MECÁNICA DEL CONTÍNUO

Práctico 8: Hidrostática

2005

1. Mostrar que, para un fluido en reposo sobre el cual actúan fuerzas de volumen conservativas, la ecuación

$$\vec{\nabla}\, p + \rho\, \vec{\nabla}\, \Phi = 0$$

se reduce a:

   (a) $p/\rho + \Phi = const.$, si el flujo es incompresible;

   (b) $h + \Phi = const.$, si el fluido no intercambia calor con el medio externo;

   (c) $g + \Phi = const.$, si el fluido se mantiene a temperatura constante.

   Aquí, Φ es el potencial por unidad de masa del cual derivan las fuerzas de volumen que actúan sobre el fluido (incluídas las inerciales), p es la presión, ρ es la densidad, h y g son, respectivamente, la entalpía y la función de Gibbs por unidad de masa del fluido.

2. *Problema del taquímetro hidrostático:* Un recipiente cilíndrico abierto de eje vertical, radio R y altura $2H$, inicialmente lleno hasta la mitad de un líquido incompresible, gira alrededor de su eje con velocidad angular uniforme ω.

   (a) Cuál es la forma de la superficie libre del líquido? (La superficie libre es una isobara de presión igual a la atmosférica).

   (b) Para qué velocidad angular de rotación la superficie libre empieza a tocar el fondo?

(c) Para qué velocidad angular de rotación el agua empieza a desbordar?

(d) Graficar la distribución de presiones sobre las paredes y sobre el fondo,

   i. en la situación de reposo, y

   ii. durante la rotación.

(e) Describir un método que permita medir velocidades angulares utilizando el taquímetro.

3. Un cilindro similar al del problema 2, pero cerrado, contiene una masa M de un gas ideal a temperatura constante.

   (a) Hallar el perfil de densidad $\rho(r, z)$ en coordenadas cilíndricas.

4. Un fluido poco compresible satisface la siguiente ecuación de estado:

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \beta \frac{p - p_0}{p_0}$$

donde $\beta \ll 1$. Sea una cantidad de masa M de este fluido que, en equilibrio (libre de fuerzas de volumen, o sea, sin atracción gravitacional entre sus partes) y sujeto a una presión externa uniforme p_0, tiene una densidad uniforme ρ_0 tomando la forma de una esfera de radio a. Si el fluido estuviese sujeto a la atracción gravitatoria de sus partes, además de la presión externa, la configuración de equilibrio sería nuevamente esférica pero de radio $r_0 < a$.

   (a) Demostrar que la densidad satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{d\rho}{dr}\right) = -4\pi G\beta r^2 \rho \frac{\rho_0}{p_0} \tag{1}$$

   siendo r la distancia al centro de la esfera.

   (b) Si bien la densidad depende de la distancia al centro ($\beta \ll 1$), su valor diferirá poco de ρ_0. Por lo tanto, es de esperar que un desarrollo de ρ en potencias de de la forma

$$\rho = \rho_0 + \beta\rho_1(r) + \beta^2\rho_2(r) + ...$$

sea convergente. Obtener una ecuación para $\rho_1(r)$ desarrollando la ecuación (1) hasta el primer orden en β. Qué ventaja ofrece la ecuación obtenida respecto a la ecuación (1)?

(c) Integrar la ecuación para $\rho_1(r)$ y obtener $\rho(r)$ hasta el orden uno en β.

(d) Suponiendo que r_0 también es desarrollable en serie de potencias como:

$$r_0 = a - \beta r_1$$

encontrar la siguiente expresión para determinar el valor de r_0:

$$r_0 = a - \frac{4\pi G\beta a^2 \rho_0^2}{45 p_0}.$$

(e) Discutir sobre la utilidad del método utilizado y la validez del resultado obtenido.

5. Obtener una expresión para la presión en el centro de una estrella autogravitante en la cual la densidad a una distancia r del centro viene dada por:

$$\rho = \rho_c - \beta r^2$$

Demostrar que, si la densidad fuese el doble de la densidad en la superficie, la presión p_c en el centro es mayor en un factor 13/8 respecto a la que la estrella tendría si su densidad fuese uniforme y la masa total fuese la misma.

6. Sea una vasija que contiene un fluido incompresible, ambos acelerados con aceleración constante. Si tal aceleración no es paralela a la gravitatoria,

   (a) qué ángulo formará la superficie del líquido con la horizontal? Expresar la dirección del $\vec{\nabla} p$ en función de $\vec{g}$ y $\vec{a}$.

   (b) Qué sucedería si el fluido fuese compresible?

7. Un recipiente cerrado y lleno de agua está rotando con velocidad angular ω constante alrededor de un eje horizontal.

   (a) Mostrar que las superficies de igual presión son cilindros circulares cuyo eje común está desplazado $g/2$ por encima del eje de rotación.

8. Se tiene una esfera maciza de radio R apoyada sobre el desagüe circular de radio r ($< R$) de una pileta que contiene un líquido de densidad ρ hasta una altura H en equilibrio hidrostático. Discutir la posibilidad de obturación de la esfera. Para ello:

   (a) Calcular la fuerza del empuje E debida al líquido en función de H/R y de r/R.(El líquido puede o no cubrir totalmente a la esfera. Considerar ambas posibilidades).

   (b) Graficar el empuje E en función H/R para valores fijos de r/R y tambien en función r/R para valores fijos de H/R e interpretar cualitativamente los resultados.

9. Determinar la forma de una película de líquido sostenida por dos aros circulares paralelos, con sus centros sobre una línea perpendicular a sus planos.

10. Se tiene un fluido infinito en un campo gravitacional en contacto con una pared vertical plana.

   (a) Determinar la forma de la superficie libre si el ángulo de contacto entre el fluido y la pared es θ.

   (b) Calcular también la altura máxima de dicha superficie