

7. FLUJOS VISCOSOS

Ecuación de Navier Stokes

Trataremos ahora flujos en los cuales los efectos de la viscosidad son importantes, pero limitándonos al caso incompresible y con densidad uniforme. Por lo tanto vamos a suponer que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ y $\rho = \text{cte.}$. La ecuación de movimiento es entonces la ecuación de Navier-Stokes:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (7.1)$$

donde $\nu \equiv \eta / \rho$ indica la viscosidad cinemática. Vamos a suponer que la fuerza de volumen es conservativa, de modo que $\mathbf{F} = -\nabla \varphi$ siendo φ el potencial correspondiente.

La (7.1) muestra que las fuerzas de inercia y viscosas equilibran la suma de la fuerza debida al gradiente de la presión más la fuerza de volumen $\rho \mathbf{F}$. Sin ulterior pérdida de generalidad podemos definir una *presión modificada* como

$$P = p + \rho \varphi \quad (7.2)$$

y entonces la ecuación de Navier-Stokes (7.1) queda de la forma

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (7.3)$$

como si no existieran fuerzas de volumen. Esto equivale a agregar a la presión una presión ficticia $\rho \varphi$. Dado que hemos supuesto que ρ es constante, esta presión ficticia es un dato del problema, por lo tanto es suficiente resolver la ecuación (7.3) (lo que formalmente es equivalente a suponer que $\mathbf{F} = 0$), con tal de interpretar P de acuerdo con la (7.2).

Ecuación de la vorticidad

Del mismo modo que procedimos para obtener la ecuación de la vorticidad a partir de la ecuación de Euler (Cap. 5), tomamos el rotor de la ecuación de Navier-Stokes. Usando la ec. (5.10) y tomando en cuenta que el operador rotor conmuta con el operador Laplaciano, resulta

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (7.4)$$

Si ahora usamos la identidad vectorial (5.28) y la condición $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ podemos escribir la (7.4) como

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (7.5)$$

El primer término del miembro derecho de la (7.5) expresa, como ya sabemos, el congelamiento de la vorticidad, y el segundo término (que no aparece para flujos ideales) nos dice que la vorticidad *difunde* a través del fluido debido a la viscosidad. Además de esta diferencia, podemos también observar que la (7.5) difiere de la (5.29) porque ahora se ha supuesto que la densidad es constante.

Difusión de la velocidad y la vorticidad

Para apreciar el efecto del término $\nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$, consideremos el siguiente problema: se tiene un fluido que ocupa el semiespacio $y > 0$, limitado por una pared rígida en el plano $y = 0$. Para $t < 0$, el fluido y la pared se encuentran en reposo. En el instante $t = 0$ la pared se pone en movimiento en la dirección x , con una velocidad

$$\mathbf{u}_0 = u_0 \mathbf{e}_x = \text{cte} \quad , \quad t \geq 0 \quad (7.6)$$

Claramente la coordenada z es ignorable, y la única componente no nula de la velocidad del fluido es la componente x , que depende sólo de y y de t :

$$\mathbf{u} = u(y, t) \mathbf{e}_x \quad (7.7)$$

Por lo tanto, la única componente no nula de la vorticidad es la componente z :

$$\boldsymbol{\omega} = \omega(y, t) \mathbf{e}_z = -(\partial u / \partial y) \mathbf{e}_z \quad (7.8)$$

De la (7.3) vemos también que debemos tener $\nabla P = 0$, es decir $P = \text{cte}$. dado que hemos supuesto que el fluido está en reposo para $t < 0$. Por lo tanto, sin perder generalidad, podemos suponer que la presión modificada P es nula (si bien podemos tener $p \neq 0$, la fuerza debida a la presión debe estar equilibrada por la gravedad).

Por lo que se acaba de ver, los operadores $\mathbf{u} \cdot \nabla$ y $\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla$ en la ecuación de Navier-Stokes (7.3) y en la ecuación de la vorticidad (7.5) son nulos, y esas ecuaciones se reducen a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad (7.9)$$

o sea, son ecuaciones idénticas. Ecuaciones del tipo (7.9) conocen como *ecuaciones de difusión*¹. Veremos ahora como se construye la solución de nuestro problema, comenzando por la ecuación de la velocidad.

Puesto que u_0 es la velocidad característica del problema, la solución debe ser de la forma

$$u = u_0 f(y, t, \nu) \quad (7.10)$$

donde f es una función sin dimensiones de las demás variables y parámetros del problema. Por lo tanto, los argumentos de f deben ser también adimensionales. Pero como no existen en nuestro problema ni distancias ni tiempos característicos, las variables y , t no pueden aparecer separadas, sino formando *una única combinación adimensional* que podemos elegir, sin pérdida de generalidad, de la forma

$$\xi = \nu^\alpha t^\beta y \quad \text{con} \quad \alpha, \beta \text{ constantes} \quad (7.11)$$

Puesto que las dimensiones de ν son $[\nu] = L^2 T^{-1}$, se debe cumplir que

¹ Más precisamente, ecuaciones *lineales* de difusión, pues hemos supuesto que ν es constante. Para un fluido no Newtoniano, en el cual la viscosidad depende de la velocidad de deformación, este mismo problema conduce también a una ecuación de difusión, pero que no es lineal.

$$(L^2 T^{-1})^\alpha T^\beta L = 1 \quad (7.12)$$

Por lo tanto los exponentes α y β deben satisfacer las ecuaciones

$$2\alpha + 1 = 0 \quad , \quad \beta - \alpha = 0 \quad (7.13)$$

cuya única solución es

$$\alpha = -1/2 \quad , \quad \beta = -1/2 \quad (7.14)$$

En consecuencia, la solución debe ser necesariamente de la forma

$$u = u_0 f(\xi) \quad , \quad \xi = \frac{y}{\sqrt{4\nu t}} \quad (7.15)$$

donde hemos introducido por conveniencia el factor 4 en el radicando. Este resultado es de por sí interesante, pues fija las posibles dependencias del campo de velocidades con la coordenada y el tiempo. Además, reemplazando la expresión (7.15) de u en la ecuación de difusión, obtenemos una ecuación no ya en las derivadas parciales de las dos variables independientes y , t , sino una ecuación diferencial *ordinaria* en la única variable independiente ξ , de la forma

$$f'' + 2\xi f' = 0 \quad (7.16)$$

donde las primas indican derivadas respecto de ξ . Una primera integral de esta ecuación es

$$f' = A e^{-\xi^2} \quad , \quad A = \text{cte.} \quad (7.17)$$

Para averiguar el valor de A , retornemos a las variables físicas u , y , t , de modo que la (7.17) se escriba como

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{A u_0}{\sqrt{4\nu t}} e^{-y^2/4\nu t} \quad (7.18)$$

e integremos a t fijo desde 0 hasta y . Resulta:

$$u(y, t) - u(0, t) = u(y, t) - u_0 = \frac{A u_0}{\sqrt{4\nu t}} \int_0^y e^{-y'^2/4\nu t} dy' = A u_0 \int_0^{y/\sqrt{4\nu t}} e^{-s^2} ds \quad (7.19)$$

pues la condición de contorno de no deslizamiento sobre la pared requiere que

$$u(0, t) = u_0 \quad (7.20)$$

Por otra parte, cuando $y \rightarrow \infty$ tenemos que

$$u(\infty, t) = 0 \quad (7.21)$$

Además

$$\int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (7.22)$$

y por lo tanto resulta que

$$A = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad (7.23)$$

Puesto que la (7.19) vale para cualquier t , podemos escribir la solución del problema como

$$u(y,t) = u_0[1 - \operatorname{erf}(y/\sqrt{4vt})] \quad (7.24)$$

donde la *función error* $\operatorname{erf}(s)$ está definida por

$$\operatorname{erf}(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-s'^2} ds' \quad (7.25)$$

con el factor de normalización $2/\sqrt{\pi}$, para que se cumpla $\operatorname{erf}(\infty) = 1$.

Habiendo obtenido $u(y,t)$ podemos calcular la vorticidad por medio de la (7.8). Resulta:

$$\omega(y,t) = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_0}{\sqrt{\pi vt}} e^{-y^2/4vt} \quad (7.26)$$

con lo cual queda resuelto el problema. Las soluciones (7.24) y (7.26) se muestran en la Fig. 7.1. Soluciones del tipo (7.24) y (7.26) se dicen *autosemejantes*, es decir semejantes a sí mismas. La razón de esta denominación es que si representamos $u(y,t)$ y $\omega(y,t)$ como funciones de y para un cierto valor fijo de t (o como funciones de t para y fijo), los mismos gráficos también representan a $u(y',t')$ y $\omega(y',t')$ como funciones de y' para otro t' fijo (o como funciones de y' para t' fijo), siempre y cuando las escalas de los ejes se cambien por factores adecuados (que surgen de inspeccionar la (7.24) y (7.26)). La única variable independiente ξ definida por la (7.15) se denomina *variable de autosemejanza*. En los gráficos de la Fig. 7.1 se ha elegido ξ como variable independiente (en el eje de las ordenadas, para que el lector pueda imaginar que el eje y es vertical y la pared es horizontal) y a u/u_0 y $\omega\sqrt{\pi vt}/u_0$ como variables dependientes. De esta forma, las curvas dibujadas en la figura son *universales*, y presentan la solución para todo y , t , y para cualquier valor de v y u_0 .

La existencia de *autosemejanza* es de gran importancia puesto que simplifica considerablemente la solución del problema. En efecto, gracias a ello las ecuaciones diferenciales *parciales* (7.29) en las dos variables y , t se reducen a ecuaciones diferenciales *ordinarias* en la única variable ξ , mucho más fáciles de resolver. La noción de autosemejanza y el método que hemos utilizado son muy generales, y más adelante encontraremos otros ejemplos.

Examinemos el comportamiento de la solución cerca de la pared, donde $y \ll \sqrt{4vt}$ ($\xi \ll 1$). De la (7.24) y la (7.26) obtenemos

$$u \cong u_0[1 - y/\sqrt{4vt}] \quad , \quad \omega \cong u_0/\sqrt{4vt} \quad , \quad (y \ll \sqrt{4vt}) \quad (7.27)$$

lo cual muestra que la velocidad disminuye linealmente con y , con una pendiente que decrece con el tiempo y se mantiene uniforme en el espacio. Dentro de la misma región la vorticidad es uniforme en el espacio y disminuye a medida que transcurre el tiempo.

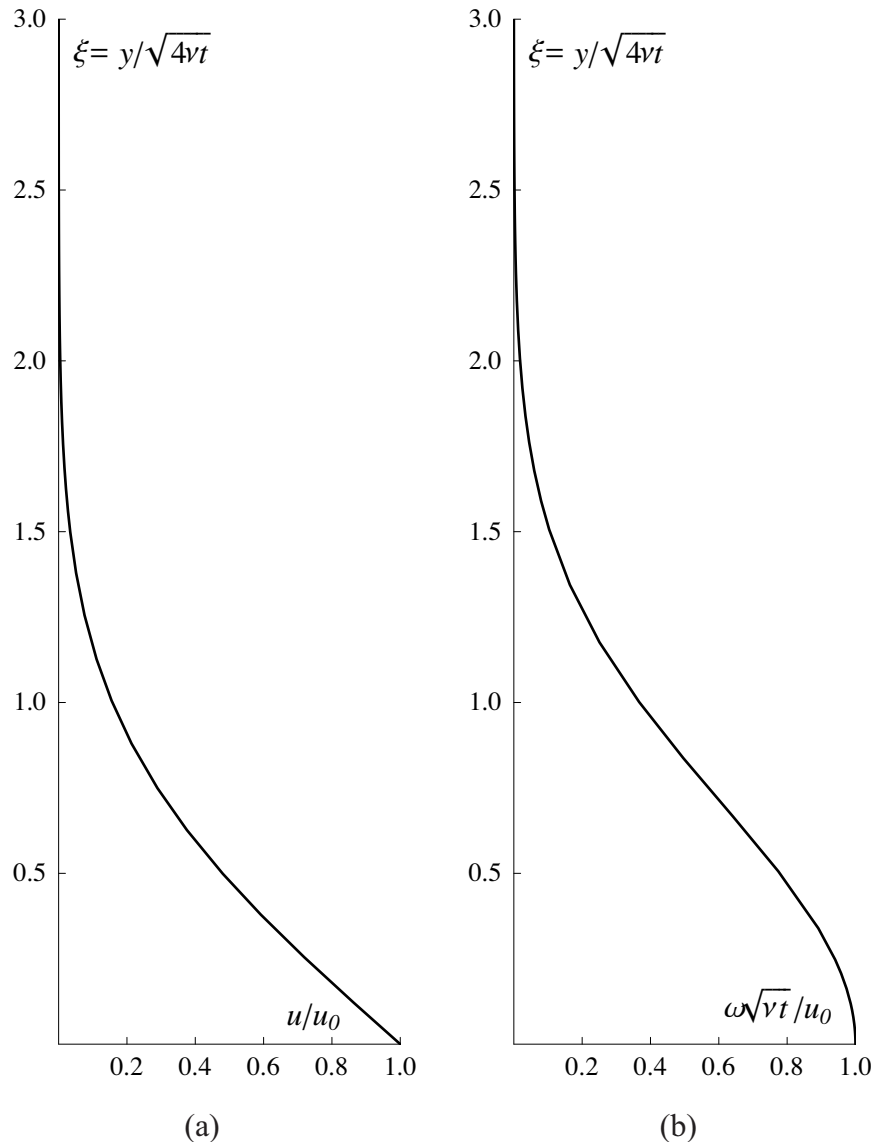


Fig. 7.1. Difusión de la velocidad (a) y de la vorticidad (b) originada por una pared que se ha puesto en movimiento paralelamente a sí misma.

En primera aproximación podemos decir que el movimiento afecta una capa próxima a la pared, de espesor

$$\Delta \cong \sqrt{4\nu t} \quad (7.28)$$

dentro de la cual la velocidad decrece en forma aproximadamente lineal a partir de u_0 en $y = 0$. En la misma capa, la vorticidad disminuye con el pasar del tiempo a medida que la capa aumenta de espesor. En realidad, puesto que

$$\int_0^{\infty} \omega(y,t) dy = u_0 \quad (7.29)$$

se mantiene constante para $t > 0$, con pleno derecho se puede decir que toda la vorticidad se origina en $t = 0$ sobre la pared misma, al variar de 0 a u_0 la velocidad de la pared. De allí en más, no se genera más vorticidad; ésta, simplemente, difunde en el resto del fluido.

También es interesante calcular la fuerza sobre la pared debida a la viscosidad. Tenemos que

$$\sigma_{xy} = \eta \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\eta u_0}{\sqrt{4\pi\nu t}} \quad (7.30)$$

de donde se ve que la fuerza disminuye como $t^{-1/2}$.

Flujos con vorticidad inicial nula y el origen de la capa límite

El término $\nabla^2 \mathbf{u}$ de la ecuación de Navier-Stokes se puede desarrollar usando la identidad vectorial (6.172) en la forma

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = -\nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (7.31)$$

pues sólo consideramos fluidos incompresibles. Por lo tanto, si la vorticidad es nula (o constante) se tiene que $\nabla^2 \mathbf{u} = 0$, y la ecuación de Navier-Stokes coincide con la ecuación de Euler, a pesar de la presencia de esfuerzos tangenciales.

Para comprender las consecuencias de este hecho, supongamos que hemos obtenido un campo de velocidad irrotacional para un fluido no viscoso ($\nu = 0$), que por lo tanto satisface la ecuación de Euler. Imaginemos ahora que, mediante un artificio ideal, en un cierto instante (digamos en $t = 0$) la viscosidad del fluido pasa a tener un valor finito $\nu \neq 0$. De acuerdo con lo que acabamos de ver el campo de velocidad que existía para $t < 0$ satisface también la ecuación de Navier-Stokes, que debemos emplear a partir de $t = 0$. Luego, incluso si $\nu \neq 0$, no hay ningún motivo para que aparezca de repente vorticidad en un fluido donde $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. Sin embargo, esto es cierto *sólo si se prescinde de las condiciones de contorno*, pues para $t > 0$ la velocidad tangencial en toda superficie de contacto entre el fluido y un sólido debe ser *nula* en el sistema de referencia del sólido, en vez de autodeterminarse como ocurría cuando se tenía $\nu = 0$.

Para fijar ideas mediante un ejemplo, consideremos el flujo cerca de una pared sólida inmóvil, plana e infinita². Supongamos que para $t < 0$ (mientras la viscosidad es nula), el flujo es irrotacional. En general, la velocidad del fluido en el entorno de una porción de la pared tendrá un valor finito (el que resulte de calcular el campo de velocidad mediante la ecuación de Euler) que denominaremos $-\mathbf{u}_0$. Pero a partir de $t = 0$, la velocidad se debe anular en ese entorno. Si nos ubicamos en el sistema de referencia del fluido, todo ocurre como si el fluido hubiese sido siempre viscoso, y que la pared, que (en ese referencial) estaba inmóvil hasta $t = 0$, en ese instante se puso en movimiento paralelamente a sí misma con la velocidad \mathbf{u}_0 .

Podemos entonces usar el resultado del problema anterior para concluir que, por efecto de la viscosidad, se produce una capa cerca de la superficie, a través de la cual la velocidad pasa del va-

² Está claro que, salvo en el entorno de vértices o aristas, este caso es representativo de lo que ocurre cerca de una porción limitada de superficie, incluso cuando la superficie sólida no es plana.

lor nulo sobre la superficie inmóvil, al valor $-u_0$ correspondiente al campo de velocidad determinado por la ecuación de Euler. En esta *capa límite* la vorticidad no es nula, aunque sigue siendo aproximadamente nula fuera de ella. Con todo derecho, podemos decir entonces que la vorticidad se genera en el contorno fluido-pared. Además, por la (7.28), sabemos también que el espesor Δ de la capa vorticiosa aumenta con el tiempo de acuerdo a la ley

$$\Delta \cong \sqrt{4\nu t} \quad (7.32)$$

de modo que eventualmente se va a extender al resto del fluido.

Existe, sin embargo, una clase importante de problemas en los cuales el valor de t que aparece en la expresión (7.32) está acotado, y por lo tanto también Δ está *acotado*. Esto ocurre cuando la extensión de la pared sobre la cual escurre el fluido es *finita* en la dirección del escurrimiento. Sea L el orden de magnitud de dicha extensión; entonces, cada parcela del fluido interactúa con la pared durante un intervalo de tiempo $T \cong L/u$ (podemos interpretar que $t = 0$ es el instante en que la parcela entró en contacto con la pared, de modo que la artificiosidad de introducir la viscosidad en un cierto instante desaparece). Transcurrido T , la parcela deja de estar en contacto con la pared, y por lo tanto no se genera en ella más vorticidad: de ahí en más la vorticidad es transportada convectivamente, difunde y se atenúa. Entonces, en este tipo de problemas existe una cota para Δ , dada por

$$\Delta \cong \sqrt{4\nu T} = \sqrt{4 \frac{\nu L}{u}} = 2L \text{Re}^{-1/2} \quad (7.33)$$

donde $\text{Re} = uL/\nu$ es el *número de Reynolds*, que introdujimos en el Capítulo anterior. Vemos entonces que:

El número de Reynolds determina la relación entre el espesor que adquiere la capa donde se sienten los efectos de la viscosidad y la extensión de la pared en la dirección del escurrimiento.

Cuando $\text{Re} \gg 1$, el espesor de la capa límite es muy pequeño respecto de la extensión de los obstáculos a lo largo de los cuales escurre el fluido³, lo cual permite que el grueso del campo de velocidad se pueda calcular con buena aproximación recurriendo a la ecuación de Euler (aún cuando los efectos viscosos se deben tener en cuenta para calcular el arrastre). Sin embargo, no siempre se puede dar por cierto que la condición $\text{Re} \gg 1$ por sí sola permite ignorar los efectos viscosos en la determinación del campo de velocidad; en efecto, si estudiamos el flujo en un conducto largo y angosto, la condición para que \mathbf{u} esté determinado por la ecuación de Euler es que $\Delta \ll d$ (d : ancho del conducto), o sea $L\text{Re}^{-1/2} \ll d$ de donde resulta la condición

$$\text{Re} \gg (L/d)^2 \gg 1 \quad (7.34)$$

pues $L \gg d$ si el conducto es largo. Algunos valores de la viscosidad se dan en la Tabla 7.1. Se ha visto que la condición $\text{Re} \gg 1$ implica que en un flujo alrededor de un cuerpo sólido la capa vorticiosa que se forma a partir de la superficie del cuerpo se mantiene en el entorno de esta

³ Por ejemplo, consideremos el ala de un avión que vuela a 360 km/h. Supongamos que la cuerda del ala mide $\ell = 1.5$ m. En este caso usando $\nu = 0.15$ c.g.s. (Tabla 7.1) obtenemos $\text{Re} = 10^7$ y entonces resulta $\Delta = 1$ mm.

superficie, en el sentido que su espesor Δ es mucho menor que la dimensión típica L del cuerpo. Veamos qué significa esto, por ejemplo, para cuerpos que se mueven en el aire: para tener $Re \approx 1$, un cuerpo de 1 cm de radio debería moverse con una velocidad muy baja, alrededor de 0.15 cm/seg. En realidad, casi todos los movimientos de interés práctico de sólidos macroscópicos en aire ocurren en situaciones en que $Re \gg 1$. Por ejemplo una gota de lluvia de 1 mm de radio que cae con una velocidad entre 10^2 y 10^3 cm/seg tiene Re entre 100 y 1000. Sólo para el caso de partículas microscópicas es posible tener $Re \approx 1$.

Tabla 7.1: valores de la viscosidad para algunos fluidos ($T = 20^\circ\text{C}$, unidades c.g.s.)

Fluido	ν	$\eta (= \rho\nu)$
Aire	0.15	1.8×10^{-4}
Agua	0.011	0.011
Aceite de oliva	1.08	0.96
Glicerina	18.5	23.3

En resumen, podemos concluir que mientras Δ sea mucho menor que las distancias sobre las cuales se desarrolla el flujo, o sea para flujos con alto número de Reynolds, se puede ignorar la presencia de la capa límite y usar la ecuación de Euler para calcular el grueso del campo de velocidad, pero con ciertas salvedades y limitaciones. La primera es que el arrastre sobre el sólido *no es nulo* como predice la teoría ideal (paradoja de D'Alembert), y para calcular su valor es esencial conocer las propiedades de la capa límite. La segunda es que la vorticosidad que se genera en la capa límite por la interacción de las parcelas del fluido con la superficie sólida es arrastrada por el movimiento del fluido y forma una *estela* detrás del sólido; debido a esto el campo de velocidad *detrás* del sólido es muy *diferente* del que predice la ecuación de Euler. La tercera es que en ciertos casos la capa límite (y por lo tanto la estela) se puede tornar *turbulenta*; cuando eso ocurre, sus propiedades son diferentes de las que resultan de nuestras precedentes discusiones, que se refieren a lo que se denomina capa límite *laminar*. La cuarta es que, bajo ciertas condiciones, la capa límite (laminar o turbulenta) se puede *separar* (o desprender) de la superficie del sólido y establecerse en el seno del fluido, lo cual tiene importantes consecuencias tanto en lo referente al arrastre como a la sustentación (como ya vimos en el Capítulo 6).

Significado del número de Reynolds

Ya vimos en el Capítulo anterior que el número de Reynolds proporciona una estimación de la importancia relativa del término de inercia $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ y el término viscoso $\nabla^2\mathbf{u}$ de la ecuación de Navier-Stokes. Volvamos por un momento sobre esta cuestión, y consideremos un flujo incompresible *estacionario* alrededor de un cuerpo sólido. Claramente, de acuerdo con la ecuación de Navier-Stokes, el gradiente de la presión asociado con el campo de velocidad está determinado por dos clases de fuerzas: las fuerzas de carácter inercial, es decir las dadas por el teorema de Bernoulli, y las fuerzas de origen viscoso. De la (7.3) tenemos, en efecto, que

$$\nabla P = -\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \eta\nabla^2\mathbf{u} \quad (7.35)$$

Por lo visto en el Capítulo 6, el orden de magnitud de la razón entre el primer y segundo término del miembro derecho de la (7.35) está dado, en el grueso del fluido (es decir excluyendo las regiones muy cerca de la superficie del cuerpo), precisamente por el número de Reynolds:

$$\frac{|\text{término de inercia}|}{|\text{término viscoso}|} = O\left(\frac{U^2/L}{\nu U/L^2}\right) = O(\text{Re}) \quad (7.36)$$

donde L es la escala típica sobre la cual varía el grueso del campo de velocidad³. Debe quedar en claro que, para que esta comparación tenga significado, se debe hacer sobre *el grueso* del campo de velocidades, pues acabamos de ver que cerca de la superficie del cuerpo \mathbf{u} varía en forma importante sobre distancias del orden del espesor Δ de la capa límite, una escala que en general es muy diferente de L .

En suma, podemos afirmar lo siguiente:

Si $\text{Re} \gg 1$, las fuerzas viscosas son despreciables frente a las fuerzas inerciales en el grueso del campo de velocidades. Por consiguiente no contribuyen a la presión, que en la práctica queda determinada por el teorema de Bernoulli. No se pueden ignorar, por supuesto, dentro de la capa límite, donde de acuerdo con la (7.33) se tiene que

$$\frac{|\text{término de inercia}|}{|\text{término viscoso}|} = O\left(\frac{U^2/\Delta}{\nu U/\Delta^2}\right) = O\left(\frac{\Delta}{L}\text{Re}\right) = O(\text{Re}^{1/2}) \quad (7.37)$$

Si en cambio $\text{Re} \leq 1$, las fuerzas viscosas son importantes en todo el campo y todo ocurre como si la capa límite abarcara la totalidad del flujo.

Número de Reynolds y Semejanza Dinámica

Volvamos a la ecuación de Navier-Stokes para fluidos incompresibles con viscosidad constante

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (7.38)$$

Supongamos ahora que tenemos dos flujos, que designaremos flujo a y flujo b , determinados por condiciones de contorno e iniciales *semejantes*, en el sentido que se puedan transformar las unas en las otras simplemente multiplicando las dimensiones, las velocidades y las presiones por respectivos factores constantes (por ejemplo, cuerpos esféricos sumergidos en flujos uniformes). En otras palabras, que las distancias, velocidades y presiones que especifican las condiciones de contorno de estos flujos, una vez divididas por las distancias, velocidades y presiones características de cada uno de ellos, que llamaremos L_a , U_a , P_a , y L_b , U_b , P_b , dan lugar a conjuntos de números puros *idénticos*.

Ahora bien, el hecho que la ecuación (7.38) no contiene ni distancias, ni velocidades, ni presiones, ni tiempos característicos hace pensar que bajo ciertas condiciones los flujos a y b se pueden describir por medio de funciones *idénticas*, con tal de elegir las variables adecuadas.

En efecto, expresemos las distancias, velocidades y presiones del flujo a como

$$x_i = x'_i L_a \quad , \quad u_i = u'_i U_a \quad , \quad P = P' P_a \quad (7.39)$$

y a las análogas magnitudes del flujo b como

$$x_i = x''_i L_b \quad , \quad u_i = u''_i U_b \quad , \quad P = P'' P_b \quad (7.40)$$

³ Típicamente, L es del orden del tamaño del cuerpo.

Además, para describir estos flujos vamos a emplear las variables temporales t' y t'' definidas, respectivamente, por

$$t = t'T_a \quad \text{con} \quad T_a \equiv L_a/U_a \quad , \quad t = t''T_b \quad \text{con} \quad T_b \equiv L_b/U_b \quad (7.41)$$

Sustituyendo las (7.39) y la primera de las (7.41) en la ecuación (7.38) y dividiendo por $\rho_a U_a^2 / L_a$ obtenemos para el flujo a :

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t'} + u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j'} = -\frac{P_a}{\rho_a U_a^2} \frac{\partial P'}{\partial x_i'} + \frac{1}{\text{Re}_a} \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j' \partial x_j'} \quad (7.42)$$

donde $\text{Re}_a = L_a U_a / \nu_a$ es el número de Reynolds del flujo a .

Del mismo modo, sustituyendo las (7.40) y la segunda de las (7.41) en la (7.38) obtenemos para el flujo b :

$$\frac{\partial u_i''}{\partial t''} + u_j'' \frac{\partial u_i''}{\partial x_j''} = -\frac{P_b}{\rho_b U_b^2} \frac{\partial P''}{\partial x_i''} + \frac{1}{\text{Re}_b} \frac{\partial^2 u_i''}{\partial x_j'' \partial x_j''} \quad (7.43)$$

Por la hipótesis de partida, las ecuaciones (7.42) y (7.43) se deben resolver con *idénticas* condiciones iniciales y de contorno, representadas por el conjunto de números puros antes mencionado. Los primeros miembros son idénticos; los términos del segundo miembro serán idénticos si se cumple que

$$\text{Re}_b = \text{Re}_a \quad \text{y} \quad \frac{P_b}{\rho_b U_b^2} = \frac{P_a}{\rho_a U_a^2} \quad (7.44)$$

La segunda condición cuenta únicamente en los casos en que se asigna como condición de contorno la presión (modificada), lo que es infrecuente en los flujos incompresibles. Lo más común es que no sea así, y entonces al no existir una presión característica, la escala de la presión queda determinada para cada problema por ρU^2 , del mismo modo como quedó determinada la escala de tiempo L/U .

En conclusión podemos afirmar que:

Dos flujos a y b , descritos por las nuevas variables \mathbf{u}' , \mathbf{x}' , t' , $P' = P / \rho_a U_a^2$ y \mathbf{u}'' , \mathbf{x}'' , t'' , $P'' = P / \rho_b U_b^2$ definidas por las (7.39-7.41), son idénticos bajo la condición

$$\text{Re}_b = \text{Re}_a \quad (7.45)$$

Por lo tanto dos flujos (se entiende, con las limitaciones planteadas por las hipótesis de partida) caracterizados por condiciones de contorno e iniciales semejantes (en el sentido aclarado) se describen, a igualdad de números de Reynolds, por funciones idénticas si se eligen las variables adimensionales adecuadas. Naturalmente, esto *no significa* que los flujos son idénticos *en términos de las variables físicas ordinarias* (distancias, tiempos, velocidades, presiones, etc.), sino que son *semejantes* (o *similares*), pues se pueden transformar el uno en el otro mediante oportunos cambios de las escalas de distancias, tiempos, velocidades y presiones (estas dos últimas magnitudes se pueden considerar variables derivadas). Por este motivo el principio que acabamos de enunciar se denomina *Principio de Semejanza* (o de *Similitud*) *Dinámica*.

Aplicación del Principio de Semejanza al arrastre de cuerpos esféricos

El Principio de Semejanza es de gran importancia práctica, pues permite obtener información sobre un flujo desconocido a partir de experimentos a escala, llevados a cabo bajo condiciones físicas más convenientes que las del flujo desconocido que se quiere investigar. Vamos a ver ahora un ejemplo que ilustra las ideas principales.

Supongamos que nos interesa determinar la fuerza de arrastre sobre una pequeña partícula esférica que se mueve en agua, que es muy difícil de medir si las dimensiones de la partícula son muy pequeñas. Según el Principio de Semejanza, una vez que se expresa en términos de la velocidad U y el diámetro L de la partícula, el flujo alrededor de la partícula pequeña tiene la misma forma que el flujo alrededor de una esfera mucho más grande que se mueve en otro fluido, siempre y cuando el número de Reynolds de ambos flujos tenga el mismo valor. Puesto que el valor de ν de un aceite lubricante puede ser 400 veces mayor que el del agua y el de la glicerina es casi 1700 veces mayor, usando estos fluidos podemos tener el mismo número de Reynolds empleando esferas de gran tamaño y que se mueven con mayor velocidad, de modo que las mediciones resulten mucho más sencillas.

Si indicamos con \mathbf{m} el versor en la dirección del movimiento, el arrastre se expresa como

$$F_m = - \int_S m_i \sigma_{ij} n_j dS \quad (7.46)$$

donde \mathbf{n} es el versor normal (saliente) a la superficie de la esfera y $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de los esfuerzos

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7.47)$$

Introducimos ahora las variables \mathbf{u}' , \mathbf{x}' , t' definidas por

$$x_i = x'_i L \quad , \quad u_i = u'_i U \quad , \quad t = t' L / U \quad (7.48)$$

y

$$p = p' \rho U^2 \quad (7.49)$$

donde U es la velocidad de la partícula respecto del fluido lejos de ella y L su diámetro, y obtenemos

$$\sigma_{ij} = \rho U^2 \left[-p' \delta_{ij} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} \right) \right] \quad (7.50)$$

Asimismo

$$dS = dS' L^2 \quad (7.51)$$

Introduciendo las expresiones (7.50) y (7.51) en la (7.46) resulta

$$\frac{F_m}{\rho U^2 L^2} = - \int_S m_i \left[-p' \delta_{ij} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} \right) \right] n_j dS' \quad (7.52)$$

Por lo tanto

$$F_m = \rho U^2 L^2 f_m \quad , \quad f_m = f_m(\text{Re}) = - \int_S m_i \left[-p' \delta_{ij} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} \right) \right] n_j dS' \quad (7.53)$$

donde $f_m(\text{Re})$ es una función del número de Reynolds, y por lo tanto vale lo mismo para todos los flujos caracterizados por el mismo valor de Re . Nótese que en este problema, la presión (modificada) resulta como una consecuencia de la determinación del campo de velocidades, pues no está asignada como condición de contorno o inicial y por lo tanto debe escalar como ρU^2 .

A este resultado se podría haber llegado directamente aplicando el Principio de Semejanza. En efecto, la escala de fuerzas se puede *elegir* como $\rho U^2 L^2$, y dos flujos cualesquiera alrededor de la esfera son semejantes si tienen el mismo número de Reynolds; es fácil ver entonces que la expresión (7.53) del arrastre es la única posible.

El lector debe notar que si bien hemos hablado de cuerpos esféricos, nuestros argumentos desde la ec (7.46) hasta llegar a la (7.53) son completamente generales, y valen para cuerpos de forma cualquiera. En general, L representa la dimensión característica del cuerpo, y la función adimensional f_m no sólo depende del número de Reynolds, sino también de los parámetros geométricos que definen la *forma* del cuerpo, y de su *orientación* respecto de U .

También debe notar el lector que con los parámetros del problema se puede formar *otra* combinación independiente que también tiene dimensiones de fuerza (la combinación ηUL). Está claro por lo tanto que el emplear $\rho U^2 L^2$ como escala de fuerzas es una elección *arbitraria* y que además *no implica* que el arrastre sea proporcional al cuadrado de la velocidad del cuerpo. Sobre esto último volveremos más adelante.

Veamos cómo se puede proceder en el laboratorio para construir la función $f_m(\text{Re})$ para cuerpos esféricos. Supongamos que dejamos caer en el mismo fluido de densidad ρ una serie de esferas (distinguidas por el subíndice i) que tienen todas el mismo diámetro L pero masas diferentes (porque son parcialmente huecas o tienen distinta densidad). El arrastre se determina a partir de la velocidad terminal (crítica o límite) de caída U_i . En efecto, cuando se alcanza la velocidad límite se tiene que (en módulo),

$$F(U_i) = M_i g \quad (7.54)$$

donde g es la aceleración de la gravedad y hemos indicado con M_i la diferencia entre la masa de la esfera i y la masa de fluido desplazada por la misma a fin de tomar en cuenta el empuje de Arquímedes. Luego para cada esfera se puede escribir (omitimos el subscripto m pues tratándose de una esfera el arrastre no depende de la dirección de U) que

$$M_i g = \rho U_i^2 L^2 f(\text{Re}_i) \quad , \quad \text{Re}_i = \rho U_i L / \eta \quad (7.55)$$

o sea

$$f(\text{Re}_i) = f(\rho U_i L / \eta) = \frac{M_i g}{\rho U_i^2 L^2} \quad (7.56)$$

Realizando numerosos experimentos con distintos valores de M_i se pueden obtener muchos valores diferentes de U_i y por lo tanto de Re_i . Se puede así construir un gráfico de la función $f(\text{Re})$ para un amplio rango de valores de Re . Una vez determinada $f(\text{Re})$ se puede usar el gráfico para calcular el arrastre en función de las magnitudes ρ , U , L y η (por supuesto, siempre y cuando Re esté dentro del intervalo de valores para el cual se ha determinado $f(\text{Re})$).

En general, para cuerpos de forma cualquiera la función $f_m(\text{Re})$ es sumamente complicada y sólo se puede determinar empíricamente. Sin embargo, la expresión de f_m se simplifica en los casos límite $\text{Re} \ll 1$ y $\text{Re} \gg 1$, como veremos en seguida.

Nótese que la expresión

$$F = \rho U^2 L^2 f \quad (7.57)$$

no significa que la fuerza de arrastre para una dada esfera es proporcional a $U^2 L^2$. En efecto, si se fijan los valores de ρ , η y se varían U y L , cambia el valor de Re ; por lo tanto la dependencia de F en U y L no es cuadrática (salvo cuando $f(\text{Re}) = \text{cte.}$).

Arrastre para número de Reynolds muy pequeño: la Ley de Stokes

En el límite $\text{Re} \rightarrow 0$ el efecto de la inercia es despreciable y dominan las fuerzas viscosas. Por lo tanto *en ese límite* el arrastre no puede depender de la densidad del fluido (que da la medida de su inercia). Esto implica que se debe cumplir

$$f_m(\text{Re}) = \frac{\alpha}{\text{Re}}, \quad \alpha = \text{cte.}, \quad (\text{Re} \rightarrow 0) \quad (7.58)$$

y por lo tanto, para $\text{Re} \ll 1$ vale la fórmula aproximada

$$F = \alpha \eta U L \quad (7.59)$$

donde la constante α depende de la forma del cuerpo y de su orientación respecto de la dirección del movimiento. Para el caso de la esfera α se puede calcular teóricamente⁵ porque la geometría esférica es relativamente sencilla. Resulta $\alpha = 3\pi$ y en consecuencia

$$F = 3\pi \eta U L \quad (\text{esfera}) \quad (7.60)$$

La (7.60) se conoce como *Ley de Stokes*.

El significado físico de la Ley de Stokes se puede comprender fácilmente. Si $\text{Re} \ll 1$, la escala típica de las variaciones espaciales de la velocidad es el mismo L ; luego $\partial u / \partial r \approx U / L$ y el esfuerzo tangencial viscoso es del orden de $\eta U / L$. Puesto que el área sobre la cual actúa este esfuerzo es del orden de L^2 , resulta⁶ que $F \approx \eta U L$.

⁵ También existen resultados exactos para otras formas sencillas como elipsoides y cilindros de longitud infinita.

⁶ Naturalmente estos argumentos que permiten comprender el origen de las dependencias de F no son suficientemente precisos como para proporcionar el valor correcto del coeficiente α .

La Ley de Stokes no se puede usar para objetos macroscópicos en caída o lanzados en el aire. En efecto, usando el valor de ν de la Tabla 7.1 resulta $Re = 6.67UL(\text{c.g.s.})$. De modo que si $L = 1\text{ cm}$, ya para $U = 0.15\text{ cm/s}$ resulta $Re = 1$ y la (7.60) no da una buena aproximación para el arrastre.

Arrastre para número de Reynolds muy grande

Cuando $Re \geq 1$ aparecen desviaciones importantes desde la Ley de Stokes: la dependencia de $f_m(Re)$ con la inversa de Re se hace más débil y $f_m(Re)$ tiende a un valor constante para $Re \approx 10^3 - 10^4$. En general, para $Re > 1$ el arrastre es mucho mayor que el que se obtendría extrapolando la Ley de Stokes. Esto se debe a que la mayor variación de la velocidad ocurre sobre distancias mucho menores que L .

En el límite $Re \rightarrow \infty$ el efecto de la inercia domina y las fuerzas viscosas son despreciables. Por lo tanto en ese límite el arrastre debe ser independiente de la viscosidad del fluido. Esto implica que se debe cumplir que

$$f_m(Re) = \beta \quad , \quad \beta = \text{cte.} \quad , \quad (Re \rightarrow \infty) \quad (7.61)$$

y por lo tanto, para $Re \gg 1$ tenemos que

$$F \approx \beta \rho U^2 L^2 \quad (7.62)$$

donde la constante β depende de la forma del cuerpo y de su orientación respecto de la dirección del movimiento.