SIGNIFICADOS INTUITIVOS
ANÁLISIS DE UN EJEMPLO: LOS NÚMEROS NEGATIVOS

Fischbein, Efraim (1987): The practicality of intuitive meanings. Analysis of an example: The negative numbers, in *Intuition in science and mathematics,an educational approach*, Kluwer.

Traducción de un fragmento realizada por Humberto Alagia, FaMAF, UNC.

Fueron necesarios 1500 años para que los matemáticos se acostumbraran a la “regla de los signos” de los números dirigidos[1].

El principal obstáculo consistía en el hecho de que el concepto de número negativo contradecía el mismo concepto de número como había sido originalmente desarrollado en la historia del conocimiento matemático. Un número negativo es un ejemplo contra-intuitivo porque, aparentemente, contradice la noción misma de existencia – si existencia se considera con su significado práctico. Pero la practicidad parece ser uno de los atributos fundamentales de una noción intuitivamente aceptable. Por cierto que uno puede considerar convencionalmente, que deuda es opuesta a posesión, que moverse a la derecha es opuesto a moverse a la izquierda, etc. Pero en todos estos casos uno se refiere en realidad a magnitudes reales que pueden expresarse con números que tienen el mismo significado práctico que los ‘positivos’. Los números negativos aparecieron en la historia de la humanidad como una especie de artefacto, como subproductos de problemas matemáticos impropiamente diseñados.

Es cierto que Diofanto de Alejandría (fin del tercer siglo D.C.) en su cuarto libro de de Aritmética menciona la regla de los signos de números dirigidos. Pero para Diofanto esta regla aparece solamente como un procedimiento transicional, para obtener un número “aceptable”, es decir un número positivo.

Como señala Glaeser: “El uso ‘clandestino’ de números dirigidos precedió en 1600 años su *comprensión*.”

De acuerdo con Simon Stevin(1540-1620) un número expresa la cantidad de una cosa. Usa frecuentemente números negativos pero sólo como apoyos transitorios. Fermat (1601-1665) menciona varios procedimientos para obtener raíces aceptables cuando aparecen raíces “falsas” (negativas). En el *Diccionario Matemático* publicado por Jacques Ozamon (1691) se pueden encontrar, bajo el encabezamiento “raíces”, las categorías: genuinas, falsas e imaginarias. “Una raíz falsa es el valor negado de la letra desconocida”...

Lo que tiene gran relevancia psicológica para nuestra discusión es que la resistencia a aceptar números negativos no vino solo de los que no eran expertos. Los matemáticos no habían objetado el uso de otras abstracciones matemáticas, por ejemplo entidades “no-materiales” (como puntos o rectas), pero se opusieron a otorgar un estatus matemático formal a los números negativos. Estos habían sido mencionados y usados desde la antigüedad, pero

[1] Se llaman números dirigidos a aquellos que pueden ser negativos o positivos. Utilizamos la nomenclatura de Glaeser.

no habían sido aceptados por sí mismos como entidades conceptualmente significativas. Por muchos siglos hubo tentativas de atribuirles algún tipo de validez práctica, de comportamiento para resolver el problema de su legitimidad.

El mismo Descartes estaba involucrado en encontrar un procedimiento para eliminar raíces negativas de ecuaciones (cambiando el punto de origen.).

El matemático escocés MacLaurin (1698-1746), claramente entendió la naturaleza formal de las entidades matemáticas. “En realidad no es necesario, realmente describir los objetos de nuestras teorías ni que realmente existan”, escribió en 1742. Pero, además, “es esencial que sus relaciones sean concebidas claramente y deducidas obviamente”.

Sin embargo el mismo MacLaurin escribirá después en su *Treatise of Algebra* (1748) que *“una cantidad aislada no puede considerarse como negativa*: puede ser así solo por comparación. Una cantidad negativa no es, hablando rigurosamente, menos que nada. No es menos real que una cantidad positiva, considerada en sentido opuesto.

Aunque haya enunciado explícitamente, como principio general, que la matemática es una ciencia de relaciones formales y no de objetos que existen en la práctica, no pudo al considerar un tipo específico de entidad matemática, liberarse de la necesidad de conferir a estas entidades un significado práctico, de comportamiento. Su modelo era de operaciones prácticas con cantidades empíricamente existentes. “…por ejemplo”, escribe, “el valor de dinero que alguien espera recibir y el que debe; una recta dibujada hacia la derecha y otra dibujada hacia la izquierda; la altura sobre el horizonte y la profundidad debajo”.

Todos estos no son para MacLaurin meros ejemplos didácticos. Son para justificar el uso del concepto de magnitudes negativas. No pudo alcanzar el punto desde donde pudiera declarar: los números negativos *tienen* una existencia formal, justificada axiomáticamente y definida en la estructura de la matemática. Por el contrario: *él niega* su existencia “absoluta” simplemente porque no puede identificar un fenómeno real que sea menos que nada! Puede suponerse que aun el término “números relativos”, como se usa en la terminología francesa, es en realidad un sobreviviente de este viejo concepto que los números negativos no existen “solos” sino como una clase de imagen especular virtual simétrica de cantidades reales.

La dificultad se vuelve aun más difícil si nos referimos a operaciones con números dirigidos. Nos referiremos específicamente a la operación de multiplicación. En cierta forma estas dificultades son paralelas a las que se encuentran con los decimales.

Intuitivamente podemos concebir una situación en la cual se multiplican un número positivo y uno negativo, pero solo si, de acuerdo con el problema, el operador se representa por el número positivo. Tres veces (-4) puede intuitivamente ser percibido por (-4) + (-4) + (-4) = - 12. Y esto significa intuitivamente, que por ejemplo pidiendo prestado tres veces 4 dólares, se tiene al final una deuda de 12 dólares. En cambio (-3) veces 4 no tiene significado intuitivo.

Ocurre lo mismo con los decimales. Mientras que 3 veces 0.65 significa intuitivamente 0.65 + 0.65 + 0.65, 0.65 veces 3 (con 0.65 como operador) no tiene significado intuitivo.

La aceptación de (+*a)* × *(-b)* = *-ab,* en todos los casos,(no importa cual sea el operador y cual el operando) se basa en el axioma de conmutatividad, y esto es un corrimiento al nivel formal

Pero el problema (-*a*) × (-*b*) es mucho más difícil, no porque formalmente presente una dificultad especial *sino simplemente porque aun mentes matemáticas privilegiadas no pudieron por mucho tiempo desembarazarse completamente del impacto de modelos intuitivos implícitos.*

Por ejemplo, D'Alembert (1717-1783) al referirse al término *Negativo* en la Enciclopedia escribe que "La simple y natural enunciación del problema de (-*a*) × (-*b*) tendría que ser multiplicar (+*a*) × (+*b*) y así obtener +*ab*." Y el reconocido matemático Lazare Carnot (1753-1823), dice al referirse a operaciones con números negativos: "Una multitud de paradojas y absurdidades relativas resultan de la misma noción; por ejemplo que -3 tendría que ser menor que 2. Sin embargo $(-3)^2$ sería mayor que $(-2)^2$, es decir que el cuadrado de la cantidad mayor sería menor que el cuadrado de la menor. Esto colisiona con cualquier idea clara que uno pudiera sacar respecto de la noción de cantidad".

Parece obvio que para Carnot, la noción de número permanecía tácitamente ligada con la de magnitud concreta. Las operaciones con números eran, de hecho para él, *manipulaciones prácticas de magnitudes concretas*.