

6. FLUJOS IDEALES INCOMPRESIBLES E IRROTACIONALES

El potencial de velocidad

El movimiento de los fluidos perfectos (no viscosos) se describe mediante la ecuación de Euler

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{\nabla p}{\rho} \quad (6.1)$$

que ya tratamos en los Capítulos 4 y 5. Este tipo de flujos es muy importante pues en muchas situaciones de interés práctico, los efectos de la viscosidad de los fluidos reales quedan limitados a las regiones del espacio (muchas veces pequeñas) donde tienen lugar fuertes gradientes de la velocidad (*capas límite*, ver el Capítulo 7, o regiones donde el flujo es turbulento), mientras que en el grueso del flujo los efectos de la viscosidad son despreciables y el fluido se puede suponer ideal. De acuerdo con los resultados del Capítulo 5, en las regiones materiales de flujo ideal no se crea ni se destruye vorticidad, de manera que si en un dado instante ésta es nula, sigue siendo nula en todo otro momento.

Una de las propiedades fundamentales de los fluidos invíscidos es que puede haber flujos que son permanentemente irrotacionales, es decir que $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ en todos los puntos del fluido. Si además el flujo es incompresible, el campo de velocidad satisface las condiciones

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad , \quad \nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad (6.2)$$

La irrotacionalidad del campo de velocidad implica que \mathbf{u} deriva de un *potencial de velocidad* ϕ , esto es

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \quad (6.3)$$

y la incompresibilidad implica entonces

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (6.4)$$

Por lo tanto ϕ satisface la ecuación de Laplace, que junto con la (6.3) determina $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Viceversa, la existencia de una función escalar ϕ que satisface la ecuación (6.4) implica la existencia de una función vectorial $\mathbf{u} = \nabla \phi$ que cumple las condiciones (6.2), como se puede verificar fácilmente. Los flujos para los cuales se cumple la (6.3) se denominan *flujos potenciales*. Claramente, la (6.3) implica que las líneas de corriente de un flujo potencial son ortogonales a las superficies equipotenciales, definidas por $\phi = \text{cte.}$.

En los flujos potenciales, la ecuación de movimiento (5.8) adopta la forma (5.13)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \varphi + \frac{p}{\rho} = f(t) \quad (6.5)$$

donde φ indica el potencial de las fuerzas de volumen, como ya vimos en el capítulo anterior. En esta aproximación ϕ , y entonces \mathbf{u} , quedan determinados por una ecuación lineal (la ecuación de Laplace). Sin embargo, de acuerdo con la (6.5) p depende de u en forma no lineal.

La solución de un problema de flujo potencial consiste pues en la determinación de dos magnitudes, ϕ y p , para lo cual disponemos de las dos ecuaciones escalares (6.4) y (6.5). Aún así, el problema es sencillo sólo para flujos estacionarios. Nótese, sin embargo, que si las condiciones de contorno no involucran la presión, la ecuación de Laplace para ϕ se puede resolver sin necesidad de conocer p ; en tal caso, la (6.5) sólo sirve para calcular p una vez determinado ϕ .

Debido a que la ecuación de Laplace es lineal, las combinaciones lineales de soluciones son también soluciones de la misma. Se puede entonces construir el campo de velocidad de un problema de flujo potencial superponiendo soluciones simples ya conocidas, de forma tal de satisfacer las condiciones de contorno correspondientes a la solución buscada. Por otra parte, del mismo modo que en la Electroestática cuando se calcula el potencial eléctrico de una distribución de cargas, podremos escribir el potencial de velocidad de un flujo potencial en forma de un *desarrollo multipolar*. Tal desarrollo corresponde a la suma de los potenciales elementales asociados a distribuciones de fuentes de fluido de complejidad creciente (fuente única, dipolo, cuadrupolo, ... etc.). De esta forma veremos que el campo de velocidad de flujos simples, como el flujo alrededor de un obstáculo esférico o cilíndrico, se puede escribir como una combinación lineal del potencial de velocidad correspondiente a un flujo uniforme y el potencial de velocidad de un dipolo.

Otra técnica para resolver la ecuación de Laplace consiste en buscar soluciones en variables separadas, para lo cual es necesario utilizar coordenadas que respeten las simetrías del problema. Los problemas con simetría cilíndrica llevan a soluciones cuyas partes radiales son funciones de Bessel; en aquellos que tienen simetría esférica intervienen las funciones de Legendre, etc..

Condiciones de contorno para flujos potenciales

La teoría de la ecuación de Laplace establece que la solución está determinada si se conoce ϕ sobre toda una superficie cerrada. Sin embargo, es preferible en el presente contexto imponer condiciones sobre la velocidad. Esto plantea el problema de averiguar qué condición sobre la velocidad es equivalente a asignar ϕ . Evidentemente, por lo general no se podrá asignar \mathbf{u} (es decir, todas sus componentes), pues serían tres condiciones, y no una sola como es asignar ϕ .

Se puede demostrar que el campo \mathbf{u} queda unívocamente determinado si se asigna sólo la *componente normal* de \mathbf{u} sobre el contorno cerrado, es decir, una condición escalar.

En efecto, nótese que

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \quad (6.6)$$

pues $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Entonces, si V es el volumen ocupado por el fluido,

$$\int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV = \int_V \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) dV \quad (6.7)$$

Cuando $\phi \mathbf{u}$ es una función univaluada de la posición, se puede utilizar el teorema de la divergencia para transformar la integral de volumen. En general, el volumen V se encuentra rodeado por fuera por la superficie S_2 , y por dentro por la superficie S_1 , de modo que las normales $-\mathbf{n}_1$ y \mathbf{n}_2 son salientes del volumen (ver Fig. 6.1). Tenemos entonces

$$I = \int_V \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV = - \int_{S_1} \phi_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{S_2} \phi_2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_2 dS \quad (6.8)$$

De aquí podemos deducir lo siguiente:

- (a) si la componente normal de \mathbf{u} es nula en todas las superficies del contorno, entonces $I = 0$, lo cual puede suceder sólo si $\mathbf{u} = 0$ en todo el volumen,
- (b) si la componente normal de \mathbf{u} no es nula en todo el contorno, es fácil mostrar que su conocimiento es suficiente para determinar \mathbf{u} en todo el volumen. En efecto, supongamos que existan dos soluciones diferentes, $\mathbf{u} = \nabla\phi$ y $\mathbf{u}' = \nabla\phi'$, con la misma componente normal en el contorno. La diferencia $\mathbf{u} - \mathbf{u}'$ tiene entonces componente normal nula en el contorno y entonces, por (a), tenemos que $\mathbf{u} - \mathbf{u}' = 0$ en todo el volumen, con lo que queda demostrado que la solución es única.

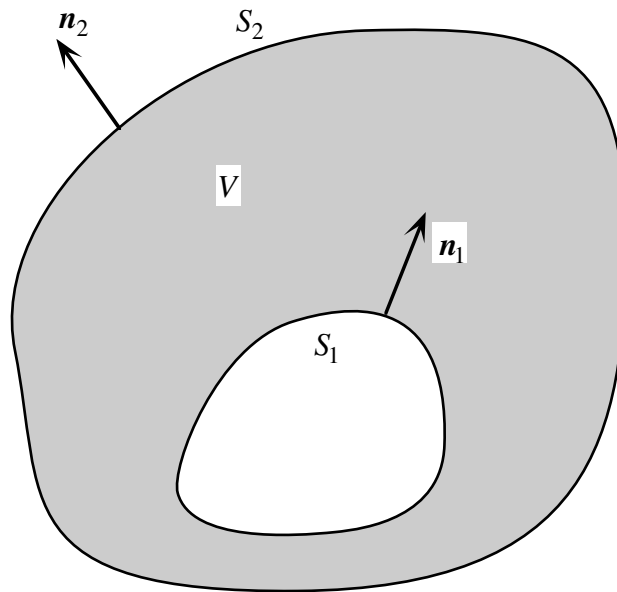


Fig. 6.1. Las superficies S_1 y S_2 limitan el flujo potencial que se desarrolla en el volumen V .

Si se asignaran, además de la componente normal, las dos componentes restantes, el problema quedaría sobredeterminado, y no tendría solución. En otras palabras, si se asigna $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ sobre el contorno S , las dos componentes tangenciales sobre S *no son libres*, sino que quedan unívocamente determinadas al resolver la ecuación de Laplace. Esto, naturalmente, quiere decir que si parte del contorno (como suele ocurrir frecuentemente) es una pared sólida, sobre ésta se tiene $u_n = 0$ en el referencial de la pared. Pero las componentes *tangenciales* de \mathbf{u} sobre la pared, quedan determinadas por las condiciones sobre la totalidad del contorno, de forma que por lo general *no* son nulas.

Es oportuno aquí un breve comentario acerca del hecho que la condición de contorno sobre una pared sólida, esto es

$$u_n = 0 \quad (6.9)$$

en el referencial de la pared, no determina las componentes tangenciales de la velocidad. Del punto de vista matemático esto no trae inconsistencias, pues si los términos viscosos de la ecuación del movimiento son estrictamente nulos, no hay esfuerzos tangenciales. Pero del punto de

vista físico es cuestionable, pues por pequeño que sea el coeficiente de viscosidad, *no es aceptable* una discontinuidad tangencial en la velocidad. Luego son inaceptables condiciones de contorno que dejen libre la componente tangencial de \mathbf{u} tan cerca como se quiera de una pared sólida. Volveremos sobre este punto cuando estudiemos los flujos viscosos.

Flujos incompresibles bidimensionales y la función corriente

Muchos flujos de interés son esencialmente bidimensionales, es decir, una de las tres coordenadas espaciales es ignorable y la correspondiente componente de la velocidad es nula (o una constante). Los *flujos planos* y los flujos con *simetría axial* son ejemplos de esta clase de flujos. Consideremos los flujos planos. Es habitual elegir z como la coordenada ignorable, de modo que se puede suponer que $u_z = 0$ y que el flujo se desarrolla en el plano (x, y) . En estos casos es útil introducir el concepto de la *función corriente*.

Volvamos por un momento al caso general de un flujo incompresible en tres dimensiones. En virtud de la incompresibilidad, podemos siempre introducir una función vectorial \mathbf{A} tal que

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (6.10)$$

El potencial vectorial de velocidad \mathbf{A} , asociado con la condición de incompresibilidad, es análogo al potencial vectorial que se introduce en el Electromagnetismo para describir el campo magnético en virtud de que éste cumple con la condición $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Sin embargo, en general el interés práctico de \mathbf{A} es escaso, dado que estamos sustituyendo el campo de velocidad a determinar por otro campo vectorial, con lo cual no se hace un progreso significativo. Pero en el caso de los flujos planos, sí existe una ventaja, pues el campo de velocidad tiene sólo las componentes u_x y u_y , que además no dependen de z . Por este motivo, la única componente no nula de \mathbf{A} es $A_z \equiv \psi$, y de acuerdo a la (6.10) se cumple que

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6.11)$$

En coordenadas polares (r, θ) tendremos

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (6.12)$$

La función ψ se denomina *función corriente* y representa, como hemos visto, la componente perpendicular al plano del flujo del potencial vectorial \mathbf{A} . Cabe observar que es posible introducir la función corriente para todos los flujos *bidimensionales incompresibles* (sean o no viscosos y sean o no irrotacionales), pues basta que el flujo cumpla la condición $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Por el contrario, el potencial de velocidad sólo se puede introducir para *flujos irrotacionales* (que por lo tanto son necesariamente invíscidos, barotrópicos y gobernados por fuerzas de volumen conservativas), pero no está limitado a los flujos bidimensionales.

Se puede observar asimismo que si el flujo bidimensional incompresible es también irrotacional, es decir, si cumple las condiciones (6.2), la función corriente satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (6.13)$$

al igual que el potencial de velocidad ϕ . Para ver esto basta usar las expresiones (6.11) de las componentes de \mathbf{u} en la condición $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. El hecho que para estos flujos tanto ϕ como ψ satisfacen la ecuación de Laplace permite (como veremos más adelante) definir un único potencial complejo $w = \phi + i\psi$ y aprovechar las poderosas técnicas matemáticas basadas en las propiedades de las funciones analíticas de variable compleja para encontrar las soluciones de esos problemas.

El significado de la función corriente se desprende de dos propiedades que vamos a analizar ahora. En primer lugar, las líneas $\psi = \text{cte.}$ coinciden con las líneas de corriente. Esto se puede ver tomando el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \nabla\psi$ y usando las (6.11):

$$\mathbf{u} \cdot \nabla\psi = u_x \frac{\partial\psi}{\partial x} + u_y \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \quad (6.14)$$

Este resultado implica que las líneas de corriente son ortogonales en todo punto a $\nabla\psi$. Pero por otra parte $\nabla\psi$ es ortogonal en todo punto a las líneas $\psi = \text{cte.}$, con lo cual queda demostrada la propiedad. Cuando, además, el flujo es también potencial, las líneas $\psi = \text{cte.}$ son ortogonales a las líneas equipotenciales $\phi = \text{cte.}$.

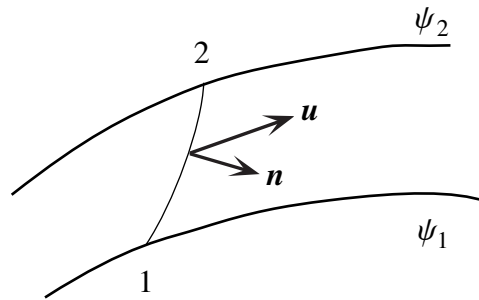


Fig. 6.2. La variación de la función corriente es igual al caudal volumétrico que pasa por el tubo de corriente definido por las líneas de corriente $\psi = \psi_1$ y $\psi = \psi_2$ y de espesor unidad en la dirección z .

En segundo lugar, la cantidad $\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1$ representa el caudal volumétrico que pasa por el tubo de corriente de sección rectangular, comprendido entre las líneas de corriente $\psi = \psi_1$ y $\psi = \psi_2$ y de espesor unidad en la dirección z (ver Fig. 6.2). Para demostrar esta propiedad, calculemos dicho caudal. Resulta

$$Q = \int_1^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dl = \int_1^2 [u_x dy + u_y (-dx)] = \int_1^2 \left[\frac{\partial\psi}{\partial y} dy + \left(-\frac{\partial\psi}{\partial x} \right) (-dx) \right] = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1 \quad (6.15)$$

donde hemos usado las (6.11) y el hecho que si $dl \equiv (dx, dy, 0)$ entonces $\mathbf{n} \equiv (+dy, -dx, 0)$. Se verifica así también que en un flujo incompresible, el caudal volumétrico de un tubo de corriente es constante a lo largo del tubo.

Unicidad del potencial de velocidad y de la función corriente

Consideraremos ahora flujos potenciales incompresibles, estacionarios y planos (o más en general, bidimensionales). Si la región donde se desarrolla el flujo es *simplemente conexa*, hay (como

ya vimos) un *único* campo de velocidad que satisface las condiciones de contorno asignadas (es decir, la componente normal de la velocidad relativa sobre las superficies sólidas que limitan el flujo, y/o el valor de la velocidad al infinito cuando la región en que ocurre el flujo es ilimitada). Se puede demostrar que ese campo de velocidad es aquél que minimiza la energía cinética total, entre aquellos que cumplen la condición de incompresibilidad y las condiciones de contorno del problema. En estos casos el potencial de velocidad se puede definir sin ambigüedades. En efecto, tomemos a un punto O cualquiera en la región R_p del flujo plano irrotacional como referencia. Entonces, el potencial de velocidad en otro punto cualquiera P de R_p se define como

$$\phi(r_P) = \phi(r_O) + \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \quad (6.16)$$

donde la integral se puede calcular sobre cualquier camino que vaya de O hasta P . En efecto, consideremos dos diferentes caminos 1 y 2 que van de O a P , y calculemos la circulación de la velocidad a lo largo de la curva cerrada C que parte de O y va hasta P por el camino 2 y regresa a O por el camino 1 (recorrido en sentido inverso, ver Fig. 6.3a). Tendremos

$$\Gamma_C = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_2 + \int_P^O \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_1 = \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_2 - \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_1 = \int_S \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) dS = 0 \quad (6.17)$$

donde hemos aplicado el Teorema de Stokes para transformar la integral sobre la curva cerrada C en una integral sobre una superficie S que se apoya sobre C y está íntegramente contenida en R_p , donde $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. De la (6.17) resulta que

$$\int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_2 = \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_1 \quad (6.18)$$

y por consiguiente la definición (6.16) del potencial de velocidad está exenta de ambigüedades.

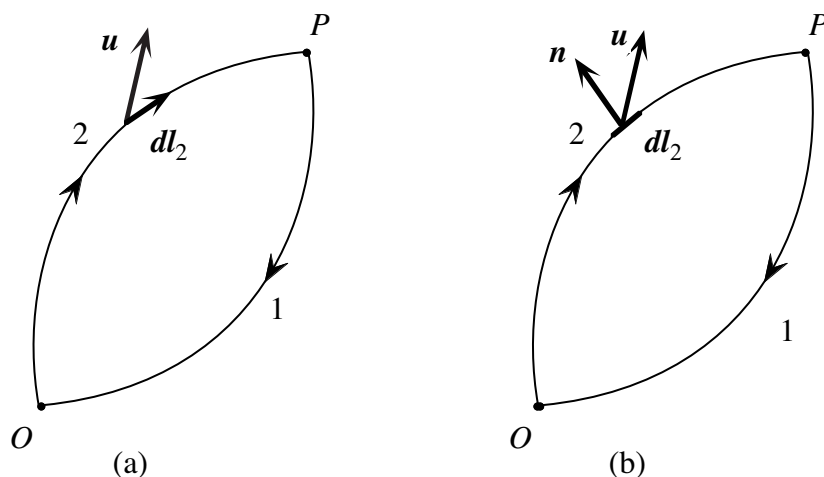


Fig. 6.3. (a) Definición del potencial de velocidad ϕ , (b) definición de la función corriente ψ cuando la región donde se desarrolla el flujo es simplemente conexa.

De modo análogo, cuando la región R_i donde se desarrolla el flujo plano incompresible es simplemente conexa, se puede definir la función corriente ψ sin ambigüedades. En efecto, tomemos

un punto O cualquiera en R_i como referencia. Entonces, la función corriente en otro punto cualquiera P de R_i se define como

$$\psi(\mathbf{r}_P) = \psi(\mathbf{r}_O) + \int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dl \quad (6.19)$$

donde $\mathbf{n} \equiv (+dy, -dx, 0)$ es la normal a $d\mathbf{l} \equiv (dx, dy, 0)$, y la integral del flujo (caudal) se puede calcular a través de cualquier curva que vaya de O hasta P . En efecto, consideremos dos diferentes curvas 1 y 2 que van de O a P , y calculemos el caudal que atraviesa la curva cerrada C que parte de O y va hasta P por el camino 2 y regresa a O por el camino 1 (recorrido en sentido inverso, ver Fig. 6.3b). Tendremos

$$Q_C = \oint_C \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dl = \int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dl_2 + \int_P^O \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dl_1 = \int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dl_2 - \int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dl_1 = \int_S (\nabla \cdot \mathbf{u}) \, dS = 0 \quad (6.20)$$

donde hemos aplicado el Teorema de la divergencia para transformar la integral sobre el contorno C en una integral sobre la superficie S rodeada por C , que está íntegramente contenida en R_i , donde $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. De la (6.20) resulta que

$$\int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dl_2 = \int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dl_1 \quad (6.21)$$

y por consiguiente la definición (6.19) de la función corriente no presenta ambigüedades.

Distinto es el caso en que la región en que se desarrolla el flujo es *múltiplemente conexa*. Esto ocurre cuando hay paredes sólidas una de cuyas dimensiones es infinita (por ejemplo un cilindro de longitud infinita) o cuando las paredes tienen geometría toroidal, o en otros casos más complicados. Para fijar ideas, supongamos tener un cilindro sólido infinito en un flujo plano, cuyo eje es perpendicular al plano del flujo. En este caso, la circulación de la velocidad alrededor de una curva C que rodea al cilindro no tiene porqué ser nula. En efecto, *no podemos* aplicar como antes el Teorema de Stokes

$$\Gamma_C = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) \, dS \quad (6.22)$$

y concluir que Γ_C es nula a partir de que el flujo es irrotacional en R_p , puesto que ahora *no existe* ninguna superficie S que se apoye sobre C y esté *íntegramente contenida* en R_p . Por lo tanto Γ_C puede tener un valor finito cualquiera, y en consecuencia no podemos definir de manera no ambigua el potencial de velocidad ϕ . De modo semejante, no podremos aplicar el teorema de la divergencia como hicimos para deducir la (6.21), pues ahora el caudal Q_C puede tener cualquier valor y por lo tanto no se puede definir la función corriente de manera exenta de ambigüedades.

En general, pueden existir regiones limitadas R_e en las cuales $\nabla \times \mathbf{u} \neq 0$ y/o $\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$. Dichas regiones están afuera, naturalmente, de la región (o regiones) donde el flujo es potencial e incompresible. Está claro que si $\nabla \times \mathbf{u} \neq 0$ en R_e , la circulación de \mathbf{u} a lo largo de una línea cerrada que rodea R_e no es nula, aún cuando fuera de R_e se cumpla $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. Por lo tanto en este caso la integral de línea (6.16) entre O y P no depende sólo de la posición de O y de B , y entonces ϕ no

es univaluada. Del mismo modo si $\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$ en una región limitada, la función corriente ψ no es univaluada.

Para facilitar la discusión de regiones de flujo múltiplemente conexas conviene introducir cierta terminología. Una región plana simplemente conexa R_1 se caracteriza porque toda pareja de puntos O, P de la misma se puede unir mediante curvas *enteramente* contenidas en R_1 y tales que dos cualesquiera de esas curvas forman una curva cerrada *reducible*¹; cuando un par de curvas cumple esta condición, se dice que son *conciliables*.

En una región R_n múltiplemente conexa es todavía posible unir toda pareja de puntos mediante curvas contenidas en la región, pero existen pares de curvas cerradas no reducibles. Por lo tanto dos puntos se pueden unir mediante curvas no conciliables.

El *grado de conectividad* de una región R está determinado por el número máximo ν de *barreras* apoyadas sobre los bordes de R , que se pueden introducir sin dividir R en partes no conexas. Más precisamente, el grado de conectividad n se define como $n = \nu + 1$. En una región simplemente conexa no se puede introducir ninguna barrera sin dividirla en dos partes no conexas, de modo que $\nu = 0$ y entonces $n = 1$. La Fig. 6.4 muestra ejemplos de regiones de varios grados de conectividad. Se ve que cada barrera reduce en una unidad el grado de conectividad.

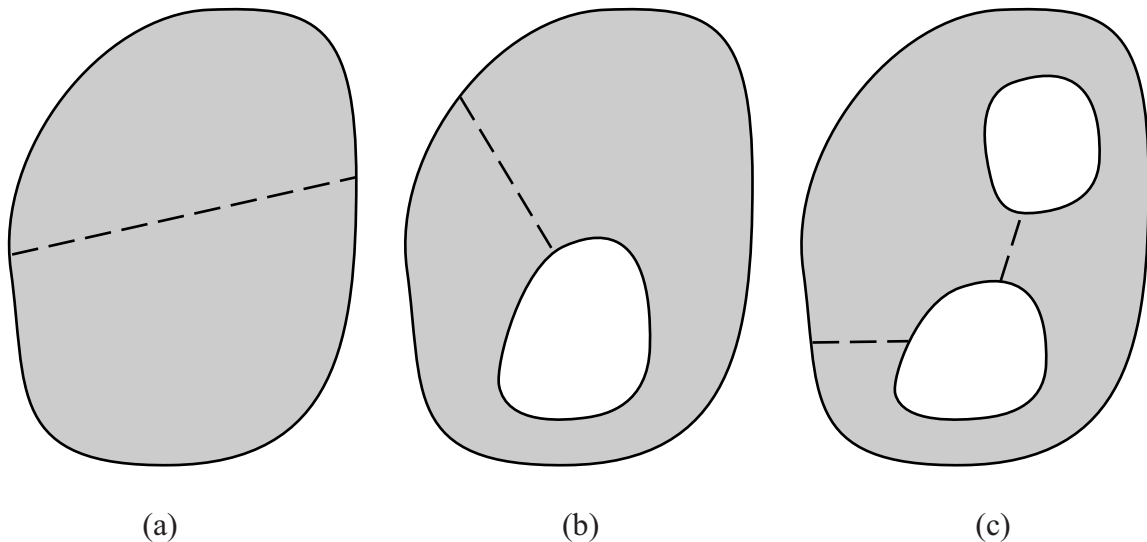


Fig. 6.4. Regiones de diferentes grados de conectividad: (a) en una región simplemente conexa no se puede introducir ninguna barrera sin dividirla en dos partes no conexas, (b) en una región doblemente conexa es posible introducir una barrera, (c) en una región triplemente conexa se pueden introducir dos barreras (hay otras dos maneras de hacerlo, además de la que se indica en la figura).

De ahora en más nos limitaremos al caso de regiones doblemente conexas, que aparecen frecuentemente en fluidodinámica. Sea entonces una región doblemente conexa R_2 donde tenemos un flujo irrotacional e incompresible, y consideremos la curva C que une los puntos O y P de R_2 . Sea ahora una curva C' (ver Fig. 6.5a) que se puede hacer coincidir con C mediante un desplazamiento continuo de sus puntos (o sea, que es conciliable con C). Es evidente que la super-

¹ Una curva cerrada se dice reducible cuando se la puede reducir a un punto mediante una deformación continua en el curso de la cual se mantiene siempre íntegramente dentro de la región.

ficie barrida por C' durante la deformación que la lleva a coincidir con C está íntegramente contenida en R_2 : de lo contrario, C' no sería conciliable con C . Luego

$$\int_0^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_C = \int_0^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_{C'} \quad \text{y} \quad \int_0^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl_C = \int_0^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl_{C'} \quad (6.23)$$

Consideremos ahora la curva C'' , que no es conciliable con C ; en general se tendrá que

$$\int_0^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_C \neq \int_0^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_{C''} \quad \text{y/o} \quad \int_0^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl_C \neq \int_0^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl_{C''} \quad (6.24)$$

Existe sin embargo una familia de curvas conciliables con C'' . Una de ellas es la curva C''' (ver la Fig. 6.5a). Resulta claro que si elegimos cualquier par de curvas de esta familia, la integrales de línea a lo largo de ellas tienen igual valor, aunque dicho valor difiere del de las integrales a lo largo de C y C' .

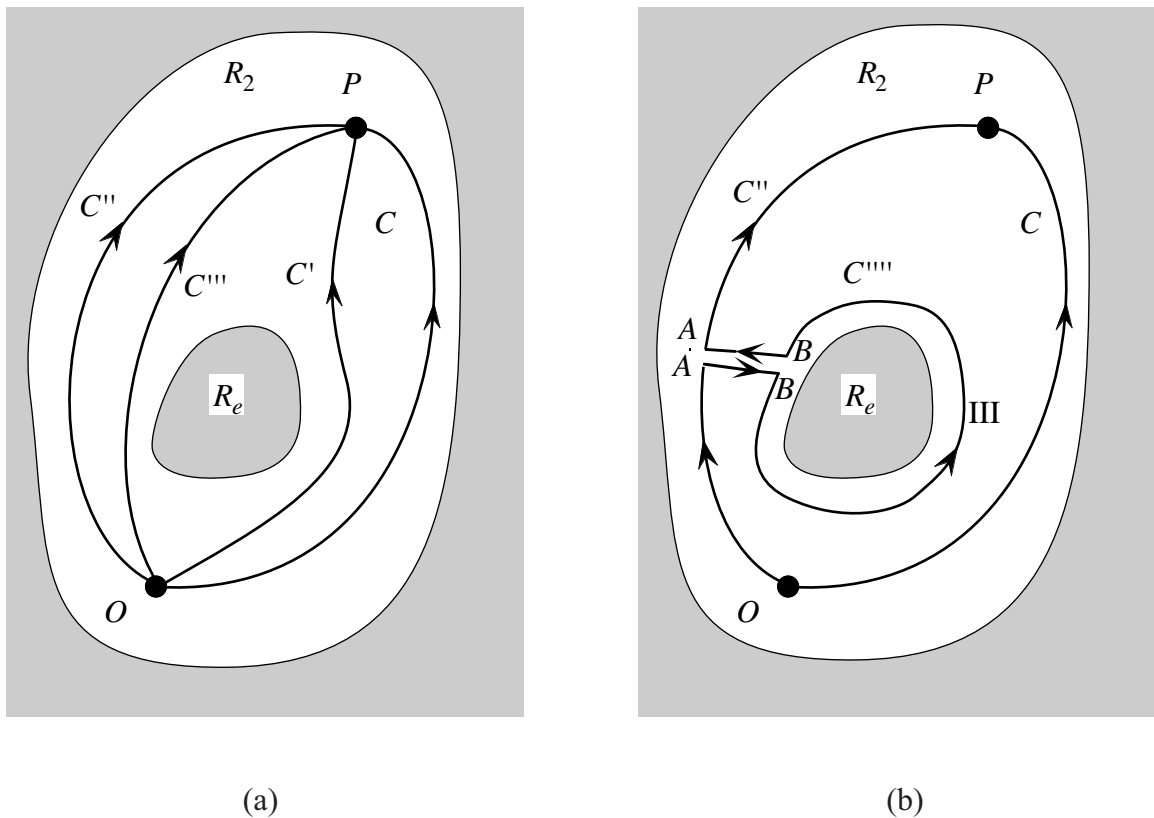


Fig. 6.5. Curvas que unen los puntos O y P en una región doblemente conexa. (a) Las curvas C y C' son conciliables, también son conciliables C'' y C''' , pero ninguna de ellas es conciliable con C (o con C'). (b) La curva C'''' es conciliable con C , y permite calcular la diferencia entre las integrales de línea para las curvas de la familia conciliable con C y para las curvas de la familia conciliable con C'' .

La diferencia entre las integrales de línea para las curvas de la familia conciliable con C y para las curvas de la familia conciliable con C'' se puede calcular considerando la curva C'''' (ver Fig. 6.5b) constituida por el tramo OA de C'' (tramo I), el tramo AB (tramo II), el tramo BB que

rodea la región excluida R_e (tramo III), el tramo BA (tramo II recorrido en sentido inverso) y finalmente, el tramo AP (tramo V). Claramente, C'''' es conciliable con C'' y por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_{C''} &= \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_{C''''} = \int_O^A \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_C + \int_A^B \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_{II} + \oint_{III} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_{III} + \int_B^A \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_{II} + \int_A^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_C \\
 &= \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_C + \oint_{III} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_{III} \\
 &= \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_C + \Gamma_e
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

donde

$$\Gamma_e = \oint_{III} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_{III} \tag{6.26}$$

es la circulación de \mathbf{u} alrededor de una curva cerrada cualquiera que rodea la región excluida R_e (una sola vez).

En general, entonces, dados los puntos O y P , existen infinitas familias de curvas $C^{(n)}$ concilia- bles entre sí, que difieren de C por la cantidad n de vueltas alrededor de R_e . Las correspondientes integrales de línea valen

$$\int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_{C^{(n)}} = \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}_C + n\Gamma_e \tag{6.27}$$

donde n se considera positivo si las vueltas se dan en sentido antihorario (como en la Fig. 6.5b) y negativo si el sentido es horario.

El mismo razonamiento que hicimos para la circulación de \mathbf{u} , se puede repetir para el flujo de \mathbf{u} a través de las curvas C y C'' , y se encuentra que

$$\int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl_{C''} = \int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl_C + Q_e \tag{6.28}$$

donde

$$Q_e = \oint_{III} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl_{III} \tag{6.29}$$

es el flujo de \mathbf{u} a través de una curva cerrada cualquiera que rodea (una sola vez) la región ex- cluida R_e . En general se tendrá

$$\int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl_{C^{(n)}} = \int_O^P \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dl_C + nQ_e \tag{6.30}$$

donde n es positivo si las vueltas se dan en sentido antihorario (como en la Fig. 6.5b) y negativo si el sentido es horario.

Si de acuerdo con la (6.16) definimos al potencial de velocidad como

$$\phi(\mathbf{r}_P) = \phi(\mathbf{r}_O) + \int_O^P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \quad (6.31)$$

y movemos el punto P a lo largo de un camino cerrado, cuando P vuelve a coincidir con O , la diferencia $\phi(\mathbf{r}_P) - \phi(\mathbf{r}_O)$ puede tomar tanto el valor nulo como cualquier múltiplo entero de Γ_e (que se denomina *constante cíclica* del potencial de velocidad). Esto significa que con una región doblemente conexa ϕ no es univaluado, sino que está definido a menos de múltiplos enteros de Γ_e . Notar que $\nabla\phi$ es siempre univaluado, y entonces no hay problemas para el campo de velocidad.

Mediante el artificio de introducir una barrera ideal (Fig. 6.6), de modo tal que al calcular la integral (6.31) lo hagamos siempre por un camino que no cruce la barrera, podemos conseguir que ϕ sea univaluado (pues la introducción de la barrera convierte la región R_2 en simplemente conexa). Pero entonces ϕ es discontinuo a través de la barrera, y sus valores de uno y otro lado de la misma difieren en la constante cíclica Γ_e .

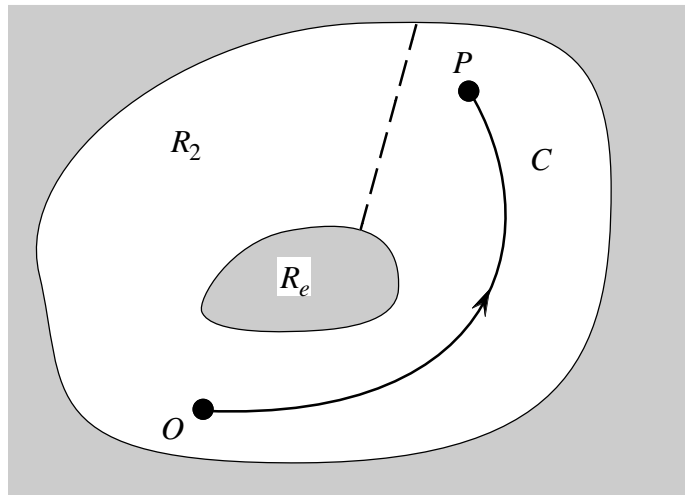


Fig. 6.6. Mediante el artificio de introducir una barrera ideal en una región doblemente conexa podemos conseguir que ϕ sea univaluado. Pero entonces ϕ es discontinuo a través de la barrera, y sus valores de uno y otro lado de la misma difieren en la constante cíclica Γ_e .

Todo lo que se ha dicho para ϕ se puede decir también para ψ , con la diferencia que la constante cíclica correspondiente es el caudal volumétrico Q_e erogado por la región excluida.

En conclusión, para determinar ϕ y ψ en el caso de una región doblemente conexa es preciso asignar las constantes cíclicas Γ_e y Q_e , además de fijar u_n sobre todo el contorno.

Flujos potenciales incompresibles elementales

Describiremos a continuación algunos flujos potenciales incompresibles (provincia 3 de la Fig. 5.6) de particular interés para describir flujos más complejos.

Flujo uniforme

Consideremos un flujo plano uniforme con $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 = \text{cte.}$, cuya dirección forma un ángulo α con el eje x . Es inmediato ver que el potencial de velocidad es

$$\phi = \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r} = x u_0 \cos \alpha + y u_0 \operatorname{sen} \alpha \quad (6.32)$$

y la función corriente viene dada por

$$\psi = \mathbf{u}_0 \times \mathbf{r} = y u_0 \cos \alpha - x u_0 \sin \alpha \quad (6.33)$$

Las equipotenciales y las líneas de corriente son familias de rectas paralelas, perpendiculares entre sí.

Fuente o sumidero puntiforme

Se describe por un campo de velocidad del tipo

$$\mathbf{u} = k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{r'^3}, \quad r' = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \quad (6.34)$$

donde \mathbf{r}_0 es el punto donde se encuentra la fuente (o sumidero), o del cual salen (o entran) las líneas del campo de velocidad². Mediante una traslación de coordenadas que ubique el origen en \mathbf{r}_0 , y la elección de coordenadas esféricas (r, θ, φ) centradas en el nuevo origen, el campo en cuestión tiene como única componente no nula la componente radial, cuyo valor es

$$u_r = \frac{k}{r^2} \quad (6.35)$$

que satisface las condiciones (6.1) excepto en $r = 0$.

El flujo de masa que atraviesa una esfera centrada en el origen es

$$4\pi r^2 \rho u_r = 4\pi k \rho \equiv Q \rho \quad (6.36)$$

La cantidad Q es el flujo *volumétrico* o *caudal* erogado por la fuente (o evacuado por el sumidero) y se denomina también *fuerza* de la fuente (o sumidero). En términos de Q , la (6.35) se escribe como

$$u_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad (6.37)$$

El potencial de velocidad de la fuente (o sumidero) se expresa como

$$\phi = -\frac{k}{r} = -\frac{Q}{4\pi r} \quad (6.38)$$

Fuente o sumidero lineal

En este caso la fuente (o sumidero) está distribuida a lo largo de una recta. Emplearemos un sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) cuyo eje es dicha recta. El flujo es plano y la única componente no nula del campo de velocidad es la componente radial, que vale

$$u_r = \frac{k}{r} \quad (6.39)$$

² El punto \mathbf{r}_0 , naturalmente, está excluido de la región de flujo potencial.

y que cumple con las condiciones (6.1) excepto en $r = 0$ (región excluida). La fuerza de la fuente se define ahora por unidad de longitud y es igual al caudal volumétrico a través de un tronco de cilindro de altura unitaria (y radio arbitrario), de modo que $Q = 2\pi k$. El potencial de velocidad es (recordemos que $u_r = \partial\phi / \partial r$ y $u_\theta = r^{-1}\partial\phi / \partial\theta$)

$$\phi = k \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (6.40)$$

donde r_0 es una constante arbitraria³. La función corriente es

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta \quad (6.41)$$

Por lo tanto las líneas de corriente son rectas radiales y las curvas equipotenciales son circunferencias con centro en el origen (ver Fig. 6.7a).

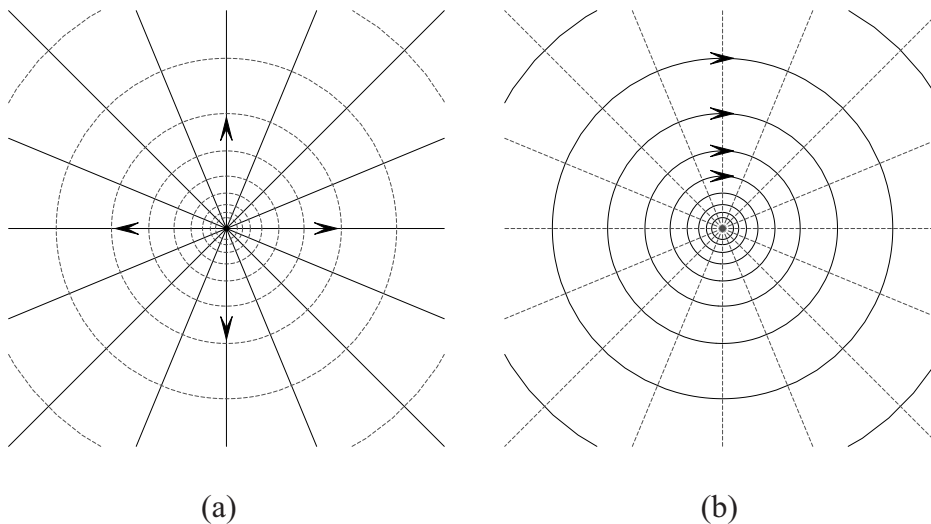


Fig. 6.7. Campos de velocidad de: (a) una fuente lineal, (b) un vórtice lineal. Las líneas de corriente se indican con líneas llenas y las equipotenciales con líneas de trazos. Las diferencias $\Delta\phi$ y $\Delta\psi$ entre equipotenciales y líneas de corriente consecutivas es la misma.

Vórtice lineal

Consideremos un flujo plano cuyo campo de velocidad está dado en un sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) por

$$u_r = 0 \quad , \quad u_\theta = \frac{\kappa}{r} \quad , \quad u_z = 0 \quad (6.42)$$

Este campo se suele denominar *campo de circulación*, puesto que sus líneas de corriente son circunferencias con centro en el eje. Se puede demostrar fácilmente (recurriendo a las expresiones de la divergencia y del gradiente en coordenadas cilíndricas) que cumple con las condiciones (6.1) excepto sobre el eje $r = 0$. Sin embargo, para demostrar que $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ es quizás más intuitivo aplicar el teorema de Stokes a un circuito cerrado formado por dos arcos de circunferen-

³ El potencial de velocidad está definido a menos de una constante arbitraria.

cia que abarcan un ángulo $\Delta\theta$, de radios son r_1 y r_2 , y dos segmentos radiales que unen ambos arcos. La circulación es entonces

$$\Gamma = \Delta\theta[r_2 u_\theta(r_2) - r_1 u_\theta(r_1)] = 0 \quad (6.43)$$

pues los tramos radiales no contribuyen por ser perpendiculares a la velocidad. Resulta claro que toda curva cerrada *que no rodea al eje*, se puede aproximar mediante tramos radiales y arcos de círculo, por lo cual es fácil mostrar que para todas esas curvas se tiene $\Gamma = 0$, lo cual en virtud del Teorema de Stokes implica que $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ en todo el espacio, salvo en el eje mismo. Por otra parte, es sencillo demostrar que la circulación alrededor de toda línea cerrada que rodea (una sola vez) al eje vale

$$\Gamma = 2\pi\kappa \quad (6.44)$$

La cantidad Γ se conoce con el nombre de *fuerza* del vórtice. El potencial de velocidad es

$$\phi = \kappa\theta = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \quad (6.45)$$

La función corriente es

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (6.46)$$

En este caso las líneas de corriente son circunferencias con centro en el origen y las equipotenciales son rectas radiales (Fig. 6.7b). Notar la correspondencia entre este flujo y el de la fuente (o sumidero) lineal: al pasar de uno a otro las funciones ϕ y ψ intercambian sus roles conservando su forma. Las líneas de corriente radiales de la fuente lineal son idénticas a las equipotenciales del vórtice lineal. Las líneas de corriente circulares del vórtice correspondan a las equipotenciales de la fuente lineal.

Dipolo

Consideremos un sumidero S_1 en \mathbf{r}_1 y una fuente S_2 en $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{d}$, cuyos caudales volumétricos tienen el mismo valor absoluto Q (ver Fig. 6.8). Si tomamos el límite $|\mathbf{d}| \rightarrow 0$, manteniendo constante el vector

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d} \quad (6.47)$$

obtenemos lo que se denomina *flujo dipolar* de *momento dipolar* \mathbf{p} .

Calculemos ahora el campo de velocidad del flujo dipolar en el caso plano (dipolo lineal). Para simplificar tomemos origen de coordenadas en S_1 . Entonces, los potenciales de velocidad inducidos por la fuente y el sumidero en un punto P de coordenadas \mathbf{r} son, respectivamente

$$\phi_2 = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|}{r_0} \quad , \quad \phi_1 = -\frac{Q}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{r}|}{r_0} \quad (6.48)$$

El potencial del flujo resultante es

$$\phi = \phi_2 + \phi_1 = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|}{r_0} - \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{r}|}{r_0} = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|}{|\mathbf{r}|} \quad (6.49)$$

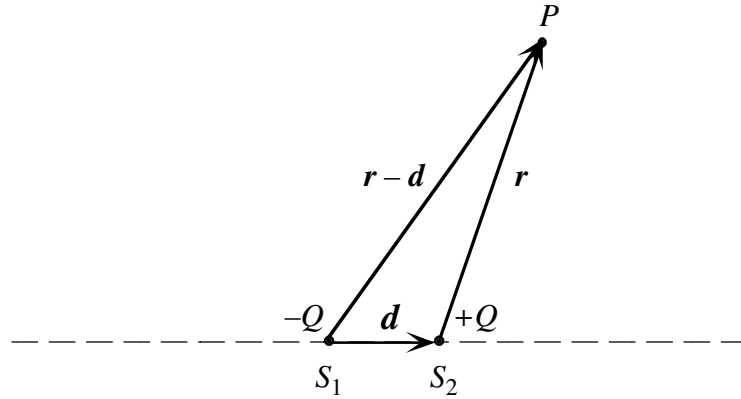


Fig. 6.8. Un sumidero S_1 en \mathbf{r}_1 y una fuente S_2 en $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{d}$, cuyos caudales volumétricos tienen el mismo valor absoluto Q . Si tomamos el límite $|\mathbf{d}| \rightarrow 0$, manteniendo constante el valor de $\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$, se obtiene un dipolo.

Como \mathbf{d} es muy pequeño podemos escribir

$$\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|}{|\mathbf{r}|} = \frac{(r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{d} + d^2)^{1/2}}{r} = 1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} + \dots \quad (6.50)$$

donde con ... indicamos términos de orden superior. Por lo tanto

$$\ln \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|}{|\mathbf{r}|} = \ln \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} \right) + \dots = -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} + \dots \quad (6.51)$$

y en el límite $|\mathbf{d}| \rightarrow 0$ resulta

$$\phi = -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{2\pi r^2} \quad , \quad \mathbf{p} = \lim_{d \rightarrow 0} Q\mathbf{d} \quad (6.52)$$

Usando coordenadas polares en el plano del flujo y tomando \mathbf{p} como origen de θ , resulta

$$\phi = -\frac{p \cos \theta}{2\pi r} \quad (6.53)$$

A partir de ϕ podemos calcular las componentes de la velocidad:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{p \cos \theta}{2\pi r^2} \quad , \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{2\pi r^2} \quad (6.54)$$

A partir de las componentes de la velocidad, usando las relaciones (6.12) o la (6.19) podemos obtener la función corriente:

$$\psi = -\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{p}}{2\pi r^2} = \frac{p \sin \theta}{2\pi r^2} \quad (6.55)$$

Es fácil verificar que las líneas de corriente (Fig. 6.9) son una familia de circunferencias tangentes a \mathbf{p} y que pasan por el origen, y que las equipotenciales son una familia de circunferencias ortogonales a las primeras, que pasan por el origen y son tangentes a la recta $\theta = \pm\pi/2$.

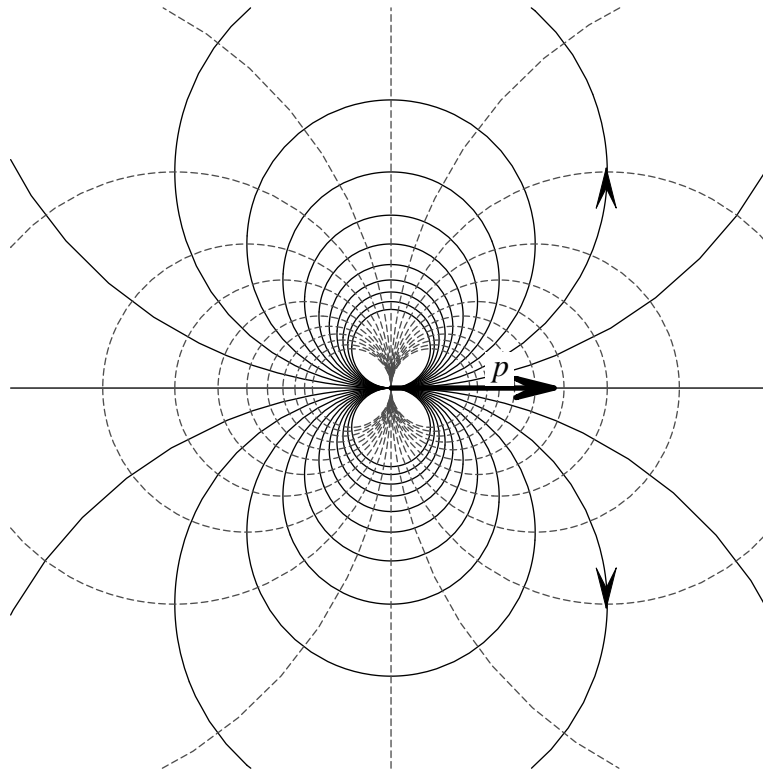


Fig. 6.9. Campo de velocidad de un dipolo lineal. Las líneas de corriente se indican con líneas llenas y las equipotenciales con líneas de trazos.

En el caso tridimensional se puede llevar adelante el cálculo de manera análoga. En coordenadas esféricas (r, θ, φ) con origen en el dipolo y eje polar en la dirección de \mathbf{p} , resulta

$$\phi = -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{4\pi r^3} = -\frac{p \cos \theta}{4\pi r^2} \quad (6.56)$$

Las componentes de la velocidad son

$$u_r = \frac{p \cos \theta}{2\pi r^3}, \quad u_\theta = \frac{p \sin \theta}{2\pi r^3}, \quad u_\varphi = 0 \quad (6.57)$$

Puesto que el flujo dipolar en tres dimensiones tiene simetría axial alrededor del eje del dipolo, se trata en realidad de un flujo bidimensional pues la coordenada φ es ignorable. Por lo tanto el problema se puede tratar en un plano $\varphi = \text{cte.}$. Introduciendo un potencial vectorial de velocidad \mathbf{A} por medio de la (6.10) y usando las expresiones del rotor en coordenadas esféricas, es fácil ver que la única componente no nula de \mathbf{A} es A_φ . Por lo tanto, es posible también en este caso introducir una función corriente $\psi(r, \theta)$, definida por

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (6.58)$$

Usando las expresiones (6.58) de las componentes de la velocidad se obtiene

$$\psi = \frac{p \operatorname{sen}^2 \theta}{4\pi r} \quad (6.59)$$

Las líneas de corriente y las curvas equipotenciales para el flujo dipolar se pueden apreciar en la Fig. 6.10.

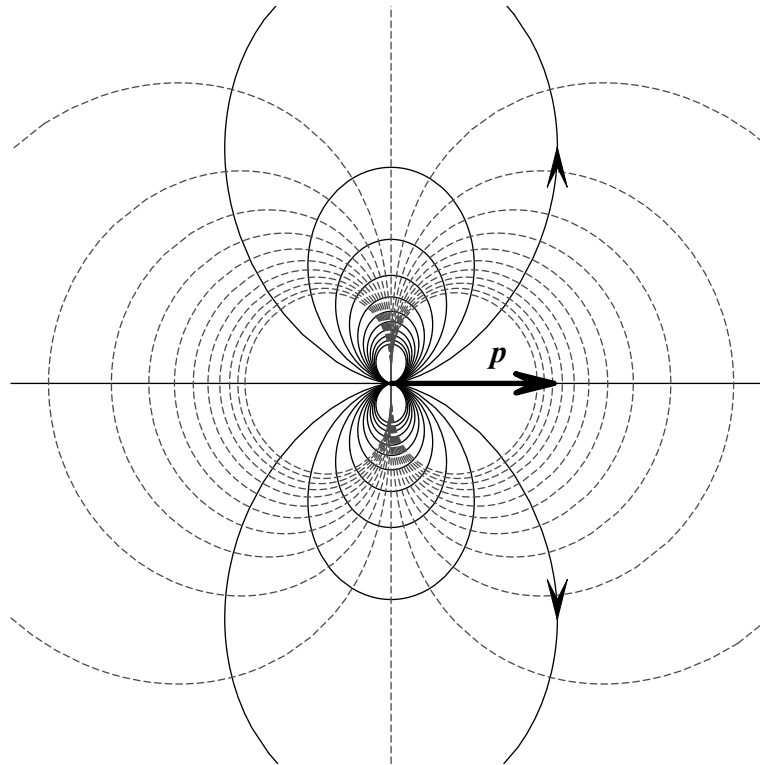


Fig. 6.10. Campo de velocidad de un dipolo. Las líneas de corriente se indican con líneas llenas y las equipotenciales con líneas de trazos.

Flujo potencial en la proximidad del vértice de un diedro

Este tipo de flujo es importante en muchos casos de interés práctico. El problema es el siguiente: se tienen dos superficies sólidas planas que limitan el flujo y forman un ángulo α ; nos interesa conocer el flujo en el entorno del vértice del diedro. Describiremos el flujo en un plano perpendicular a la arista del diedro. La coordenada z , a lo largo de la arista, es ignorable. En el plano del flujo usamos coordenadas polares con origen en el vértice del diedro; el ángulo θ se mide a partir de uno de los planos que conforman el diedro.

La condición de contorno requiere que sobre la superficie del sólido, la componente normal de la velocidad debe ser nula. Esto implica que

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = 0 \quad , \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right|_{\theta=\alpha} = 0 \quad (6.60)$$

Es fácil verificar que la solución de la ecuación de Laplace que satisface estas condiciones es

$$\phi = Ar^\lambda \cos \lambda \theta \quad , \quad \lambda = \pi / \alpha \quad , \quad A = \text{cte.} \quad (6.61)$$

de modo que

$$u_r = \lambda Ar^{\lambda-1} \cos \lambda \theta \quad , \quad u_\theta = -\lambda Ar^{\lambda-1} \operatorname{sen} \lambda \theta \quad (6.62)$$

Si el diedro es menor que plano ($\alpha < \pi$) el flujo es convergente y se tiene $\lambda > 1$. Luego el exponente de r en las (6.62) es *positivo* y la velocidad tiende a cero para $r \rightarrow 0$. El origen es un punto de estancamiento, donde la presión es máxima, de acuerdo con la ecuación de Bernoulli.

Por el contrario, si el diedro es mayor que plano ($\alpha > \pi$) el flujo es divergente y $\lambda < 1$. Luego el exponente de r en las (6.62) es *negativo* y en consecuencia la velocidad diverge para $r \rightarrow 0$. De acuerdo con la ecuación de Bernoulli, la presión se vuelve negativa cerca del origen. Veremos más adelante que estos resultados se deben reconsiderar cuando se toma en cuenta la viscosidad del fluido. Si se toma en cuenta la viscosidad, resulta que la componente tangencial de la velocidad debe tender a cero cuando nos aproximamos a una pared sólida en reposo. Por consiguiente, las soluciones que hemos obtenido aquí valen hasta una distancia suficientemente grande de los planos. Cerca de la pared hay una región de transición donde el flujo no es potencial, denominada *capa límite*, que permite empalmar estas soluciones con la condición de velocidad nula sobre la pared.

Flujo alrededor de un cilindro circular

Como aplicación del principio de superposición para los flujos potenciales, estudiaremos un flujo uniforme con velocidad U , perturbado por la presencia de un cilindro circular de radio R , cuyo eje es perpendicular a la velocidad. Claramente, la coordenada paralela al eje del cilindro es ignorable, de modo que tenemos un problema plano. Analizaremos primero el caso en que no hay circulación de la velocidad alrededor del cilindro y luego estudiaremos el efecto de la presencia de una circulación, lo que nos permitirá poner en evidencia el efecto de *sustentación*.

Cilindro circular sin circulación de la velocidad

Usaremos coordenadas polares (r, θ) en el plano perpendicular al eje del cilindro, con origen en el centro del mismo. El ángulo θ se mide a partir de la dirección de U . Consideremos el potencial de velocidad ϕ que resulta de la superposición del potencial del flujo uniforme

$$\phi_U = Ur \cos \theta \quad (6.63)$$

más el potencial de un dipolo de momento p orientado en la dirección de U :

$$\phi_D = -\frac{p \cos \theta}{2\pi r} \quad (6.64)$$

de modo que

$$\phi = \phi_U + \phi_D = Ur \cos \theta - \frac{p \cos \theta}{2\pi r} = Ur \cos \theta \left(1 - \frac{p}{2\pi Ur^2} \right) \quad (6.65)$$

Esta expresión es razonable como intento para resolver el problema pues al no haber supuesto que dentro del cilindro haya una fuente o sumidero, el dipolo es el primer término no nulo de un desarrollo multipolar de ϕ . Dado que hemos supuesto nula la circulación alrededor del cilindro, la solución es única, y si conseguimos que la ϕ dada por la (6.65) satisfaga las condiciones de

contorno del problema, será entonces la solución buscada. Si así no fuese, habría que recurrir a los términos de orden más elevado del desarrollo multipolar (cuadrupolo, octupolo, ... etc.).

De la (6.65) deducimos la expresión de las componentes de la velocidad:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \left(U + \frac{p}{2\pi r^2} \right) \cos \theta \quad , \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = - \left(U - \frac{p}{2\pi r^2} \right) \text{sen} \theta \quad (6.66)$$

Ahora vamos a intentar elegir p de modo de satisfacer las condiciones de contorno, a saber:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{U} \quad \text{para} \quad r \rightarrow \infty \\ u_r &= 0 \quad \text{en} \quad r = R \end{aligned} \quad (6.67)$$

La primera de estas condiciones se cumple pues el campo de velocidad del dipolo decrece con la distancia como r^{-2} . En cuanto a la segunda condición, se requiere que el momento dipolar tenga el valor

$$p = -2\pi UR^2 \quad (6.68)$$

Sustituyendo (6.68) en (6.65) obtenemos el potencial de velocidad como

$$\phi = Ur \cos \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (6.69)$$

Esta es la solución del problema. Las componentes de la velocidad son

$$u_r = U \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad , \quad u_\theta = -U \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \text{sen} \theta \quad (6.70)$$

Para encontrar la función corriente podemos proceder del mismo modo, superponiendo la función corriente del flujo uniforme (ec. (6.33)) y la del dipolo (ec. (6.59)), o bien, directamente, a partir de las (6.12). En cualquier caso resulta

$$\psi = Ur \text{sen} \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (6.71)$$

En la Fig. (6.11) se muestran las líneas de corriente y las curvas equipotenciales del flujo. Notar la línea de corriente correspondiente a $\psi = 0$, que consiste de dos semirrectas que parten de los puntos de estancamiento E_1 y E_2 , situados en $r = R$, $\theta = \pi, 0$, respectivamente, más la circunferencia del cilindro.

En términos de la velocidad podemos calcular la presión en cada punto del flujo, por medio de la ecuación de Bernoulli (5.18), que en este caso toma la forma

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{U^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho} = \text{cte.} \quad (6.72)$$

donde p_∞ es el valor de la presión del flujo uniforme y ρ la densidad del fluido. De la (6.69) obtenemos

$$p = p_{\infty} + \Delta p = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U^2 \left(1 - \frac{u^2}{U^2} \right) \quad (6.73)$$

Por lo tanto la variación de presión debida a la presencia del cilindro es

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho U^2 \left(1 - \frac{u^2}{U^2} \right) \quad (6.74)$$

La (6.72) y la (6.74) nos dicen que la presión es mayor donde la velocidad es más baja, esto es, donde el espaciado entre las líneas de corriente es mayor. Esta, por supuesto, es una consecuencia general de la ecuación de Bernoulli y vale siempre, no solamente en el caso particular que estamos considerando ahora.

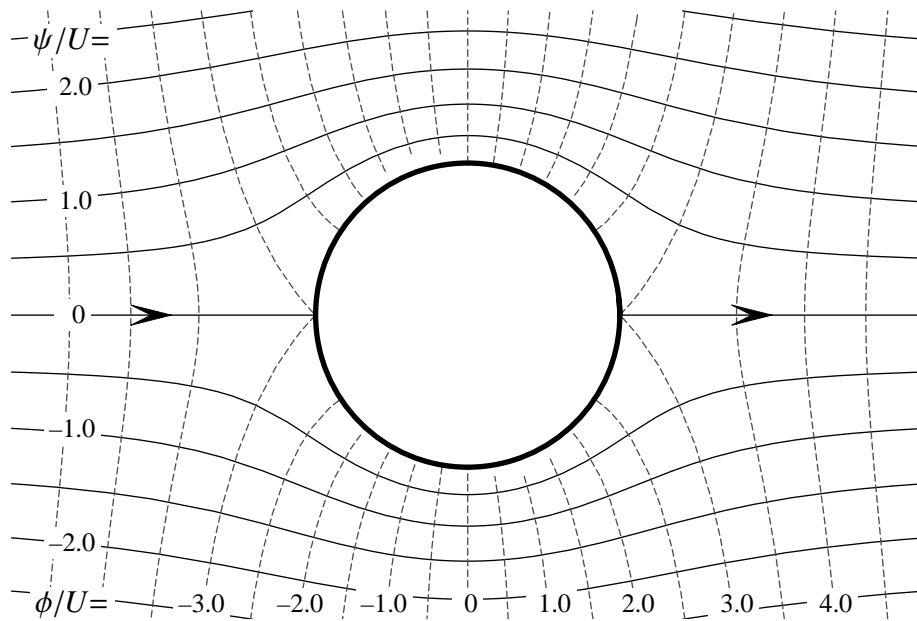


Fig. 6.11. Campo de velocidad para un obstáculo cilíndrico en un flujo uniforme. Las líneas de corriente se indican con líneas llenas y las equipotenciales con líneas de trazos.

Si sustituimos en la (6.74) las expresiones (6.70) de las componentes de la velocidad resulta

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho U^2 \frac{2(r/R)^2 \cos 2\theta - 1}{(r/R)^4} \quad (6.75)$$

El valor máximo de Δp se tiene en los puntos de estancamiento ($\theta = 0, \pi$), donde $\Delta p = \rho U^2 / 2$, y el valor mínimo se tiene en $r = R$, $\theta = \pm \pi / 2$, donde $\Delta p = -3\rho U^2 / 2$. En la Fig. 6.12 se muestran las *isobaras* (curvas de igual presión) de este flujo. Es interesante observar que la distribución de presiones es simétrica respecto de reflexiones en los planos $x = 0$ ($\theta = \pm \pi / 2$) e $y = 0$ ($\theta = \pi, 0$). En particular, la distribución de presión sobre el cilindro tiene esa simetría, lo que nos permite concluir que *la fuerza neta que el fluido ejerce sobre el cilindro es nula*. Este resultado es un ejemplo de una propiedad general de los flujos ideales, que recibe el nombre de *paradoja de D'Alembert*, sobre la cual volveremos más adelante.

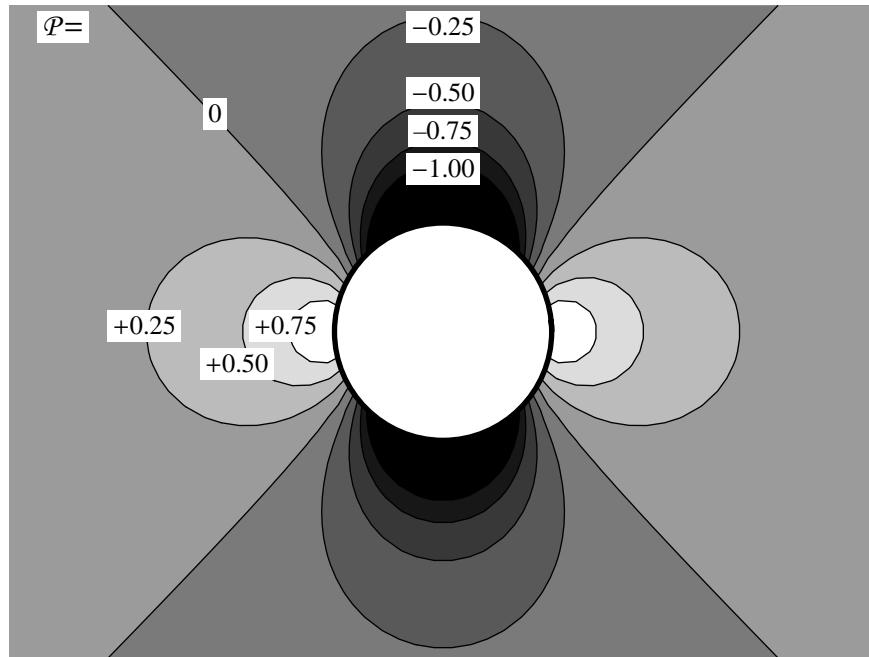


Fig. 6.12. Curvas isobaras para el flujo de la Fig. 6.11. Se han representado las curvas de igual $\mathcal{P} = \Delta p / (\rho U^2 / 2)$. Los grises más oscuros indican menor presión. Se han omitido las isobaras correspondientes a $\mathcal{P} < -1$ pues se amontonan mucho.

Cilindro circular con circulación de la velocidad

En este caso el potencial de velocidad se obtiene simplemente sumando al potencial del caso anterior (ec. (6.69)), el potencial de un vórtice lineal en el origen (ec. (6.45)). En efecto, el campo de velocidad del vórtice es puramente azimutal, y se anula al infinito; por lo tanto cumple las condiciones de contorno (6.67). Puesto que el flujo potencial correspondiente a un dado valor de la circulación alrededor de la región excluida es único, nuestra suma de potenciales de velocidad es entonces la solución del problema:

$$\phi = Ur \cos \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma \theta}{2\pi} \quad (6.76)$$

Las componentes de la velocidad también se pueden obtener por superposición de las soluciones correspondientes al cilindro sin circulación (ec. (6.70)) y al vórtice, de modo que

$$u_r = U \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad , \quad u_\theta = -U \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (6.77)$$

Lo mismo vale para la función corriente

$$\psi = Ur \sin \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{R} \right) \quad (6.78)$$

Veamos si puede haber puntos de estancamiento sobre la superficie del cilindro. De existir, se debe cumplir que

$$u_\theta(R, \theta_e) = -2U \sin \theta_e + \frac{\Gamma}{2\pi R} = 0 \quad (6.79)$$

donde con θ_e indicamos el azimut del punto de estancamiento. De la (6.79) resulta

$$\sin \theta_e = \frac{\Gamma}{4\pi R U} \quad (6.80)$$

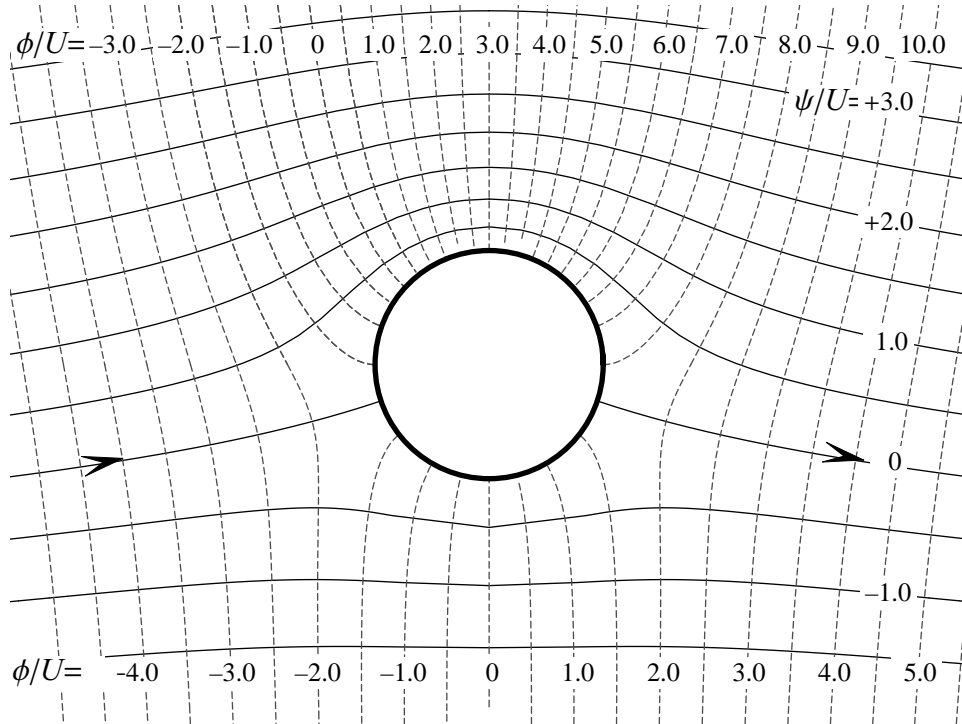


Fig. 6.13. Líneas de corriente y equipotenciales para un cilindro en un flujo uniforme, con circulación no nula. El dibujo corresponde a una circulación con $\Gamma/UR = -6$. El potencial de velocidad no es univaluado, y para asignar un valor a ϕ se supuso una barrera ideal que coincide con la línea de corriente a la derecha del cilindro que corresponde a $\psi = 0$.

Si $0 \leq |\Gamma| \leq 4\pi R|U|$ hay dos puntos (más precisamente, líneas) de estancamiento, E_1 y E_2 , ubicados simétricamente de ambos lados del plano $x = 0$ ($\theta = \pm\pi/2$), cuya posición está definida por los ángulos que satisfacen la (6.80). Cuando $\Gamma = 0$, como en el caso del cilindro sin circulación, E_1 y E_2 ocupan posiciones diametralmente opuestas (Fig. 6.11). A medida que Γ aumenta, E_1 y E_2 se desplazan acercándose entre sí hasta que coinciden cuando $|\Gamma| = 4\pi R|U|$ en el punto $(R, \pi/2)$ o $(R, -\pi/2)$ según si Γ y U tienen igual o diferente signo.

Si $|\Gamma| > 4\pi R|U|$ no hay puntos de estancamiento sobre el cilindro, pero en cambio hay un (único) punto de estancamiento en el seno del flujo, situado sobre la semirrecta $\theta = +\pi/2$ o la semirrecta $\theta = -\pi/2$ según si Γ y U tienen igual o diferente signo, en el punto

$$r = r_e = R \left(\frac{|\Gamma|}{4\pi R|U|} + \sqrt{\left(\frac{|\Gamma|}{4\pi R|U|} \right)^2 - 1} \right) \quad (6.81)$$

En estos casos hay líneas de corriente cerradas que rodean al cilindro, y líneas de corriente abiertas a mayor distancia.

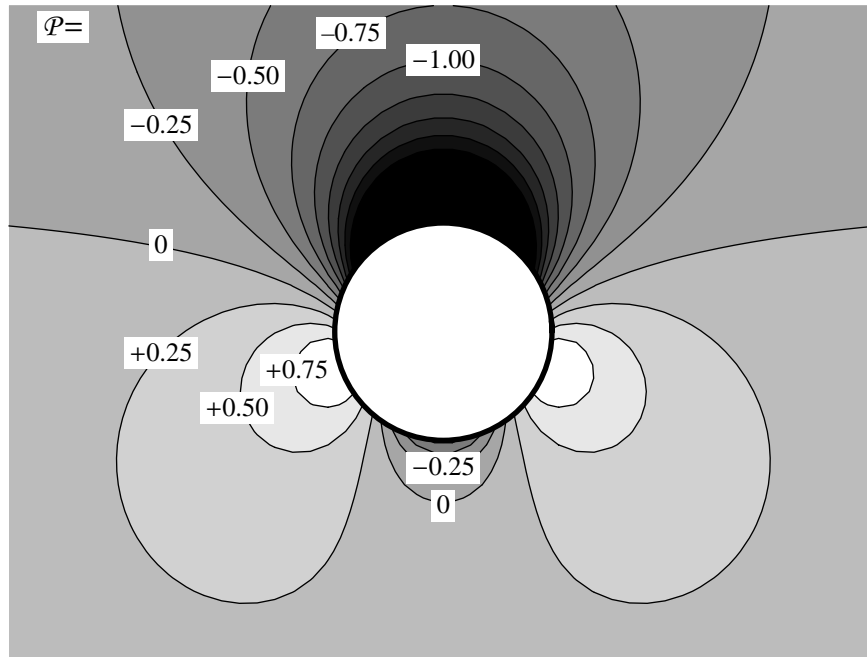


Fig. 6.14. Isobaras correspondientes al flujo de la Fig. 6.12. Se han representado las curvas de igual $\mathcal{P} = \Delta p / (\rho U^2 / 2)$. Los grises más oscuros indican menor presión. Se han omitido las isobaras correspondientes a $\mathcal{P} < -1$ pues se amontonan mucho.

En las Figs. 6.13 y 6.14 se muestran las líneas de corriente, las equipotenciales y las isobaras para un flujo de este tipo (con $\Gamma / UR = -6$) con dos puntos de estancamiento. Se puede ver que la distribución de presiones sigue siendo simétrica respecto del plano $x = 0$ ($\theta = \pm\pi/2$), pero (a diferencia del caso sin circulación) no es simétrica respecto del plano $y = 0$ ($\theta = \pi, 0$). Por lo tanto la componente en la dirección de \mathbf{U} de la fuerza neta que el fluido ejerce sobre el cilindro (denominada *arrastre*) es nula. Pero no es nula la componente ortogonal a \mathbf{U} . Dicha fuerza, denominada *sustentación*, está dirigida hacia arriba en el caso de la figura, pues Δp es (prevalentemente) positiva sobre la parte inferior del cilindro y negativa en la parte superior. Usando la ecuación de Bernoulli (6.74) y las expresiones (6.77) de las componentes de la velocidad, podemos calcular la presión sobre la superficie del cilindro. Resulta:

$$\begin{aligned} p(R, \theta) &= p_\infty + \frac{1}{2} \rho [U^2 - u_\theta(R, \theta)^2] \\ &= p_\infty + \frac{1}{2} \rho U^2 \left[1 - \left(\frac{\Gamma}{2\pi R U} - 2 \sin \theta \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (6.82)$$

La resultante de los esfuerzos debidos a la presión sobre la superficie del cilindro está dada (por unidad de longitud en la dirección z) por

$$\mathbf{F} = - \int_0^{2\pi} p \mathbf{n} R d\theta = -\mathbf{e}_x \int_0^{2\pi} p \cos \theta R d\theta - \mathbf{e}_y \int_0^{2\pi} p \sin \theta R d\theta \quad (6.83)$$

Usando la (6.82) es fácil verificar que $F_x = 0$, como habíamos inferido por la simetría de la distribución de presión. En cuanto a la *sustentación*, es decir la componente F_y , resulta que

$$F_y = -\rho U \Gamma \quad (6.84)$$

La fuerza (6.84) se denomina *fuerza de Magnus*⁴, y nuestro resultado es un caso particular de un resultado general que demostraremos más adelante.

Fuerzas sobre un obstáculo en un flujo potencial

Trataremos ahora el problema de calcular la fuerza que se ejerce sobre un obstáculo de forma arbitraria en un flujo potencial. Supondremos que a distancias grandes del obstáculo el flujo es uniforme con una velocidad U . La solución se basa en el desarrollo multipolar del potencial de velocidad, tomando en cuenta las condiciones de contorno sobre el obstáculo (nulidad de la componente normal de la velocidad, es decir $u_n = 0$ en el referencial en que el obstáculo está en reposo). A distancias grandes del obstáculo bastará con tomar en cuenta la contribución del primer término no nulo del desarrollo multipolar, pues es el que tiene la potencia más baja de $1/r$. Conviene tratar por separado los casos bidimensional y tridimensional.

Caso bidimensional

El cilindro circular y el perfil de un ala de avión de longitud infinita son ejemplos clásicos de este problema. Supondremos que el objeto está en reposo, como sería el caso de estudiar el flujo en un túnel de viento en el cual se impone la velocidad U , uniforme a gran distancia del obstáculo, y perpendicular a la coordenada ignorable z . Vamos a suponer *a priori* que hay una circulación no nula Γ alrededor del obstáculo, sin preocuparnos por ahora de su origen. Eso se verá más adelante cuando estudiemos los efectos de la viscosidad y la capa límite.

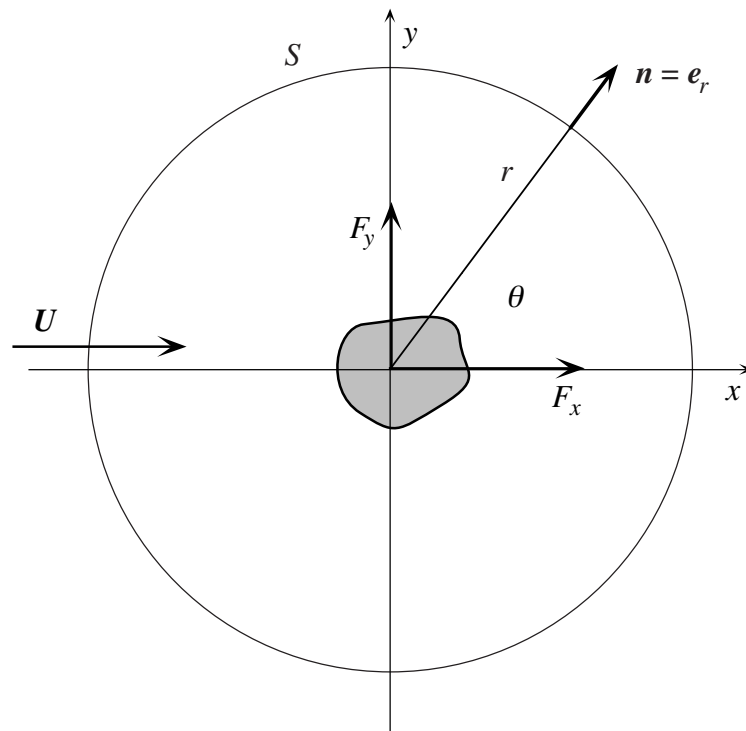


Fig. 6.15. Obstáculo cilíndrico cuya sección tiene forma arbitraria, que está inmerso en un flujo potencial uniforme y que tiene una circulación atrapada.

⁴ Esta fuerza está dirigida hacia arriba en el caso de las figuras 6.12 y 6.13 pues fueron calculadas con Γ negativo.

Tomaremos un sistema de coordenadas cuyo origen está centrado en el obstáculo (Fig. 6.15). Claramente, el potencial de velocidad tiene la forma

$$\phi = \phi_U + \phi_\Gamma + \phi_M \quad (6.85)$$

donde ϕ_U es el potencial del flujo uniforme, ϕ_Γ es el potencial del vórtice que da cuenta de la circulación alrededor del obstáculo, y ϕ_M es un desarrollo multipolar centrado en el obstáculo, cuyos términos están determinados por la condición de contorno $u_n = 0$ sobre la superficie del sólido. En general, no habrá ni fuentes ni sumideros en el sólido, de modo que

$$\phi_M = \phi_A + \dots = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}}{r^2} + \dots \quad (6.86)$$

El primer término del miembro derecho de (6.86) es el potencial de un dipolo de momento $2\pi\mathbf{A}$ (ver la ec. (6.52)) y los puntos suspensivos representan multipolos de orden superior que dan contribuciones a ϕ_M del orden de r^{-2} , r^{-3} , etc.. El vector \mathbf{A} es constante y su valor depende de la forma del objeto y de su orientación con respecto de \mathbf{U} . En el caso del cilindro circular los términos de orden superior son nulos, pues el término dipolar alcanza para obtener la solución exacta. Para un obstáculo de una forma cualquiera, sin embargo, no serán nulos y es necesario calcularlos si se desea conocer con exactitud el campo de velocidad. Veremos, sin embargo, que para calcular la fuerza sobre el obstáculo es suficiente emplear la aproximación dipolar de ϕ_M , es decir ϕ_A . De esta forma tenemos:

$$\phi = Ur \cos \theta + \frac{\Gamma \theta}{2\pi} + \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}}{r^2} \quad (6.87)$$

donde hemos tomado el eje polar en la dirección de \mathbf{U} . La velocidad es entonces

$$\mathbf{u} = \nabla \phi = \left(U \cos \theta - \frac{A_r}{r^2} \right) \mathbf{e}_r + \left(-U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} + \frac{A_\theta}{r^2} \right) \mathbf{e}_\theta \quad (6.88)$$

Vamos a plantear ahora el balance de la cantidad de movimiento del fluido dentro de un volumen cilíndrico⁵ de radio r y altura unidad, con r grande respecto de la dimensión lineal L del obstáculo ($r \gg L$). Usando la ec. (4.7) tendremos que la resultante \mathbf{R} de las fuerzas que actúan sobre el fluido contenido en el cilindro (volumen fijo en el espacio) está dada por

$$\mathbf{R} = \oint_S [\rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + p \mathbf{n}] dS \quad (6.89)$$

donde \mathbf{n} es la normal a la superficie lateral S del cilindro (no hay flujo a través de las caras inferior y superior), hemos ignorado los efectos de la viscosidad, y hemos supuesto que el flujo es estacionario y que no hay fuerzas externas de volumen. La (6.89) es la fuerza que el obstáculo ejerce sobre el fluido. Por lo tanto, la fuerza que el fluido ejerce sobre el obstáculo⁶ es

⁵ De esta forma evitamos el problema de integrar el campo de presión sobre la superficie del obstáculo.

⁶ Para que el obstáculo permanezca inmóvil debemos pensar que mediante algún agente externo (por ejemplo, un soporte) ejercemos sobre el objeto una fuerza que equilibra a \mathbf{F} .

$$\mathbf{F} = -\mathbf{R} = -\oint_S [\rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + p \mathbf{n}] dS = -\int_0^{2\pi} (\rho \mathbf{u} u_r + p \mathbf{e}_r) r d\theta \quad (6.90)$$

La presión está dada por la ecuación de Bernoulli

$$p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho (U^2 - u^2) \quad (6.91)$$

Usando la expresión de la velocidad (6.88) en (6.91) resulta

$$p = p_\infty + \frac{\rho U \Gamma}{2\pi r} \sin \theta + \dots \quad (6.92)$$

donde los puntos suspensivos indican términos del orden de r^{-2} o superior, que no contribuyen a \mathbf{F} en el límite $r \rightarrow \infty$. En cuanto al término $\rho \mathbf{u} u_r$ de la integral (6.90), tenemos que

$$\rho \mathbf{u} u_r = \rho U^2 \cos^2 \theta \mathbf{e}_r + \rho \left(-U^2 \cos \theta \sin \theta + \frac{U \Gamma}{2\pi r} \cos \theta \right) \mathbf{e}_\theta + \dots \quad (6.93)$$

donde los puntos suspensivos indican términos del orden de r^{-2} o superior, que no contribuyen a \mathbf{F} en el límite $r \rightarrow \infty$. Por lo tanto, usando la (6.92) donde omitimos el término $p_\infty \mathbf{e}_r$ (dado que su contribución a \mathbf{F} es nula), y la (6.93), el integrando de la (6.90) queda como

$$\begin{aligned} r(\rho \mathbf{u} u_r + p \mathbf{e}_r) &= \rho r \left(U^2 \cos^2 \theta + \frac{U \Gamma}{2\pi r} \sin \theta \right) \mathbf{e}_r + \rho r \left(-U^2 \cos \theta \sin \theta + \frac{U \Gamma}{2\pi r} \cos \theta \right) \mathbf{e}_\theta \\ &= \rho U^2 r \cos \theta \mathbf{e}_x + \frac{\rho U \Gamma}{2\pi} \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (6.94)$$

a menos de términos del orden de $1/r$. La integral se puede calcular de inmediato y resulta

$$F_x = 0 \quad , \quad F_y = -\rho U \Gamma \quad (6.95)$$

Por lo tanto, *el arrastre es nulo*, un resultado que refleja la ausencia de disipación de energía en los flujos potenciales estacionarios. En cuanto a la sustentación (F_y), depende únicamente de la presencia de una circulación de la velocidad alrededor del obstáculo. La sustentación, también llamada *fuerza de Magnus*, se puede expresar en forma vectorial utilizando un vector circulación $\mathbf{\Gamma}$ paralelo a la dirección z , de modo que

$$\mathbf{\Gamma} = \Gamma \mathbf{e}_z \quad , \quad \mathbf{F} = \rho \mathbf{U} \times \mathbf{\Gamma} \quad (6.96)$$

Para aplicar correctamente la fórmula (6.96) hay que respetar la convención de calcular $\mathbf{\Gamma}$ recorriendo una curva cerrada alrededor del obstáculo en sentido *antihorario* (θ creciente, por lo tanto $\mathbf{\Gamma}$ es negativo en el caso de la Fig. 6.13).

La fuerza de Magnus es responsable de la sustentación del ala de un avión, y la geometría del perfil alar es lo que origina la aparición de la circulación necesaria. Esa fuerza también es la base de los mecanismos de propulsión de embarcaciones y aviones y de la sustentación de los helicópteros mediante hélices. También se la invoca para explicar la trayectoria de una pelota de tenis o de ping-pong cuando se le ha impartido “efecto”, e igualmente en el caso de la pelota de

fútbol cuando se la pateo con “chanfle”. Esto es cierto, pero cabe observar que no puede haber circulación atrapada en el flujo potencial alrededor de un obstáculo *todas* cuyas dimensiones son finitas. En efecto, sea cual fuere el circuito C de integración que se elija, es siempre posible encontrar una superficie S que se apoye sobre C y que esté íntegramente contenida en la región del flujo potencial. Pero la circulación de \mathbf{u} alrededor de C es igual al flujo de la vorticosidad $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ a través de S , y en un flujo potencial, $\boldsymbol{\omega} = 0$. Por consiguiente la circulación de \mathbf{u} alrededor de C resulta idénticamente nula. Lo que produce la circulación en los casos mencionados (pelotas de tenis, ping-pong, fútbol, etc.) es el arrastre del fluido cercano a la superficie del objeto que está en rotación, debido a la viscosidad del fluido⁷. En esos casos se puede también aplicar la ecuación de Bernoulli, suponiendo la continuidad de la presión a través de la capa límite próxima a la superficie del cuerpo, donde el flujo no es potencial. De esta forma se encuentra que la fuerza sobre el cuerpo es perpendicular a \mathbf{U} , al igual que para la geometría cilíndrica.

Obstáculo tridimensional

Consideremos un cuerpo sólido de extensión finita y de forma arbitraria que se desplaza con la velocidad \mathbf{U} en un fluido que se encuentra en reposo lejos del cuerpo (ver Fig. 6.16). Sean V_c el volumen del cuerpo, S_c la superficie que lo limita y L_c la mayor de sus dimensiones lineales. Tomaremos el origen de coordenadas en algún punto dentro del cuerpo.

El potencial de velocidad y el campo de velocidad lejos del cuerpo

Al igual que en el caso bidimensional que acabamos de tratar, podemos plantear un desarrollo multipolar (o sea, en potencias de $1/r$) del potencial de velocidad que determina la velocidad en un punto P del fluido. Claramente, si no hay fuentes o sumideros en nuestro objeto, el primer término no nulo del desarrollo es el término dipolar; éste es también el término dominante para $r \gg L_c$. Recordando la expresión del potencial de velocidad de un dipolo (ec. (6.56)) tendremos entonces

$$\phi = -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{4\pi r^3} + \dots \quad (6.97)$$

donde ... indica términos del orden de $1/r^3$. En la expresión anterior, \mathbf{p} es el momento dipolar y su valor depende de la forma del cuerpo y de su velocidad⁸.

Ahora bien, las dimensiones del momento dipolar son

$$[p] = [u][l^3] \quad (6.98)$$

como surge de la (6.97). Por otra parte, por las relaciones (6.57), \mathbf{p} debe depender linealmente de \mathbf{U} . Por consiguiente, debemos tener

$$p_i = \alpha_{ij} U_j \quad (6.99)$$

donde las α_{ij} son las componentes de un tensor simétrico de rango 2, cuyo valor depende de la geometría del cuerpo y cuyo orden de magnitud está dado por el cubo de la dimensión lineal ca-

⁷ Por este motivo es esencial la rotación de la pelota para producir el “efecto”.

⁸ Debe quedar claro que así debe ser pues, por caso, si la velocidad del cuerpo es nula, \mathbf{p} debe ser nulo.

racterística del cuerpo o, lo que es lo mismo, por el volumen V_c . Por ejemplo, en el caso particular de un objeto esférico de radio R se encuentra fácilmente⁹ que

$$\mathbf{p} = 2\pi R^3 \mathbf{U} \quad \text{o sea} \quad \alpha_{ij} = 2\pi R^3 \delta_{ij} \quad (6.100)$$

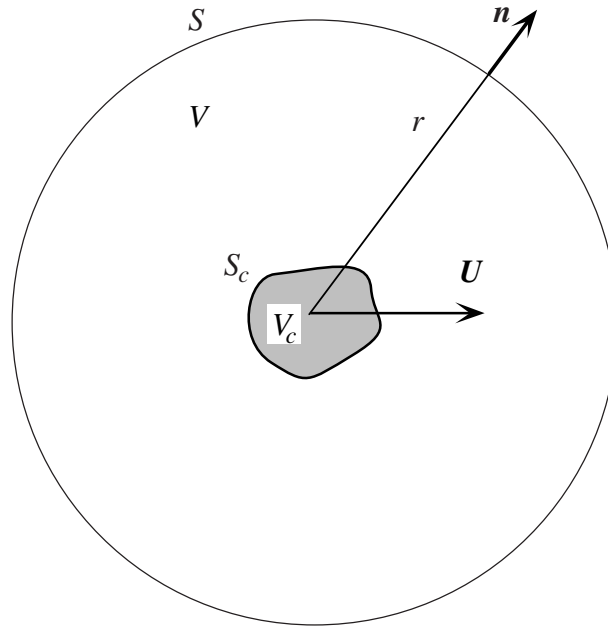


Fig. 6.16. Objeto de extensión finita y de forma arbitraria que se desplaza en un fluido en reposo.

A partir de la (6.97) obtenemos el campo de velocidad¹⁰ como

$$\mathbf{u} = \nabla\phi = -\frac{\mathbf{p}}{4\pi r^3} + 3\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^5} \mathbf{r} + \dots \quad (6.101)$$

donde ... indica términos del orden de r^{-4} .

La energía cinética del fluido

Una característica esencial del problema que estamos considerando es que cuando el objeto en movimiento sufre una aceleración, también se induce una aceleración del fluido incompresible que es desplazado por el cuerpo. Este efecto no se debe a la fricción interna (de origen viscoso) entre parcelas del fluido, sino que es un efecto puramente inercial, de resultados del cual un objeto material que se mueve en el seno de un fluido bajo la acción de una fuerza, se comporta como si tuviera una masa efectiva diferente de su masa real. Nos proponemos aquí investigar este efecto. Vamos a calcular la energía cinética T del fluido contenida en un volumen esférico V muy grande que rodea al objeto. Sea R su radio y S la superficie que lo limita. Usaremos un truco para librarnos de las integrales incómodas sobre la superficie del objeto. Para eso escribimos la identidad

⁹ Se deja como ejercicio para el lector deducir la (6.100).

¹⁰ Con un poco de trabajo, que se deja como ejercicio para el lector.

$$\frac{T}{\rho/2} = \int_{V_{\text{fluido}}} u^2 dV = \int_{V_{\text{fluido}}} U^2 dV + \int_{V_{\text{fluido}}} (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{U}) dV = I_1 + I_2 \quad (6.102)$$

Claramente

$$I_1 = U^2 \left(\frac{4}{3} \pi R^3 - V_c \right) \quad (6.103)$$

Para calcular I_2 usaremos la identidad vectorial

$$\nabla \cdot [f(\mathbf{u} - \mathbf{U})] = (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \cdot \nabla f + f \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{U}) = (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \cdot \nabla f \quad (6.104)$$

pues $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ (porque el flujo es incompresible) y \mathbf{U} es un vector constante. Eligiendo $f = \phi + \mathbf{U} \cdot \mathbf{r}$ resulta

$$\nabla \cdot [(\phi + \mathbf{U} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{u} - \mathbf{U})] = (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \cdot \nabla (\phi + \mathbf{U} \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{U}) \quad (6.105)$$

Sustituyendo la (6.105) en la expresión de I_2 y usando el teorema de la divergencia, obtenemos

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{V_{\text{fluido}}} (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{U}) dV = \int_{V_{\text{fluido}}} \nabla \cdot [(\phi + \mathbf{U} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{u} - \mathbf{U})] dV \\ &= \int_{S_c} (\phi + \mathbf{U} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{u} - \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}_c dS_c + \int_S (\phi + \mathbf{U} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{u} - \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (6.106)$$

El primer término es idénticamente nulo pues sobre la superficie del cuerpo se cumple la condición de contorno $(\mathbf{u} - \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}_c = 0$. Queda entonces

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_S (\phi + \mathbf{U} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{u} - \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_S [\phi \mathbf{u} - \phi \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \mathbf{r})\mathbf{u} - (\mathbf{U} \cdot \mathbf{r})\mathbf{U}] \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_S [-\phi \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \mathbf{r})\mathbf{u} - (\mathbf{U} \cdot \mathbf{r})\mathbf{U}] \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (6.107)$$

pues $\phi \mathbf{u}$ es del orden de r^{-5} y por lo tanto su integral de superficie tiende a cero como R^{-3} cuando $R \rightarrow \infty$.

El paso siguiente es introducir las expresiones (6.97) y (6.101) de ϕ y \mathbf{u} en la (6.107). La integral se debe evaluar sobre la superficie de la esfera, de modo que pondremos $\mathbf{r} = R\mathbf{n}$ en el integrando y $dS = R^2 d\Omega$, donde $d\Omega$ es el diferencial de ángulo sólido. Luego de algunas simplificaciones, queda

$$I_2 = \int_S [3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) - 4\pi R^3 (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})^2] \frac{d\Omega}{4\pi} \quad (6.108)$$

Para evaluar las integrales que han quedado podemos utilizar la siguiente relación vectorial general, que vale para dos vectores constantes \mathbf{A} y \mathbf{B} cualesquiera

$$\int_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) d\Omega = A_i B_j \int_S n_i n_j d\Omega = \frac{4\pi}{3} A_i B_j \delta_{ij} = \frac{4\pi}{3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad (6.109)$$

Resulta entonces

$$I_2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{U} - \frac{4}{3} \pi R^3 U^2 \quad (6.110)$$

Por último, introduciendo la (6.103) y la (6.110) en la (6.102) obtenemos:

$$T = \frac{1}{2} \rho (I_1 + I_2) = \frac{1}{2} \rho (\mathbf{p} \cdot \mathbf{U} - V_c U^2) \quad (6.111)$$

Sustituyendo ahora la expresión (6.99) del momento dipolar resulta finalmente

$$T = \frac{1}{2} \rho (\alpha_{ij} U_i U_j - V_c U^2) \quad (6.112)$$

Por lo tanto, la energía cinética del fluido es una expresión cuadrática de las componentes de la velocidad del cuerpo.

La cantidad de movimiento del fluido

Nos interesa ahora calcular la cantidad de movimiento \mathbf{P} asociada al flujo provocado por el desplazamiento del cuerpo en el seno del fluido. Para este fin, observamos que si la velocidad del cuerpo varía en $\delta \mathbf{U}$, la variación de la energía cinética del fluido es

$$\delta T = \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{U} \quad (6.113)$$

Usando en (6.113) la expresión (6.112) de la energía cinética obtenemos

$$\delta T = \rho (\alpha_{ij} U_j - V_c U_i) \delta U_i = P_i \delta U_i \quad (6.114)$$

de donde resulta

$$P_i = \rho (\alpha_{ij} U_j - V_c U_i) \quad \text{esto es} \quad \mathbf{P} = \rho \mathbf{p} - \rho V_c \mathbf{U} \quad (6.115)$$

Para interpretar los dos términos de \mathbf{P} podemos pensar que hemos reemplazado al cuerpo por el dipolo \mathbf{p} . El campo de velocidad sobre la superficie lejana S es el mismo en ambos casos. El término $\rho \mathbf{p}$ representa entonces la cantidad de movimiento asociada con el dipolo mismo, y $\rho V_c \mathbf{U}$ es la variación de cantidad de movimiento debida a la presencia del cuerpo.

La fuerza sobre el cuerpo y la masa inducida

A partir de la expresión de la cantidad de movimiento podemos calcular la fuerza que el fluido ejerce sobre el cuerpo:

$$f_i = -\frac{dP_i}{dt} = -\rho \left(\alpha_{ij} \frac{dU_j}{dt} - V_c \frac{dU_i}{dt} \right) \quad (6.116)$$

Esta fuerza es nula si el cuerpo se desplaza con velocidad constante. Este resultado recibe el nombre de *paradoja de D'Alembert* (al igual que los casos bidimensionales ya vistos). Esta denominación obedece a razones históricas y no debe producir confusión. En efecto, no hay nada paradójico en la (6.116). De momento que hemos supuesto que el flujo es potencial en todas partes, es lógico que el arrastre sea nulo y que también la sustentación sea nula, a diferencia del caso con geometría plana que consideramos previamente. Esto último se debe a que en el flujo

potencial alrededor de un objeto cuyas tres dimensiones son finitas no puede haber circulación, como ya comentamos antes.

Si ahora el cuerpo sufre una aceleración \dot{U} por la acción de una fuerza F de origen externo¹¹, la ecuación de movimiento se escribirá en la forma

$$F_i + f_i = M\dot{U}_i \quad (6.117)$$

donde M es la masa del cuerpo. Usando la expresión (6.116) podemos escribir la (6.117) en la forma

$$F_i = [(M - \rho V_c)\delta_{ij} + \rho\alpha_{ij}]\dot{U}_j = (M\delta_{ij} + \mathcal{M}_{ij})\dot{U}_j \quad (6.118)$$

En consecuencia, el cuerpo es acelerado como si en lugar de tener la masa M , tuviera una *masa aparente*, que se obtiene de sumar a M el tensor

$$\mathcal{M} = \rho\alpha - \rho V_c \mathbf{I} \quad (6.119)$$

que representa la fuerza de reacción que el fluido acelerado ejerce sobre el cuerpo. El tensor \mathcal{M} se suele llamar tensor de *masa inducida*.

Por ejemplo, en el caso de un cuerpo de forma esférica, usando la (6.100) resulta que \mathcal{M} es isótropo y vale

$$\mathcal{M} = \frac{2}{3}\pi\rho R^3 \quad (6.120)$$

La masa inducida es, en este caso, igual a la mitad de la masa del fluido desplazado por la esfera. Una manifestación del efecto de la masa aparente, que todos hemos observado alguna vez, es el movimiento de las burbujas en un vaso que contiene una gaseosa o un vino espumante. Las burbujas son aceleradas hacia arriba por el empuje de Arquímedes, dado por $\rho_{\text{agua}} Vg$ (V es el volumen de la burbuja). El peso $\rho_{\text{gas}} Vg$ de la burbuja es despreciable frente al empuje, puesto que $\rho_{\text{gas}} / \rho_{\text{agua}} \approx 10^{-3}$. Por lo tanto, si no fuera por la masa inducida, la burbuja sufriría una aceleración del orden de $10^3 g$, cosa que evidentemente no ocurre. Usando la (6.120) resulta en cambio una aceleración de unos $2g$, de acuerdo con la observación.

Algunos comentarios

Nuestro principal resultado es que en un flujo *potencial* alrededor de un cuerpo de extensión *finita* que se mueve con velocidad constante no hay arrastre ni sustentación (paradoja de D'Alembert). Su origen se puede ver con mayor claridad considerando el arrastre. La presencia de arrastre no nulo en el movimiento uniforme de un cuerpo implicaría que, para mantener el movimiento, debería existir una fuerza externa que realice trabajo. Este trabajo, o bien se debería disipar en el fluido, o bien se debería convertir en energía cinética del fluido, la cual a su vez debería fluir al infinito. Pero por definición, no hay disipación de energía en un flujo ideal. Además el campo de velocidad inducido en el fluido por el movimiento del cuerpo disminuye muy rápidamente con la distancia, y entonces no puede haber flujo de energía al infinito.

Es importante tener presente que estos argumentos, y entonces los resultados obtenidos en esta Sección, *dependen crucialmente de que el flujo tenga una extensión infinita*. Si, por ejemplo, el

¹¹ Por ejemplo, una esfera metálica que cae en el seno del fluido por efecto de la gravedad.

fluido tiene una superficie libre, un cuerpo que se mueve con velocidad uniforme paralelamente a la superficie experimenta un *arrastre no nulo*. La aparición de esta fuerza (llamada *arrastre por emisión de ondas*) se debe a que el movimiento del cuerpo produce un sistema de ondas que se propagan sobre la superficie libre, y transportan continuamente energía al infinito (ver el Capítulo 9 donde se comenta este tema).

Asimismo las fórmulas que obtuvimos para la masa inducida dependen de que el flujo tenga extensión infinita, pues para deducirlas evaluamos el campo de velocidad a grandes distancias. Si el fluido ocupa una extensión finita, el valor de la masa inducida es distinto del que hemos calculado, y depende de la geometría de las paredes que limitan el flujo y de la posición del cuerpo respecto de las mismas.

Potencial complejo

En un flujo plano potencial, las componentes de la velocidad están dadas por la (6.3) en términos del potencial de velocidad ϕ , y por la (6.11) en términos de la función corriente ψ , esto es

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6.121)$$

Las segundas ecuaciones de este par son las bien conocidas *condiciones de Cauchy-Riemann* de la teoría de funciones de variable compleja. Por lo tanto, siempre y cuando las derivadas parciales en la (6.121) sean derivables, se puede afirmar que la función

$$w = \phi + i\psi \quad (6.122)$$

es una *función analítica* de la variable compleja¹²

$$z = x + iy \quad (6.123)$$

La función $w(z)$ se denomina *potencial complejo*. Una consecuencia inmediata de las condiciones de Cauchy-Riemann es que tanto ϕ como ψ satisfacen la ecuación de Laplace, como ya habíamos visto antes.

Las componentes de la velocidad u_x y u_y están relacionadas con dw/dz y se calculan convenientemente mediante la fórmula

$$w' = \frac{dw}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u_x - iu_y = u^* \quad (6.124)$$

siendo u la velocidad compleja, y u^* su conjugada. El módulo de la velocidad en todo punto es por lo tanto

$$|u| = \sqrt{uu^*} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = |w'| \quad (6.125)$$

¹² Esto significa que w depende de x e y sólo a través de la combinación (6.123). No confundir la variable compleja z con la coordenada z (que es ignorable en un flujo plano).

Notar que la componente normal de la velocidad debe ser nula sobre un contorno sólido, por lo tanto tal contorno debe coincidir con una línea de corriente, es decir que $\psi = \text{cte.}$ sobre el contorno. Luego sobre ese contorno dw debe ser real.

Representación compleja de algunos flujos planos

Es sencillo encontrar la representación compleja de los flujos planos que ya estudiamos en este Capítulo. A continuación las daremos, dejando por cuenta del lector verificar las fórmulas.

Flujo uniforme

El potencial complejo de un flujo plano uniforme con una velocidad U que forma un ángulo α con el eje x es, en notación polar,

$$w = Ue^{-i\alpha}z \quad (6.126)$$

Fuente o sumidero lineal y vórtice lineal

Su potencial complejo es

$$w = \frac{Q}{2\pi} \ln(z) \quad (6.127)$$

Un vórtice lineal tiene un potencial complejo dado por

$$w = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z) \quad (6.128)$$

Dipolo lineal

El potencial complejo de un dipolo lineal cuyo momento dipolar p forma un ángulo α con el eje x es

$$w = \frac{pe^{i\alpha}}{2\pi} \frac{1}{z} \quad (6.129)$$

De manera semejante se puede encontrar la representación compleja de los demás flujos que hemos estudiado previamente.

Inversamente, toda función analítica w de la variable compleja z está asociada con un posible flujo potencial plano, en el sentido que su parte real se puede interpretar como el potencial de velocidad ϕ de ese flujo, y su parte imaginaria como la función corriente ψ del mismo flujo.

El Teorema de Blasius

Como ejemplo de la aplicación del formalismo del potencial complejo vamos a calcular nuevamente la fuerza que el fluido ejerce sobre un obstáculo sólido sumergido en un flujo uniforme.

Para este fin conviene definir una *fuerza compleja* como

$$F = F_x + iF_y \quad (6.130)$$

La componente dF_x sobre un elemento del contorno $ndl = -e_x dy + e_y dx$ (Fig. 6.17) es, evidentemente,

$$dF_x = -pdy \quad (6.131)$$

el signo $-$ se debe a que si el contorno es recorrido en sentido positivo (antihorario), la fuerza sobre un elemento dy positivo (hacia arriba) es negativa (dirigida hacia la izquierda). Análogamente, $dF_y = p dx$, y luego

$$F = -\oint_C p dy + i \oint_C p dx = i \oint_C p(dx + idy) = i \oint_C p dz \quad (6.132)$$

Por otra parte, la ecuación de Bernoulli establece que

$$p + \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \varphi = K = \text{cte.} \quad (6.133)$$

donde φ es el potencial de la fuerza de volumen. Se puede mostrar fácilmente que si la fuerza de volumen es la gravedad, el efecto de tomar en cuenta φ es simplemente el de agregar a F el empuje de Arquímedes. Por lo tanto omitiremos el término $\rho \varphi$ en la ecuación de Bernoulli, lo que equivale a considerar en el cálculo de la fuerza sólo aquellas variaciones de presión asociadas con variaciones en el campo de velocidad, y no aquellas asociadas con las variaciones de la presión hidrostática. Luego, omitiendo φ , reemplazamos la expresión de p que se obtiene de la (6.133) en la 6.132), y queda,

$$F = -i \frac{\rho}{2} \oint_C u^2 dz \quad \text{o sea} \quad F^* = i \frac{\rho}{2} \oint_C u^2 dz^* \quad (6.134)$$

pues el término constante K da lugar a una integral nula. Esta expresión se puede escribir como

$$F^* = i \frac{\rho}{2} \oint_C u^2 dz^* = i \frac{\rho}{2} \oint_C u u^* dz^* = i \frac{\rho}{2} \oint_C w' w'^* dz^* \quad (6.135)$$

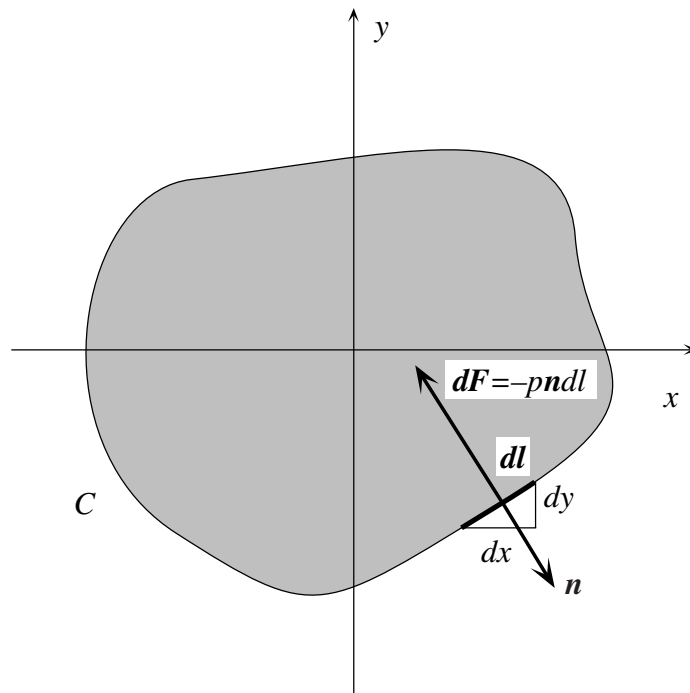


Fig. 6.17. Fuerza sobre un sólido en un flujo plano uniforme.

Además, como C es el contorno del sólido, debe coincidir con una línea de corriente. Luego, sobre el contorno, $dw = dw^*$ y entonces

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^* dz^* = \left(\frac{dw}{dz}\right) dz \quad (6.136)$$

con lo cual obtenemos

$$F^* = i \frac{\rho}{2} \oint_C w'^2 dz \quad (6.137)$$

El interés de esta fórmula radica en que w' es una función analítica, y en consecuencia se puede recurrir al método de los residuos para el cálculo de la integral, en la forma,

$$\oint_C w'^2 dz = 2\pi i \sum_k R_k \quad (6.138)$$

donde R_k es el residuo del polo k -ésimo de w'^2 encerrado por el contorno C . Recordemos que para una función analítica genérica $g(z)$, cada residuo se calcula mediante la fórmula

$$R_k = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m g(z)] \quad (6.139)$$

siendo m la multiplicidad del polo ubicado en $z = z_0$.

Se debe señalar que la función w' se debe definir en la región interior a C como la prolongación analítica de la función w' , que está definida en la región exterior a C . En realidad, la expresión de la suma de los residuos se debe interpretar como una expresión matemática conveniente para el cálculo de la integral, pues w tiene significado de potencial complejo sólo fuera de C , dado que dentro de C no hay flujo.

Introduciendo la (6.138) en la (6.137) obtenemos

$$F^* = -\rho\pi \sum_k R_k \quad (6.140)$$

Los resultados expresados en las fórmulas (6.137) y (6.140) se conocen como *Teorema de Blasius*.

El teorema del círculo y la fuerza sobre un cilindro en un flujo asintóticamente uniforme

Este problema ya ha sido estudiado, pero lo vamos a volver a analizar por medio del presente formalismo, utilizando una técnica denominada *método de las imágenes*.

Para poder aplicar la fórmula de Blasius hace falta conocer el potencial complejo adecuado para el caso. Para eso recurriremos a un interesante teorema, denominado *Teorema del Círculo*, o de *Milne-Thomson*. Este teorema establece que si $f(z)$ es el potencial complejo de un flujo con contornos al infinito, cuyos puntos singulares están fuera del círculo $|z| < R$, entonces el potencial complejo $w(z)$ de un flujo con el mismo comportamiento asintótico y los mismos puntos singulares, pero que tiene en su seno un cilindro sólido de radio R centrado en el origen es:

$$w(z) = f(z) + f^*(R^2/z) \quad (6.141)$$

donde $f^*(R^2/z)$ se obtiene calculando primero f^* , y luego reemplazando z^* por R^2/z .

Para demostrar el teorema basta verificar que: (1) $w(z)$ tiene las mismas singularidades que $f(z)$ para $|z| > R$; y (2) que el contorno del cilindro es una línea de corriente, o sea que $dw = dw^*$ para $|z| = R$.

(1) Cuando $|z| > R$, se tiene que $|R^2/z| < R$; entonces, el módulo del argumento de $f^*(R^2/z)$ es menor que R , y corresponde a puntos interiores al círculo. Como f no tiene singularidades allí, tampoco las tiene f^* . Luego el término $f^*(R^2/z)$ no incorpora nuevas singularidades, y $w(z)$ tiene las mismas singularidades que $f(z)$ para $|z| > R$.

(2) En el contorno del círculo $|z| = R$ tenemos $z = Re^{i\theta}$ y entonces

$$w(z = Re^{i\theta}) = f(Re^{i\theta}) + f^*(Re^{-i\theta}) = f(z) + f^*(z^*) = f(z) + [f(z)]^* \quad (6.142)$$

Por lo tanto, $w(z)$ es real, de modo que $\psi = 0 = \text{cte.}$ sobre el contorno del cilindro lo cual muestra que dicho contorno es efectivamente una línea de corriente.

Aplicaremos ahora el teorema del círculo al caso de un cilindro inmerso en un flujo uniforme con el cuya velocidad asintótica U es paralela al eje x . Entonces $f(z) = Uz$ y $[f(z)]^* = Uz^*$; por lo tanto obtenemos

$$w(z) = Uz + UR^2/z \quad (6.143)$$

Nótese que este flujo es equivalente al que se obtiene superponiendo al flujo uniforme el flujo de un dipolo centrado en el origen, cuyo momento tiene módulo $p = 2\pi RU$ y que está orientado en un ángulo igual a $-\pi$. Se dice que el dipolo es la *imagen* del flujo uniforme respecto del cilindro¹³.

Para aplicar el Teorema de Blasius, debemos hallar los polos de w'^2 . De la (6.143) obtenemos

$$w'^2 = U^2(1 - R^2/z^2)^2 \quad (6.144)$$

que es una función con un único polo de multiplicidad $m = 4$ situado dentro del círculo en $z = 0$. Utilizando la (6.139) es fácil verificar que el correspondiente residuo es *nulo*. Por lo tanto el fluido no ejerce ninguna fuerza sobre el cilindro, como ya habíamos encontrado antes

Si hay circulación atrapada alrededor del cilindro, hay que superponer al potencial complejo (6.143) el término que corresponde a una circulación alrededor del origen, de modo que se tiene

$$w(z) = Uz + U\frac{R^2}{z} - i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln(z/R) \quad (6.145)$$

y entonces

$$w'^2 = \left(U - U\frac{R^2}{z^2} - i\frac{\Gamma}{2\pi z} \right)^2 \quad (6.146)$$

Nuevamente, w'^2 tiene un único polo de multiplicidad $m = 4$ en $z = 0$. Utilizando la (6.139) se encuentra ahora un residuo no nulo, dado por

¹³ Es fácil verificar que tomando la parte real e imaginaria de w se obtienen las expresiones (6.69) y (6.71).

$$R = -i \frac{U\Gamma}{\pi} \quad (6.147)$$

Por lo tanto el Teorema de Blasius nos permite obtener

$$F^{*} = F_x - iF_y = i\rho U\Gamma \quad (6.148)$$

lo que coincide con nuestro resultado anterior.

Transformaciones conformes

De la teoría de las funciones analíticas se sabe cómo se transforma una función en otra al modificarse, de acuerdo con ciertas normas, el contorno sobre el cual se asigna la condición que determina la función. Estas transformaciones se denominan *conformes*, y permiten, una vez determinado el potencial complejo w para un contorno sencillo (p. ej. formado por tramos rectos o circulares), obtener el potencial complejo para otras configuraciones cuyos contornos se obtienen transformando el contorno simple original.

En estas notas nos limitaremos a presentar las ideas básicas, pero por brevedad no vamos a desarrollar los detalles, que se pueden encontrar en muchos textos. Cuando sea necesario mencionaremos los resultados sin demostración.

Vamos a explicar ahora la idea fundamental. Sea $w(z) = \phi + i\psi$ el potencial complejo de un flujo potencial bidimensional en el plano z . Supongamos ahora que elegimos una cierta función analítica de z ,

$$Z = f(z) \quad (6.149)$$

cuya inversa

$$z = F(Z) \quad (6.150)$$

es una función analítica de Z . Entonces,

$$W(Z) = w(F(Z)) \quad (6.151)$$

es también una función analítica de Z . Pongamos ahora

$$Z = X + iY \quad (6.152)$$

y separemos las partes real e imaginaria de W :

$$W(Z) = \Phi(X, Y) + i\Psi(X, Y) \quad (6.153)$$

Puesto que W es una función analítica de Z , Φ y Ψ satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, y en consecuencia las dos funciones

$$U_X = \frac{\partial \Phi}{\partial X} = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad U_Y = \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (6.154)$$

representan las componentes de la velocidad de un flujo potencial en el plano Z .

Además, puesto que por la (6.151) $W(Z)$ y $w(z)$ tienen el mismo valor en puntos correspondientes de los dos planos (esto es, puntos relacionados por las ecs. (6.149) y (6.150), ver Fig. 6.17), resulta que Ψ y ψ son iguales en puntos correspondientes. Por lo tanto, las líneas de corriente del flujo en el plano z se transforman en las líneas de corriente del flujo en el plano Z . En particular, el contorno de un sólido en el plano z , que necesariamente debe coincidir con una línea de corriente, queda transformado en una línea de corriente en el plano Z , que se puede considerar como el contorno de un sólido para el flujo en el plano Z . Esta es la primera idea básica.

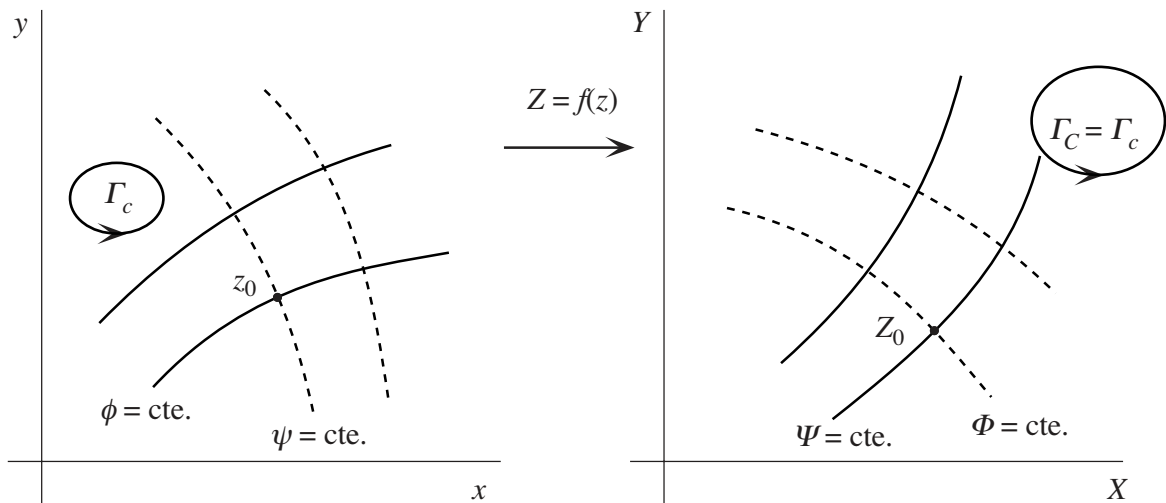


Fig. 6.18. Transformación conforme.

La segunda cuestión se relaciona con la circulación alrededor de un circuito cerrado. Evidentemente, Φ y ϕ son iguales en puntos correspondientes de los dos planos. Por lo tanto si recorremos un circuito cerrado c en el plano z , y obtenemos un cambio de ϕ , está claro que si en el plano Z recorremos el circuito cerrado C , transformado de c , el cambio de Φ será igual al cambio de ϕ . Luego las circulaciones de \mathbf{u} alrededor de c , y de \mathbf{U} alrededor de C son iguales.

Un tercer asunto al que debemos prestar atención es lo que sucede con el flujo al infinito. Claramente, de la (6.151) resulta

$$\frac{dW}{dZ} = \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dZ} = \frac{dw}{dz} \frac{1}{f'(z)} \quad (6.155)$$

de modo que

$$U_X - iU_Y = \frac{u_x - iu_y}{f'(z)} \quad (6.156)$$

Por lo tanto si queremos transformar un flujo asintóticamente uniforme alrededor de un objeto en un flujo asintóticamente uniforme alrededor de otro objeto, tenemos que elegir $f(z)$ tal que

$$f'(z) \rightarrow 1 \quad \text{cuando} \quad |z| \rightarrow \infty \quad (6.157)$$

Por último, corresponde mencionar una propiedad local de la transformación (6.149), que es la razón por la cual se la denomina *conforme*. Sean z_0 y Z_0 dos puntos correspondientes de los planos z y Z , y sea $f^{(n)}(z_0)$ la primera derivada no nula de $f(z)$ en z_0 . Normalmente tendremos

$n = 1$, pero habrá casos de interés en los que $f'(z_0) = 0$ pero $f''(z_0) \neq 0$, en cuyo caso $n = 2$, etc.. Sea ahora δz un pequeño segmento en el plano z , apoyado en z_0 , y sea δZ el correspondiente segmento del plano Z , apoyado en Z_0 . Desarrollando $f(z)$ en serie de Taylor resulta

$$\delta Z = \frac{\delta z^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + O(\delta z^{n+1}) \quad (6.158)$$

Por lo tanto, hasta el orden más significativo, tendremos

$$\arg(\delta Z) = n \arg(\delta z) + \arg[f^{(n)}(z_0)] \quad (6.159)$$

Entonces, si δz_1 y δz_2 son dos segmentos del plano z que se originan en z_0 , y δZ_1 , δZ_2 son los correspondientes segmentos del plano Z , resulta que

$$\arg(\delta Z_2) - \arg(\delta Z_1) = n[\arg(\delta z_2) - \arg(\delta z_1)] \quad (6.160)$$

Por lo tanto cuando dos pequeños segmentos que salen de un punto del plano z se transforman en sus correspondientes del plano Z , el ángulo entre ellos se multiplica por el factor n . Generalmente $n = 1$, y la transformación preserva los ángulos. Luego la forma de una pequeña figura del plano z se conserva de resultas de la transformación (6.149), que por eso se denomina *conforme*.

La teoría clásica de los perfiles alares

De lo dicho anteriormente se desprende que gracias a las transformaciones conformes podemos obtener, a partir de un flujo potencial conocido, las características de otro flujo potencial de interés, que se obtiene del primero aplicando una transformación elegida convenientemente. De esa forma se puede encontrar, a partir del problema del cilindro con circulación, que ya hemos resuelto, la solución del problema del flujo potencial alrededor de un perfil alar. En la Fig. 6.19 el lector puede encontrar la aclaración de la terminología empleada en esta sección.

A continuación daremos un esbozo de los aspectos más importantes de la teoría.

En este contexto es importante la *transformación de Joukowski*

$$Z = z + \frac{c^2}{z}, \quad c = \text{cte.} \quad (6.161)$$

que permite transformar el círculo $z = a \exp(i\theta)$ en una elipse cuyos semiejes valen

$$a + \frac{c^2}{a}, \quad a - \frac{c^2}{a} \quad (6.162)$$

En el caso particular $c = a$, la (6.161) transforma el círculo en una placa plana de ancho $4a$. Si aplicamos la transformación (6.161) a un círculo del plano z que pasa por $z = a$ pero que encierra a $z = -a$, por ejemplo, el círculo

$$z = (a + \lambda)e^{i\gamma} - \lambda \quad \text{con} \quad |\lambda| < a \quad (6.163)$$

obtenemos un perfil alar con un borde de ataque redondeado y un borde de fuga filoso. El perfil es simétrico si el parámetro λ es real, y tiene comba si $\text{Im}(\lambda) \neq 0$ (Fig. 6.20).

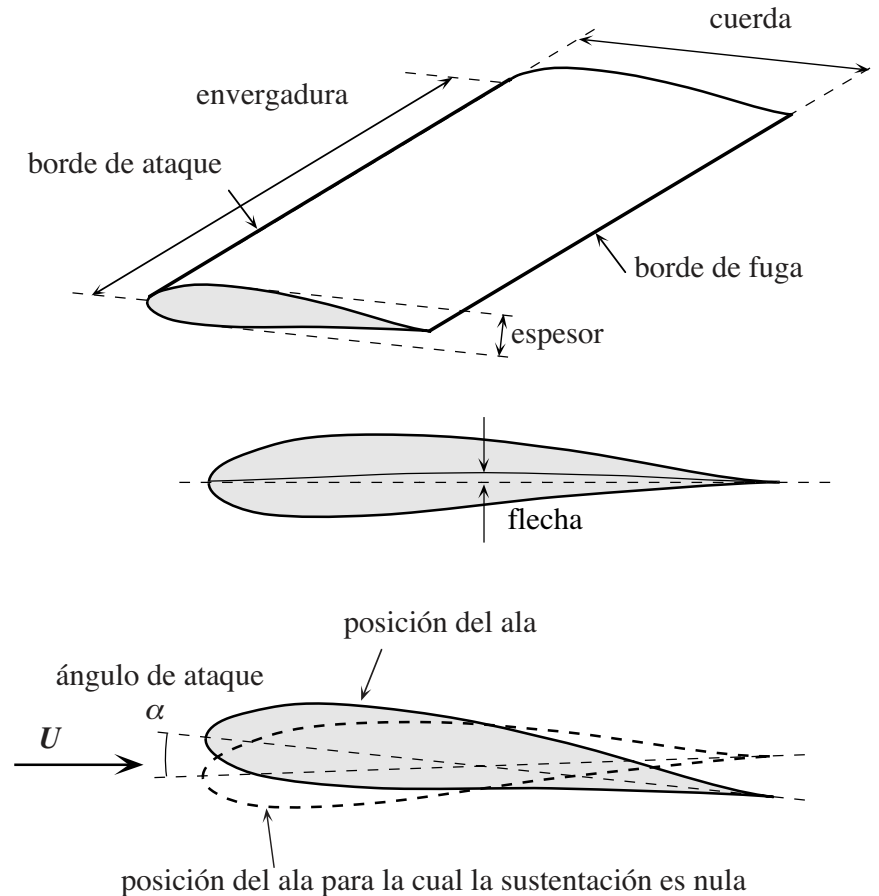


Fig. 6.19. Terminología aeronáutica.

En general, el flujo potencial alrededor de perfiles de este tipo tiene una singularidad en el borde de fuga, pues vimos que el flujo en un diedro divergente es singular, y la velocidad tiende al infinito hacia el vértice del diedro (ec. (6.61)). Sin embargo, *la singularidad se puede eliminar si se elige adecuadamente el valor de la circulación alrededor del perfil*. Para cada valor del ángulo de ataque¹⁴ α existe un único valor Γ_K para el cual la velocidad permanece finita en el borde de fuga, que se puede encontrar precisamente imponiendo esa condición.

Es natural esperar que el particular flujo potencial determinado por Γ_K sea el que ocurra en la práctica, y en esto consiste la *hipótesis de Kutta-Joukowski*. Se trata, claramente, de una hipótesis *ad hoc*, basada únicamente en la situación poco satisfactoria que de otra forma se daría a causa del borde de fuga filoso¹⁵. Sin embargo, es uno de los pasos cruciales para el desarrollo de la aerodinámica, y da resultados que están en excelente acuerdo con la experiencia¹⁶.

¹⁴ α es el ángulo que da la orientación del perfil alar, y por definición se mide a partir de la posición del ala para la cual la sustentación es nula, ver Fig. 6.19.

¹⁵ No queda claro, por ejemplo, en base a qué criterio podríamos elegir el correcto flujo potencial si el borde de fuga no fuese estrictamente filoso.

¹⁶ La hipótesis de Kutta-Joukowski se puede justificar en base a una teoría más rigurosa que tiene en cuenta la estabilidad de la estela que existe detrás del borde de fuga como consecuencia de fenómenos que no son tenidos en cuenta por la teoría simple que hemos desarrollado en este Capítulo.

Aplicando la hipótesis de Kutta-Joukowski se puede determinar Γ_K y por lo tanto se puede calcular la sustentación del perfil por medio de la ec. (6.84) como

$$F_y = -\rho U \Gamma_K \quad (6.164)$$

Este resultado se conoce como el *Teorema de la sustentación de Kutta-Joukowski*.

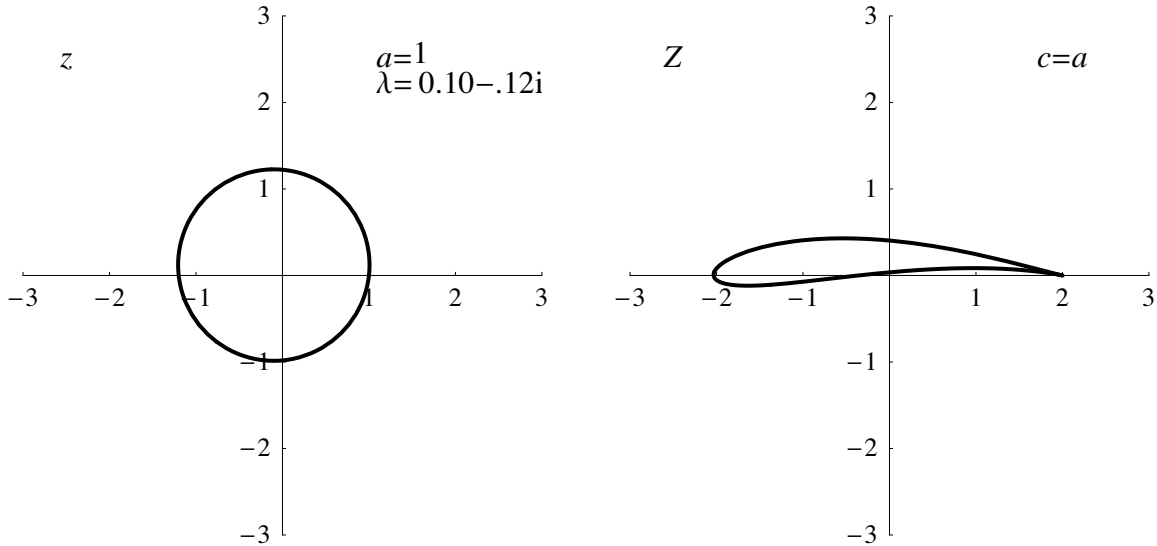


Fig. 6.20. Perfil alar obtenido a partir del círculo (6.163) mediante la transformación de Joukowski (6.161).

Para un ala delgada y simétrica cuyo perfil está dado por (6.161) y (6.163) resulta

$$\Gamma_K = -4\pi U(a + \lambda) \text{sen} \alpha \approx -\pi U \ell \text{sen} \alpha \quad (6.165)$$

donde ℓ ($\approx 4(a + \lambda)$) es la *cuerda* (o ancho) del ala. Resulta entonces, aplicando la (6.84), que la sustentación es

$$F_y = -\rho U \Gamma_K \approx \pi \rho U^2 \ell \text{sen} \alpha \quad (6.166)$$

La (6.166) es la expresión de la fuerza de sustentación *por unidad de longitud* del ala. Para un ala muy larga, de envergadura L , la fuerza de sustentación sobre toda el ala es

$$F_y \approx \pi \rho U^2 \ell L \text{sen} \alpha \quad (6.167)$$

Notar que $\ell L \text{sen} \alpha$ es la proyección del área del ala sobre el plano perpendicular a la dirección para la cual la sustentación es nula (que coincide aproximadamente con la dirección de avance del ala).

Es usual definir el *coeficiente de sustentación* y el *coeficiente de arrastre* como

$$C_y = \frac{F_y}{\frac{1}{2} \rho U^2 \ell L}, \quad C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho U^2 \ell L} \quad (6.168)$$

Tenemos por lo tanto que de acuerdo con la (6.167), el coeficiente de sustentación para un ala muy larga, simétrica y delgada, el coeficiente de sustentación vale

$$C_y \approx 2\pi \operatorname{sen} \alpha \quad (6.169)$$

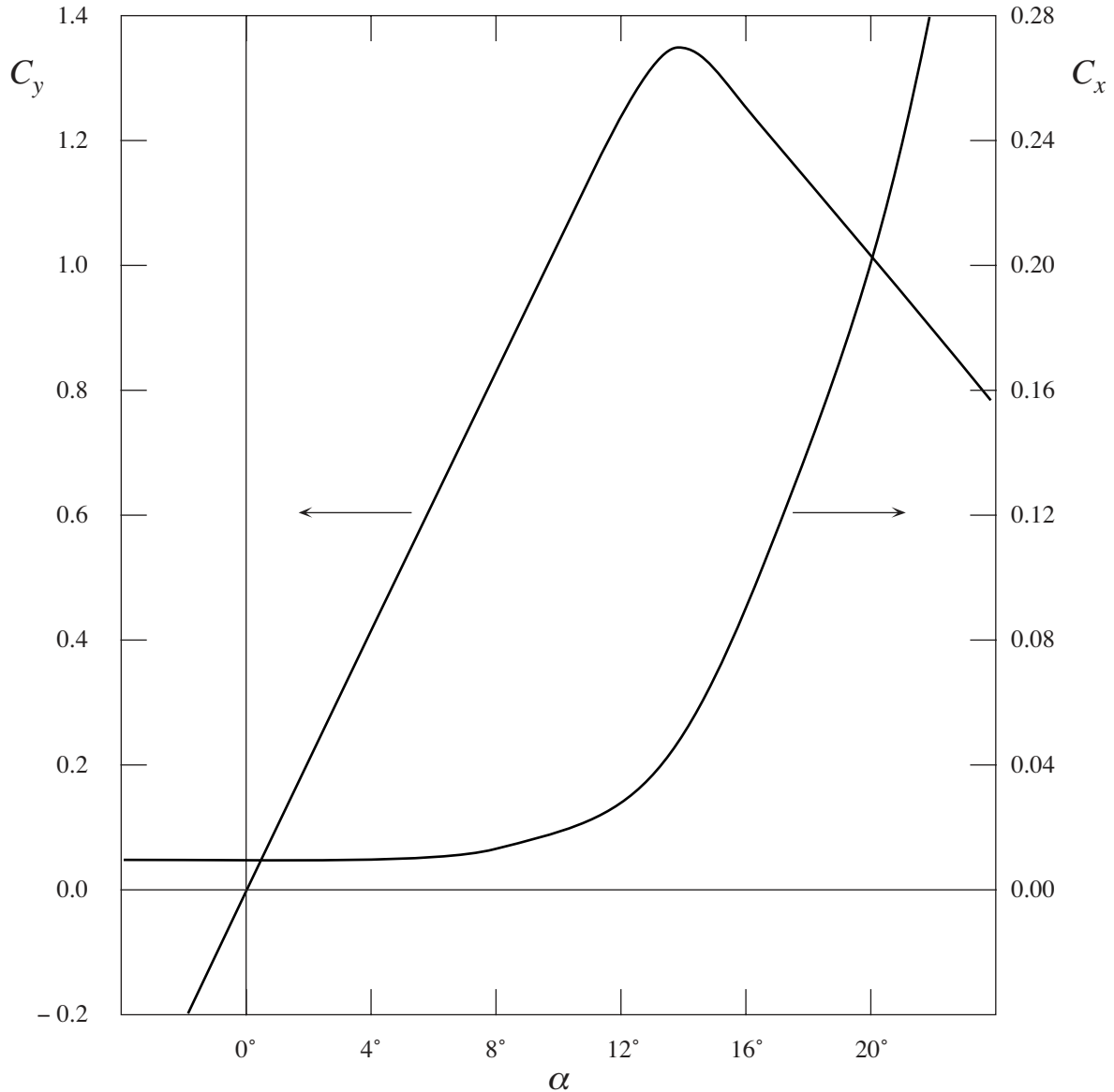


Fig. 6.21. Variación de los coeficientes de sustentación y de arrastre de un ala de avión en función del ángulo de ataque. Notar las diferentes escalas de C_y y C_x .

El acuerdo entre la teoría y los resultados experimentales es excelente, siempre y cuando α sea pequeño (Fig. 6.21). Para ángulos mayores, la sustentación medida cae fuertemente por debajo del valor teórico, por causas que discutiremos más adelante. El ángulo α a partir del cual comienza a fallar la teoría está típicamente comprendido entre 6° y 12° , según sea la forma del perfil del ala. No obstante esto, el hecho de predecir correctamente los aspectos esenciales del flujo alrededor del ala para pequeños ángulos de ataque es uno de los grandes éxitos de la teoría de flujos ideales, y un resultado de enorme importancia práctica.

Comentarios sobre los flujos potenciales

Antes de concluir este Capítulo es oportuno comentar algunas cuestiones que seguramente intrigan al lector. Parte de ellas se estudiarán en Capítulos posteriores, pero no está demás una discusión preliminar. Claramente la teoría ideal que presentamos aquí, si bien predice correctamente la sustentación de un ala, no está de acuerdo con la experiencia en ciertos aspectos y no aclara satisfactoriamente otros. Por ejemplo predice que el arrastre sobre un cuerpo que se mueve en el seno de un fluido es nulo, lo cual está en violenta contradicción con la experiencia cotidiana. ¿Como conciliar este fracaso con la correcta predicción de la sustentación? Además, ¿como se origina la circulación que produce la sustentación del ala? De acuerdo con los teoremas de la circulación, si el ala parte del reposo y el aire está inmóvil, y entonces claramente la circulación de la velocidad alrededor del perfil es nula y no hay sustentación, parecería a primera vista que tendría que seguir siendo nula cuando el ala se pone en movimiento.

La pista que permite aclarar estas cuestiones parte de considerar los efectos de la viscosidad, que hasta aquí hemos ignorado. Pero la forma como interviene la viscosidad en muchos flujos es muy sutil y para nada obvia como se verá en seguida.

Flujos viscosos

Para comenzar a entender el rol de la viscosidad conviene regresar por un momento a la ecuación de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{g} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (6.170)$$

Esta ecuación difiere de la ecuación de Euler, sobre la cual se basa la teoría de los fluidos ideales, por la presencia del término viscoso $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ (aquí $\nu = \eta / \rho$ es la viscosidad cinemática).

Por de pronto, la observación de los flujos reales (o sea, viscosos) muestra que sobre un contorno rígido, no sólo la componente normal, sino también la componente *tangencial* de \mathbf{u} deben ser iguales a la velocidad del contorno¹⁷. Si el contorno está en reposo, debemos entonces tener

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sobre el contorno} \quad (6.171)$$

Esta condición sobre la componente tangencial de la velocidad se suele llamar *condición de no deslizamiento*, y vale para todo fluido con $\nu \neq 0$, por pequeña que sea la viscosidad.

En este contexto, podemos observar que usando la identidad vectorial

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (6.172)$$

y recordando que $\nabla \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}$ y que en un flujo incompresible $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, tenemos que

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (6.173)$$

Por lo tanto $\nabla^2 \mathbf{u} = 0$ en un flujo cuya vorticosidad es nula (en realidad basta que $\nabla \times \boldsymbol{\omega} = 0$) y la ecuación de Navier-Stokes coincide con la ecuación de Euler, pese a la existencia de esfuerzos

¹⁷ El hecho que las parcelas del fluido que están en contacto con la superficie de un sólido se tienden a adherir a él se puede entender cualitativamente en términos de las interacciones intermoleculares.

tangenciales. Este hecho, sobre el cual volveremos más adelante, explica porqué en un fluido real es posible tener un flujo potencial en la mayor parte del volumen, salvo en determinadas regiones donde por algún motivo hay vorticidad. Claramente, cerca de superficies sólidas, cuando la teoría ideal predice una componente tangencial no nula de la velocidad relativa, los efectos de la viscosidad son seguramente importantes, pues es precisamente debido a la viscosidad que se consigue que dicha componente se anule. En tales regiones hay vorticidad y por lo tanto el flujo no es potencial y tampoco, obviamente, se puede aplicar la ecuación de Euler.

El número de Reynolds

Consideremos un fluido viscoso en movimiento, y sea U el valor típico de la velocidad. Además, sea L la escala espacial característica del flujo¹⁸. Una vez elegidos L y U , podemos formar la cantidad

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu} \quad (6.174)$$

que es un número puro que se conoce como *número de Reynolds*.

El motivo de la importancia del número de Reynolds se puede apreciar si se observa que las derivadas de las componentes de \mathbf{u} son típicamente del orden de magnitud de U/L (suponiendo, se entiende, que las componentes de \mathbf{u} tengan variaciones del orden de U sobre distancias del orden de L). Típicamente, las derivadas de las componentes de \mathbf{u} tendrán ellas mismas variaciones del orden de U/L sobre distancias del orden de L , luego derivadas segundas como $\partial^2 u_i / \partial x^2, \dots$, etc., serán del orden de magnitud de U/L^2 . De esta forma podemos estimar el orden de magnitud de los términos de inercia y viscoso de la ecuación de Navier-Stokes como

$$\begin{aligned} \text{término de inercia: } & |(u \cdot \nabla)u| = O(U^2/L) \\ \text{término viscoso: } & |\nu \nabla^2 u| = O(\nu U/L^2) \end{aligned} \quad (6.175)$$

Siempre y cuando estas estimaciones sean correctas, se deduce que

$$\frac{|\text{término de inercia}|}{|\text{término viscoso}|} = O\left(\frac{U^2/L}{\nu U/L^2}\right) = O(\text{Re}) \quad (6.176)$$

Por consiguiente, el número de Reynolds es importante porque permite estimar groseramente la importancia relativa de dos términos importantes de la ecuación de Navier-Stokes. No debe sorprender, entonces, que flujos caracterizados por un número de Reynolds grande y flujos caracterizados por un número de Reynolds pequeño tengan características muy diferentes.

Flujos de alto número de Reynolds

El caso $\text{Re} \gg 1$ corresponde a lo que podríamos llamar flujos de baja viscosidad. El resultado (6.176) sugiere que cuando $\text{Re} \gg 1$ los efectos de la viscosidad deberían ser, en general, despreciables. El flujo alrededor de un perfil alar delgado, cuando el ángulo de ataque es pequeño, es un caso de esta clase. Aún así, sin embargo, los efectos de la viscosidad se vuelven importantes

¹⁸ Un ejemplo puede permitir aclarar esto. En el caso del aquietamiento de la taza de te del Cap. 5, un valor razonable para L sería 4 cm, y para U , 5 cm/s.

en capas límite delgadas, donde existen gradientes de velocidad muy grandes. Debido a ello, *en esas capas delgadas, el término viscoso resulta mucho mayor de lo que indica la estimación (6.176), que se basa sobre las escalas características del grueso del flujo*. Veremos más adelante que el espesor típico δ de tales capas límite está dado por

$$\delta / L = O(1/\sqrt{\text{Re}}) \quad (6.177)$$

Por lo tanto, cuanto mayor sea el número de Reynolds del grueso del flujo, tanto más delgada resulta la capa límite.

Está claro que para poder aplicar al grueso del flujo la teoría de flujos ideales que desarrollamos en este Capítulo, es necesario que el número de Reynolds sea grande (de lo contrario la capa límite abarcaría el grueso del flujo). Sin embargo esta condición *no es suficiente*. Veremos, en efecto, que el fenómeno de la *separación de la capa límite*, que consiste en que la capa límite se “desprende” de la superficie del sólido, lleva a un estado de cosas muy diferente del que predice la teoría ideal. Existe, además, otra complicación en los flujos de alto número de Reynolds. Ocurre muchas veces, en efecto, que las soluciones *estacionarias* de la ecuación de Euler son *inestables* frente a pequeñas perturbaciones, y de resultas de eso el flujo deja de ser estacionario y se vuelve *turbulento*. En realidad, fue precisamente en este contexto que Reynolds introdujo el parámetro adimensional que hoy lleva su nombre.

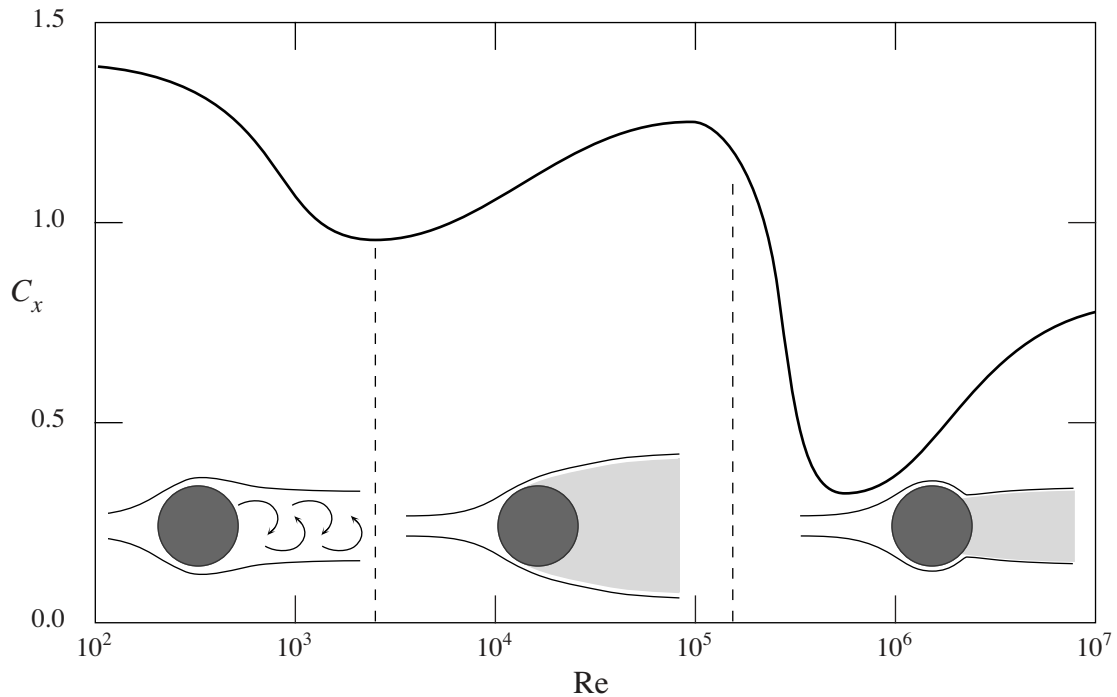


Fig. 6.22. Arrastre sobre un cilindro circular en un flujo uniforme.

La Fig. 6.22 muestra el coeficiente de arrastre sobre un cilindro circular, en función del número de Reynolds. Se puede observar que el arrastre sigue siendo importante en todo el intervalo entre $\text{Re} = 10^2$ y 10^7 , que equivale a disminuir la viscosidad por un factor 10^5 . Además, como lo indican los esquemas, el patrón general del flujo no muestra signos de tender a la forma de la Fig. 6.11 para $\nu \rightarrow 0$ (o sea $\text{Re} \rightarrow \infty$). Esto se debe a que para lograr esa forma, cerca de la superficie del cilindro la velocidad del flujo principal debería disminuir muy rápidamente del lado de atrás del mismo, y por lo tanto habría un fuerte gradiente de presión en sentido contrario al flujo

(lo que se llama un gradiente *adverso*), como se puede apreciar en la Fig. 6.12. Pero ocurre que la capa límite adherida a la superficie del cilindro no puede soportar ese gradiente adverso. El motivo es que debido al gradiente adverso, muy cerca de la superficie se produce una *inversión* del flujo, que hace que la capa límite (en la cual el flujo es rotacional) se separe de la superficie del cilindro provocando una importante *estela* detrás del mismo, en la cual el flujo es vorticoso. Si bien el carácter de la estela cambia al aumentar el número de Reynolds, ésta nunca desaparece. La presencia de la estela es responsable del arrastre que se observa en los experimentos.

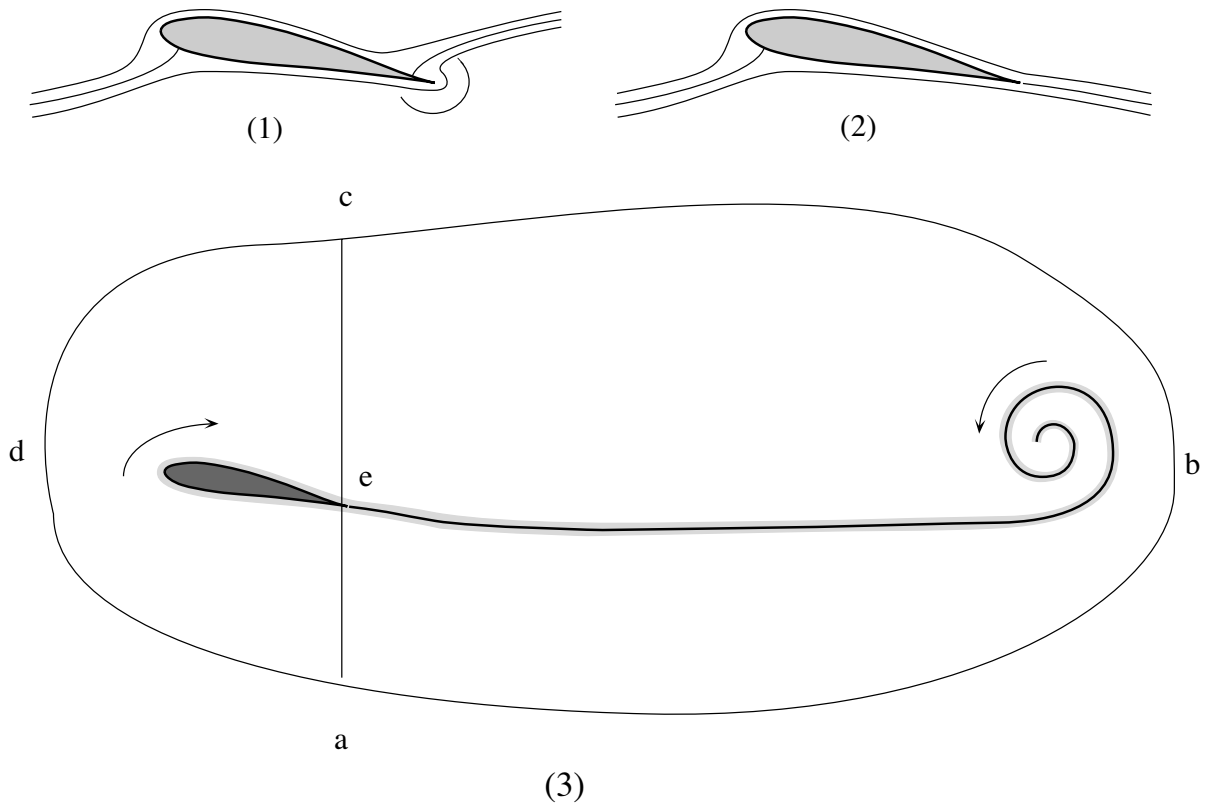


Fig. 6.23. Generación de la sustentación de un ala. El patrón (1) del flujo en el instante que el ala se pone en movimiento a partir del reposo no tiene circulación. Para un perfil alar diseñado para tener sustentación, cuando el ala se comienza a mover el flujo tiene un punto de estancamiento sobre la superficie superior, antes del borde de fuga, y la velocidad es singular en el filo del borde de fuga. Tal situación se mantendría siempre si no fuera por los efectos de la viscosidad, que hacen que la capa límite de la parte de abajo del ala se separe justo en el borde de fuga. El vórtice que así se produce interactúa con la región no viscosa del flujo haciendo que el punto de estancamiento superior se desplace hacia el punto de separación. El nuevo flujo (2) no viscoso (fuera de la capa límite) tiene ahora una circulación, cuya magnitud está determinada por la geometría del perfil alar, junto con la condición que el punto de estancamiento posterior coincida con el borde de fuga. El proceso por el cual se genera la sustentación tiene lugar gracias a que se descarga vorticosidad en el fluido (3). De acuerdo con el Teorema de Helmholtz, la circulación alrededor del circuito $(a e c d a)$ que rodea el ala está compensada exactamente por la circulación alrededor del circuito $(a b c e a)$ que rodea la estela y el vórtice pero no el ala.

A diferencia del cilindro, un perfil alar está especialmente *diseñado para evitar la separación* de la capa límite. La característica esencial que permite lograr esto es el perfil alargado y afilado de la parte posterior, que sirve para reducir el gradiente adverso de presión, haciendo que la presión aumente en forma muy gradual en la parte del ala donde el espesor disminuye. Por este motivo, la capa límite no se separa sino muy cerca del borde de fuga, y entonces se produce una estela sumamente delgada. En este caso, sí es posible obtener valores muy pequeños del arrastre como se puede apreciar de la Fig. 6.21: para cuerpos bien perfilados (“aerodinámicos”) el coeficiente de arrastre es típicamente del orden de $Re^{-1/2}$ para $Re \rightarrow \infty$. Este estado de cosas se mantiene siempre y cuando el ángulo de ataque sea pequeño. Si el ángulo de ataque supera cierto límite, el aumento de presión sobre la parte superior del ala deja de ser suficientemente gradual, y se produce la separación de la capa límite muy adelante del borde de fuga. Cuando eso ocurre se dice que el ala está en *pérdida* (de sustentación), en efecto, la sustentación cae bruscamente a la par que aumenta fuertemente el arrastre (ver Fig. 6.21).

Las propiedades de la capa límite también permiten entender el *origen* de la circulación necesaria para la sustentación del ala. Cuando el ala y el aire que la rodea están en reposo, la velocidad y la vorticosidad son nulas en todas partes. Los experimentos muestran que al ponerse en movimiento el ala, se genera vorticosidad en la capa límite (Fig. 6.23); esta vorticosidad queda confinada en esa capa y en una delgada estela que queda atrás del ala, y que termina en un vórtice que se suele llamar *vórtice de arranque*. Consideremos ahora un circuito material ($a b c d a$) suficientemente grande como para estar íntegramente afuera de esas regiones desde el inicio del movimiento. Puesto que el estado inicial es de reposo, la circulación alrededor de ese circuito es nula inicialmente y por el Teorema de Kelvin sigue siendo nula en todo tiempo posterior. Si ahora dividimos el circuito en dos partes, una de los cuales ($a b c e a$) rodea el ala pero no la estela y el vórtice de arranque, y la otra ($a e c d a$) rodea la estela y el vórtice pero no el ala, claramente la circulación alrededor de estos dos circuitos debe ser de igual valor absoluto y signo opuesto. Ahora bien, el diseño del perfil alar está concebido de modo que la vorticosidad que se desprende del ala es *positiva*, para que quede alrededor del ala una circulación *negativa*, que proporcione la sustentación. El desprendimiento de vorticosidad continúa hasta que la circulación alrededor del perfil alar alcanza el valor necesario para que el flujo principal (irrotacional) no presente singularidad en el borde de fuga. Este valor es precisamente el Γ_K de Kutta-Joukowski. A partir de ese momento no hay más variación neta de la vorticosidad de las capas límite de las superficie superior e inferior del ala, y se mantiene el valor final Γ_K de la circulación.

De todo lo dicho se desprende el rol fundamental de la viscosidad y de la capa límite, cuyo estudio será materia de los próximos Capítulos.