MECÁNICA DEL CONTÍNUO

Trabajo Práctico Nro. 1

2005

1. Demostrar que todo tensor de segundo rango t_{ij} se puede descomponer en la forma:
$$t_{ij} = t_{ij}^{(s)} + t_{ij}^{(a)} + t_{ij}^{(1)}$$
donde: $t_{ij}^{(1)}$ es un tensor proporcional a δ_{ij}, $t_{ij}^{(s)}$ es un tensor simétrico de traza nula, y $t_{ij}^{(a)}$ es un tensor antisimétrico.

   (a) Cuántos elementos independientes tiene cada uno de los tensores que forman la descomposición anterior?

2. Se define el pseudo-tensor isotrópico de tercer orden ε_{ijk} (pseudo-tensor de Levi-Civita) como:
$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si i,j,k forman permutación par de 1,2,3} \\ 0 & \text{si hay dos o más índices repetidos} \\ \text{-1} & \text{si i,j,k forman permutación impar de 1,2,3} \end{cases}$$
Verificar que:

   (a) Si B es la matriz del tensor b_{ij}, entonces
$$\det(B) = |B| = \varepsilon_{rst} b_{1r} b_{2s} b_{3t}$$

   (b) y además:
$$\varepsilon_{rst} b_{ir} b_{js} b_{kt} = \varepsilon_{ijk} |B|$$

   (c) Si e_i $(i = 1, 2, 3)$ es una terna de versores ortogonales, entonces:
$$\vec{A} \times \vec{B} = \varepsilon_{ijk} A_j B_k e_i$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} e_i$$

(d) Demostrar que tanto el producto vectorial de vectores como el rotor de un vector son pseudo-vectores. Probar que el producto escalar de un pseudo-vector por un vector es un pseudo-escalar y que el producto vectorial de un vector por un pseudo-vector es un vector.

3. Probar, utilizando la notación tensorial, las siguientes fórmulas vectoriales:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\varphi \vec{A}\right) = \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \varphi$$
$$\vec{\nabla} \times \left(\varphi \vec{A}\right) = \varphi \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \varphi \times \vec{A}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) \cdot \vec{B} - \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{A}$$

4. En base a la definición del pseudo-tensor de Levi-Civita:

(a) Comprobar la identidad:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}$$

(b) Probar que:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqk} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$$
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pjk} = 2\delta_{ip}$$
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$$

(c) Demostrar que si el tensor $A_{jklm} = A_{jkml}$ y el tensor $B_{lsm} = -B_{msl}$, entonces:

$$C_{jks} = A_{jklm}B_{lsm} = 0.$$

(d) Indicar si se puede generalizar este resultado.

5. Utilizando notación tensorial demostrar la identidad vectorial:

$$\vec{v} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right) = -\left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v} + \vec{\nabla} \left(v^2/2\right)$$

6. Dado un tensor de segundo rango:

(a) Demostrar la invariancia de las siguientes cantidades:

$$\begin{array}{cc} t_{ii} & \text{(traza, invariante lineal)} \\ t_{ij}t_{ij} & \text{(invariante cuadrático)} \\ |t| & \text{(determinante)} \end{array}$$

(b) Si t_{ijk}, U_{ij}, V_k son tensores, probar que $t_{ijk}U_{ij}V_k$ es un invariante.

(c) Probar que el ángulo formado entre dos vectores es invariante.

7. Demostrar que si para un tensor U_{ij} se cumple $U_{ik}U_{kj} = \delta_{ij}$,entonces:

$$|U_{ij}| = \pm 1.$$

8. Hallar la forma de los siguientes operadores en coordenadas esféricas (ver Santaló, Cap. IV-17):

   (a) $grad\ \varphi$,

   (b) $div\ \vec{V}$,

   (c) $rot\ \vec{V}$.

9. Dado un conjunto de n partículas en el espacio euclídeo tri-dimensional definido por las coordenadas x_1, x_2, x_3, con respecto a una recta de componentes l_i que pasa por el origen de coordenadas,

   (a) Encontrar la expresión del momento de inercia I.

   (b) Determinar el carácter tensorial de la relación encontrada.

   (c) Mostrar que I_{ii} (i no sumado) es el momento de inercia respecto al eje x_i, mientras que I_{ij} es igual a menos el producto de inercia respecto de los ejes x_i y x_j.

   (d) Mostrar que para un cuerpo rígido que rota con velocidad angular w_j, el vector momento angular del cuerpo es $L_i = I_{ij}w_j$.

10. Verificar que el tensor de cuarto orden

$$A_{ijkl} = \alpha\delta_{ik}\delta_{jl} + \beta\delta_{il}\delta_{jk} + \gamma\delta_{ij}\delta_{kl}$$

es isótropo (α, β y γ son constantes). Se ha mostrado que esta es la forma más general del tensor isótropo de cuarto orden y que es única.