MECÁNICA DEL CONTÍNUO

Práctico 10: Flujo irrotacional

2005

1. La temperatura en un túnel está dada por:

$$T = T_0 - \alpha \sin(\omega t) \exp(-x/L), \tag{1}$$

donde T_0, α, L y ω son constantes positivas. Si una partícula se mueve en el túnel con velocidad constante U:

   (a) Hallar la variación de temperatura por unidad de tiempo que experimenta desde el punto de vista Euleriano.

   (b) Graficar la temperatura para instantes próximos e interpretar geometricamente las componentes de la derivada total.

   (c) Idem que a) y b), pero desde el punto de vista Lagrangiano, coinciden ambas derivadas?

2. Se tiene una capa de fluido de espesor despreciable que se mueve sobre la superficie de una esfera de radio R.

   (a) Haciendo el balance en un elemento de superficie entre el flujo que entra y el flujo que sale, demuestre que la ecuación de continuidad es:

$$R \sin\theta \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\rho v_\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\rho v_\theta \sin\theta\right) = 0, \tag{2}$$

   siendo R el radio de la esfera, ρ la densidad superficial del fluido, v_φy v_θ las velocidades correspondientes a las coordenadas angulares φ y θ, respectivamente.

(b) Suponiendo que el fluido es incompresible y el movimiento irrotacional, muestre que se puede definir un potencial de velocidades que satisface la ecuación:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \nu^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{3}$$

con

$$\nu = \ln\left(\cot\left(\theta/2\right)\right). \tag{4}$$

(c) Verique que una solución general de esta ecuación es:

$$\phi = F_1\left(\nu + i\varphi\right) + F_2\left(\nu - i\varphi\right), \tag{5}$$

donde F_1 y F_2 son funciones arbitrarias.

(d) Considere los casos particulares:

$$F_1(x) = x \tag{6}$$
$$F_2(x) = x \tag{7}$$

y

$$F_1(x) = -x \tag{8}$$
$$F_2(x) = x. \tag{9}$$

Halle en ambos casos el campo de velocidades, dibuje las líneas de corrientey explique la naturaleza de las singularidades. Existe alguna contradicción con lo supuesto en b)?

3. Flujo alrededor de un semicuerpo bidimensional: Poniendo una fuente puntual en un flujo uniforme, se obtiene el contorno y las líneas de corriente alrededor de un semicuerpo bidimensional.

   (a) Obtenga la función corriente $\Psi(x, y)$.

   (b) Construya las líneas de corriente (Nota: Numere las líneas de corriente eligiendo arbitrariamente el salto $\Delta\Psi$ entre líneas, de modo que dicho paso determine la velocidad del flujo uniforme).

4. Flujo alrededor de un cilindro circular: Para obtener este flujo se deben superponer las líneas de corriente de un dipolo con una corriente uniforme.

(a) Obtenga la función ϕ y la función corriente Ψ.

(b) Hallar las coordenadas de los puntos de estancamiento que caracterizan al cilindro. Halle la ecuación analítica de su contorno.

(c) Construya las líneas de corriente, procediendo como en el problema anterior.

(d) Muestre analíticamente que las líneas de corriente de un dipolo son círculos tangentes en el origen, cuyos diámetros varían como Ψ^{-1}. Encuentre la relación que existe entre el radio del círculo R y la fuerza del dipolo μ.