de pulsación es del orden de $\omega \simeq 2.2\omega_0$ aparece el fenómeno de resonancia paramétrica[1,4], el sistema puede adoptar un estado de movimiento y sostenerlo con el tiempo. Para valores de ω alrededor de la frecuencia de resonancia, el sistema puede tomar soluciones muy dispares para pequeñas variaciones de ω. En la Figura 4 se puede ver la simulación del movimiento resultante para $\omega = 2.1,\ 2.2,\ 2.3\ \omega_0$; $\beta = 0.01$; $\phi(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = 2$. se puede ver que el sistema muestra una selección de movimientos alrededor de algún mínimo local, realizando eventualmente una o más revoluciones alrededor del centro en uno u otro sentido, dependiendo del valor instantáneo de la velocidad $\dot{\phi}$ al alcanzar el máximo $\phi = \pi$ en cada oportunidad. No se puede apreciar una tendencia clara que gobierne la selección de los mínimos donde se encuentra el péndulo. En el ejemplo de la Figura 4 se puede ver que para el caso $\omega = 2.1\ \omega_0$, ϕ crece de 0 sin llegar a π, vuelve hasta alcanzar $\phi = -\pi$ y continúa girando en torno al centro en la dirección negativa de ϕ. para $\omega = 2.2\ \omega_0$ la situación es similar en principio, pero muestra que el movimiento puede ir en una u otro sentido de ϕ, teniendo períodos de tiempo en los que se encuentra ligado alrededor de algún múltiplo de 2π. Similar observación se puede realizar para $\omega = 2.3\ \omega_0$.

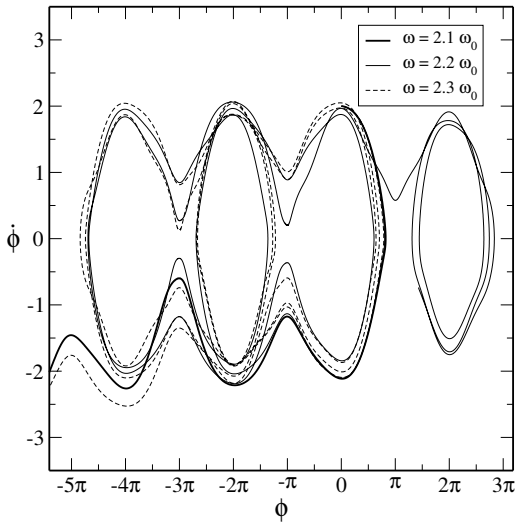

Figura 4: Resonancia paramétrica. $\beta = 0{,}01$; $\phi(0) = 0$; $\dot{\phi}(0) = 2\omega_0$. Para las frecuencias estudiadas, las soluciones pueden diferir cualitativamente.

Resulta particularmente interesante hacer notar al alumno, que utilizando ω como variable de control del problema, pueden encontrarse diversas soluciones al problema, pero no es posible en principio predecir alrededor de que mínimo múltiplo de 2π se hallará el movimiento en un momento dado, sin realizar todo el cálculo. Este ejemplo suele utilizarse para introducir conceptualmente la bifurcación de las soluciones en sistemas mecánicos.

D. FRECUENCIAS DE PULSACION ALTAS

En el caso en que la frecuencia de la pulsación externa es varias veces mayor que la frecuencia propia del péndulo, es posible apreciar claramente la contribución del pivote, particularmente durante el transitorio inicial del movimiento. Esto se puede apreciar en el diagrama de fases como cambios súbitos en la velocidad $\dot{\phi}$ durante el recorrido de ϕ entre las posiciones de mínimo y máximo de la amplitud.

En la Figura 5 se ha representado la respuesta del sistema en el espacio de fases, para las condiciones iniciales: $\omega = 10\,\omega_0$; $\beta = 0.01$; $\phi(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = 2$. En la misma se pueden apreciar los cambios mencionados anteriormente durante aproximadamente cuaro períodos. Para las condiciones iniciales elegidas para el cálculo, el movimiento se desarrolla alrededor del mínimo local $\phi = 0$, es decir sin realizar revoluciones completas alrededor del centro, y por lo tanto la trayectoria en el espacio de fases está acotado. Sin embargo, la órbita permanece abierta. En ausencia de amortiguamiento, $\beta = 0$, será posible obtener órbitas cerradas cuando la relación (ω/ω_0) sea una fracción racional.

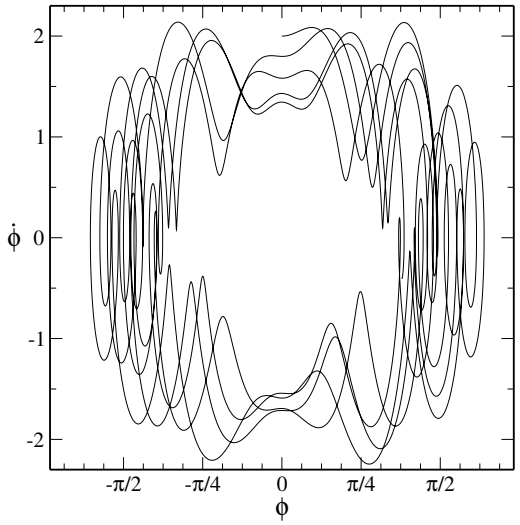

Figura 5: Movimiento en el espacio de fases para $\omega = 10\omega_0$; $\beta = 0{,}01$; $\phi(0) = 0$; $\dot{\phi}(0) = 2\omega_0$. El movimiento parece no repetirse.

E. FUNCIONAMIENTO INVERTIDO

Bajo algunas condiciones iniciales particulares, es posible que el péndulo se estabilice momentáneamente en su

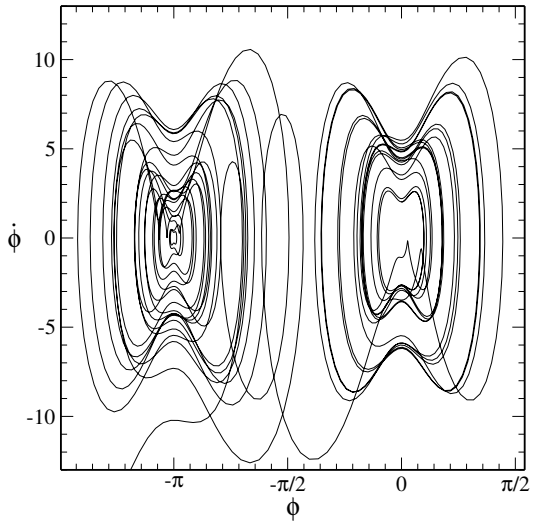

Figura 6: Funcionamiento invertido para $\omega = 20\omega_0$; $\beta = 0.01$;$\dot{\phi}(0) = 2$ en el espacio de fases. El primer mínimo aparece centrado en $\phi = 0$; después de un tiempo, el péndulo logra invertirse y tener otro mínimo centrado en $\phi = -\pi$.

posición superior, es decir que el movimiento se produzca alrededor de un ángulo ϕ múltiplo impar de π. En la Figura 6 puede apreciarse esta situación. El sistema se mueve originalmente alrededor del mínimo $\phi = 0$. Después de un tiempo pasa espontáneamente a moverse alrededor de $\phi = -\pi$. Las condiciones del cálculo fueron $\omega = 20\omega_0$; $\beta = 0.01$;$\dot{\phi}(0) = 2$.

Para interpretar este fenómeno es conveniente describir el movimiento del péndulo en el marco de referencia no inercial que sigue al pivote, para el que $y = \varepsilon \cos \omega t$. En este marco, dos torques actúan sobre m, uno es responsable de la restitución del sistema $-mgl\text{sen}\phi$ y otro ocasionado

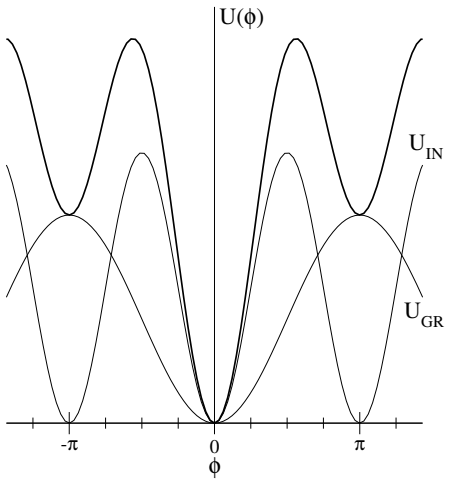

Figura 7: Potencial efectivo $U(\phi)$ como contribución de los términos gravitatorio U_{GR} e inercial U_{IN}.

por el movimiento del soporte $-m\ddot{y} = \frac{1}{2}m\varepsilon\omega^2 \text{sen}\,\omega t\,\text{sen}\phi$. El torque neto será la contribución de ambos términos:

$$\begin{aligned} N(\phi) &= -mgl\text{sen}\phi + \frac{1}{2}m\varepsilon^2\omega^2\cos\omega t\,\text{sen}\phi \\ &= -ml\text{sen}\phi\left(g - \frac{\varepsilon^2}{2l}\omega^2\cos\omega t\right) \end{aligned}$$

pero dado que el signo de $\cos\omega t$ será cambiante, en el medio período durante el que $\cos\omega t$ sea negativo aumentará el torque neto, mientras que durante el otro medio período el resultado dependerá del balance entre los dos términos. En general cuando $\varepsilon^2\omega^2 > 2gl$ el sistema notará una aceleración hacia arriba por lo que será posible estabilizar el movimiento en la posición superior. Este criterio de estabilidad se puede reescribir en función de ω_0

$$\frac{\varepsilon}{l}\frac{\omega}{\omega_0} > \sqrt{2} \qquad (9)$$

También notamos que la frecuencia aparente del movimiento será mayor en la etapa descendente del pivote que durante el ascenso del mismo.

El torque neto puede ser imaginado como derivado de un potencial efectivo[4], tal que

$$N(\phi) = -\frac{dU}{d\phi}$$

Este potencial efectivo resultante consiste de dos términos, uno gravitatorio U_{IN} y otro inercial U_{GR}

$$U(\phi) = mgl(1-\cos\phi) + \frac{1}{4}m\varepsilon^2\omega^2(1-\cos 2\phi) \qquad (10)$$

La Figura 7 muestra esquematicamente la situación planteada en la ecuación (10). Ambos términos tienen forma senoidal, aunque el período de U_{IN} es la mitad de U_{GR}. Sin embargo se puede ver que ambos tienen un mínimo local para $\phi = 0$, por lo que la suma genera un mínimo principal para $U(\phi)$. Este mínimo corresponde al estado de equilibrio del péndulo en su posición inferior. El siguiente mínimo aparece para $\phi = \pi$, donde U_{IN} posee un mínimo local. En este caso la existencia de un mínimo local para el potencial efectivo $U(\phi)$ dependerá del balance entre los términos U_{IN} y U_{GR} y de la condición dada por la ecuación (9).

F. RESPUESTAS DE LA SOLUCION FRENTE A CAMBIOS DE β

Debido a la naturaleza no lineal del problema, las soluciones que puede tomar el sistema pueden diferir aún para pequeños cambios de las variables que definen una situación en particular. Este hecho ya fue sugerido en el punto **C.** en donde al variar ω se obtenían comportamientos diversos. Un efecto similar puede obtenerse fijando todas las condiciones y tomando β como parámetro de control del problema. Para ilustrar esta nueva propuesta, se realizaron distintas corridas del programa tomando diferentes valores de β. La Figura 8 a) corresponde a las soluciones halladas para $\omega = 0.9\omega_0$; $\varepsilon = 0.1$; $\phi(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = 2$ y β =0, 0.001 y 0.01. Se puede ver que para $\beta = 0$ el sistema comienza una serie de revoluciones en la dirección

positiva de ϕ, mientras que cuando existe rozamiento el comportamiento es distinto en ambos casos. La clave del distinto comportamiento está en los valores de velocidad del sistema cuando alcanza un máximo local. Es importante resaltar que no es posible predecir este valor o para que revolución la velocidad no será suficiente para alcanzar el máximo para que el movimiento del péndulo cambie de dirección. La Figura 8 b) muestra una situación similar para $\omega = \omega_0$.

La introducción de esta discusión está motivada en el hipotético análisis de una situación experimental. En un dispositivo mecánico real, pueden aparecer pequeñas variaciones en el coeficiente de rozamiento originadas en cambios de las condiciones experimentales, por ejemplo por la temperatura que adquiere el sistema mecánico en funcionamiento, la viscosidad del lubricante, partículas de polvo en los rodamientos, etc., que pueden dar lugar a una serie de diferentes comportamientos que no podrían explicarse analítica ni numéricamente al desconocer exactamente la forma de dicho coeficiente. Sin embargo en este caso, este tipo de cálculo puede ser útil para comprender cualitativamente las observaciones experimentales.

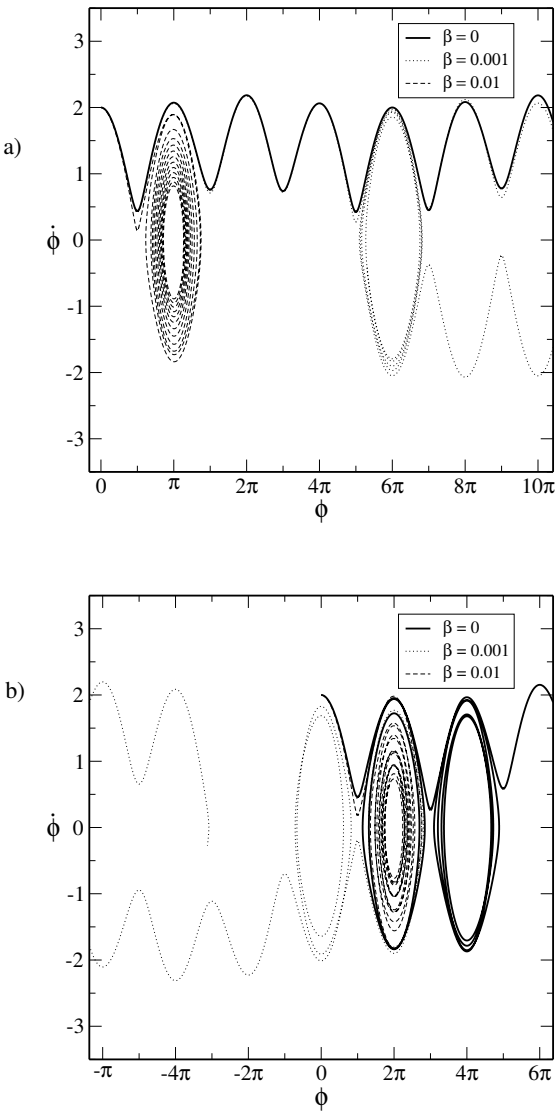

Figura 8: Aparición de distintas soluciones para pequeñas variaciones de β. $\dot{\phi}(0) = 2(g/l)$; en a) $\omega = 0{,}9\omega_0$ y b) $\omega = \omega_0$.

V. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha analizado el movimiento de un péndulo cuyo punto de sujeción se desplaza periódicamente según su eje vertical. Para tal efecto se obtuvo la ecuación diferencial de movimiento y posteriormente se la resolvió numéricamente, utilizando como algoritmo de integración el método de Runge-Kutta de cuarto orden. El programa de cálculo se desarrolló de tal modo que sólo se interactúe con las condiciones iniciales y con las variables que caracterizan el sistema.

En este marco se analizaron diferentes casos de estudio que remarcan las características no lineales del problema, bifurcación de las soluciones frente a pequeñas variaciones de las variables externas e introducción al caos, demostrando que se puede utilizar esta metodología para analizar algunos sistemas donde la complejidad matemática de la solución no permite una solución analítica.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue desarrollado en el IFIMAT: Instituto de Física de Materiales Tandil y fue soportado por CICPBA: Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires, CONICET: Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas y SeCyT-UNCPBA: Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

REFERENCIAS

[1] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, ***Curso de Física Teórica,*** Vol. 1: "Mecánica", 2da Ed., Ed. Reverté, España, 1985.
[2] J. B. Marion, "Dinámica clásica de las partículas y sistemas", Ed. Reverté, España, 1981
[3] E. Butikov, Eur. J. Phys. **20**, 1999,p429.
[4] E. Butikov, Am. J. Phys **69** , 2001, p755.
[5] S-Y. Kim y B. Hu, Phys. Rev. E **58**, 1998, p3028.
[6] W. E. Milne, "Numerical Solution of Differential Equations" 2da Ed. Dover Publications, New York, 1970.
[7] R. L. Burden y J. D. Faires, "Análisis Numérico". Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1985.
[8] Centre for Mathematics and its Applications, School of Mathematical Sciences, Australian National University, Canberra, ACT 0200, Australia.