MECÁNICA DEL CONTÍNUO

Práctico 5: Estado de tensión plano
(Deformación longitudinal de placas)

2005

1. En un estado de tensión plano, los esfuerzos vienen dados por

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \ , \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \ , \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$$

donde χ es la función de Airy que satisface la ecuación biarmónica:

$$\nabla^4 \chi = \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial y^4} = 0.$$

(a) Verificar que las siguientes funciones polinómicas

$$\begin{aligned}
\chi_2 &= a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2, \\
\chi_3 &= a_3 x^3 + b_3 x^2 y + c_3 xy^2 + d_3 y^3, \\
\chi_4 &= a_4 x^4 + b_4 x^3 y + c_4 x^2 y^2 + d_4 xy^3 + e_4 y^4,
\end{aligned}$$

pueden representar un campo de tensiones para cualquier valor de los coeficientes, excepto para χ_4, donde debe cumplirseque $3a_4 + 3e_4 + c_4 = 0$. Estas soluciones polinómicas tienen mucho interés cuando se tratan placas rectangulares largas y estrechas.

(b) Mostrar que χ_2 representa una combinación de tensiones uniformes (de tracción o compresión) en dos direcciones perpendiculares entre sí y una tensión tangencial uniforme como se representa en la figura 1.

(c) Mostrar que, si se anularn algunos coeficientes, χ_3 puede representar el estado de tensionesde la figura 2.

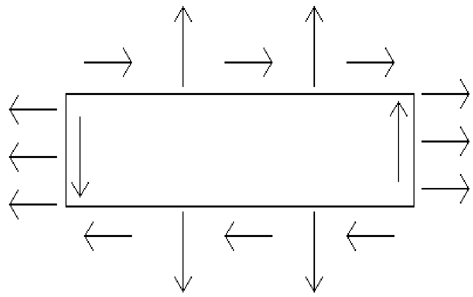

Figure 1:

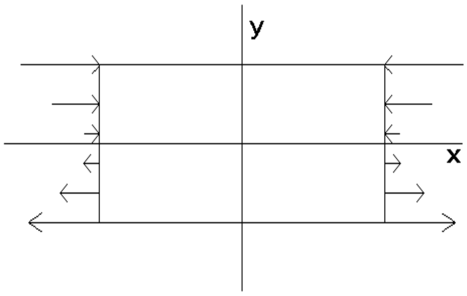

Figure 2:

2. *Flexión de una pieza en voladizo (ménsula) con carga en su extremidad libre:* Se tiene una ménsula de sección rectangular delgada que está siendo flectada por la acción de una fuerza $\mathbf{P}$ aplicada en su extremo libre.

   (a) Admitiendo que las regiones superior e inferior de la ménsula se encuentran en estados de tracción y compresión, respectivamente, mostrar qué coeficients de χ_4 no nulos describen este estado de tensión.

   (b) Calcular las constantes libres imponiendo que la fuerza sobre los bordes superior e inferior son nulas, y que la fuerza resultante en la dirección vertical sea igual a $\mathbf{P}$.

   (c) Calcular el campo de deformaciones u_x, u_y a condición de que el punto medio de la sección de empotramiento no se desplaze y que el elemento del eje de la viga en contacto con la pared permanezca fijo (esto es, que el u_y no varíe en la dirección x en ese punto).

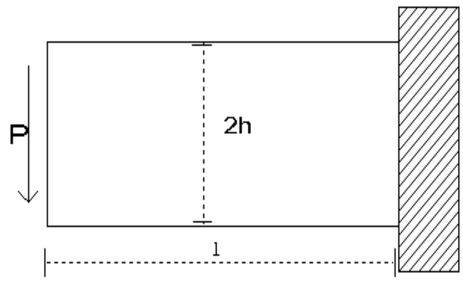

Figure 3:

3. Un disco plano rota con velocidad angular ω constante alrededor de su centro. El eje de rotación es perpendicular al disco.

   (a) Determinar la deformación radial u_r.

   (b) Comparar la solución con el caso del cilindro rotante de extensión infinita (deformación plana).

4. Una placa semi-infinita con borde recto se encuentra sometida a la acción de una fuerza coplanar y aplicada en un punto del borde.

   (a) A partir de las condiciones de contorno sobre dicho borde, obtener una expresión de la función de Airy en coordenadas polares.

   (b) Obtener el tensor de deformación y, por integración, el campo de desplazamientos radial y azimutal.

5. Una placa plana en forma de cuña de ángulo 2α está sometida a una fuerza aplicada en el vértice.

   (a) Obtener las componentes del tensor de los esfuerzos en coordenadas polares.

6. Un disco circular de radio R está siendo comprimido por dos fuerzas $\mathbf{F}$ iguales y opuestas aplicadas en los extremos de un diámetro.

   (a) En vista de la solución del problema anterior, obtener las componentes del tensor de los esfuerzos por superposición de tres campos de esfuerzos.

7. Una lámina infinita posee una abertura circular de radio R y se encuentra bajo un estado de tensión uniforme, esto es, $\sigma_{xx} = T$, $\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0$ en el infinito.

   (a) Obtener la función de Airy en el infinito.

   (b) Proponer por superposición una forma funcional (en coordenadas polares) de la función de Airy válida para todo el espacio.

   (c) Obtener las componentes del tensor de los esfuerzos.