

5. FLUJOS IDEALES

Ecuaciones generales de los flujos ideales

Cuando se pueden despreciar los efectos de las viscosidades, la *ecuación de movimiento* toma la forma conocida como ecuación de Euler:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{\nabla p}{\rho} \quad (5.1)$$

No es sencillo establecer, en un dado flujo, cuándo y dónde se pueden ignorar los términos viscosos; se trata de una cuestión que aclarará en los Capítulos siguientes. Por ahora, supondremos *a priori* que la (5.1) determina el flujo en una importante cantidad de casos, especialmente cuando los fluidos involucrados son gases.

Para completar la descripción del flujo tenemos que agregar la *ecuación de conservación de la masa* (ec. (3.15) ó (3.17))

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{u} \quad (5.2)$$

y la *ecuación de la energía* (4.34), en la cual consistentemente con la (5.1) vamos también a despreciar los efectos de las viscosidades. Si además podemos ignorar la conducción del calor, la ecuación de la energía se reduce a la forma sencilla¹

$$\frac{de}{dt} = -\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (5.3)$$

donde e indica la energía interna por unidad de masa.

Antes de comenzar el análisis del sistema de ecuaciones (5.1)-(5.3), es importante examinar el problema de cómo complementarlas para determinar enteramente el flujo. Se trata de un sistema de cinco ecuaciones (una ecuación vectorial más dos ecuaciones escalares) en el que figuran seis funciones incógnitas del flujo: las tres componentes del vector \mathbf{u} y los tres escalares p , ρ y e .

Para cerrar el sistema necesitamos pues otra relación independiente más entre p , ρ y e . Esta relación es la *ecuación de estado*

$$p = p(\rho, e) \quad (5.4)$$

que es una propiedad del medio. Ya conocemos una forma particular de la (5.4): la ecuación de estado de los gases perfectos, que escribiremos en la forma $p = (\gamma - 1)\rho e$.

No se debe confundir la ecuación de la energía (5.3) con la ecuación de estado. Si bien ambas involucran a las mismas variables, la (5.3) establece cómo varía la energía, y por lo tanto *depende del tipo de transformaciones* que se están considerando; por ejemplo, la forma (5.3) dice que la energía interna puede variar solamente por el trabajo de la presión. En cambio, la ecuación de estado establece una relación entre p , ρ y e que vale *siempre*, independientemente de las transformaciones admitidas.

¹ En consecuencia, estamos considerando transformaciones adiabáticas.

Casos particulares de flujos ideales

Para determinar el flujo de un fluido ideal se tienen, entonces, seis ecuaciones y seis incógnitas (\mathbf{u} , p , ρ y e). Esta situación, que es la más general, muchas veces se simplifica considerablemente. Son de particular interés los casos siguientes:

Flujo incompresible: cuando el flujo se puede considerar incompresible ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, o sea $\rho = \text{cte.}$) e es constante (pues no hay trabajo de la presión sobre los elementos del fluido); en estas condiciones, la ecuación de movimiento mantiene la misma forma, pero ahora ρ no es una variable sino un parámetro; quedan las cuatro variables (\mathbf{u} , p) y la ecuación de Euler más la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ (que es la forma particular que toma la ecuación de conservación de la masa), alcanzan para determinarlas.

Flujo irrotacional: otra simplificación común es suponer que el flujo es *irrotacional*, es decir que $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. Veremos más adelante que esto reduce el sistema a dos ecuaciones.

Flujo incompresible e irrotacional: finalmente, el uso combinado de las condiciones $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ y $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ reduce el sistema a una única ecuación escalar.

Formas de la Ecuación de Euler para flujos barotrópicos

Una característica destacable de la ec. (5.1) es que bajo una gran variedad de condiciones el segundo miembro se puede escribir como un gradiente². Cuando la fuerza de volumen es la gravedad y también en otros casos de interés práctico, el término \mathbf{g} tiene la forma

$$\mathbf{g} = -\nabla\varphi \quad (5.5)$$

En cuanto al término $\nabla p / \rho$, para que se lo pueda escribir como el gradiente de un potencial, se tiene que cumplir la condición

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) = 0 \quad (5.6)$$

Para ver qué implica la (5.6), usamos la identidad vectorial

$$\nabla \times (\alpha \mathbf{A}) = \alpha \nabla \times \mathbf{A} + (\nabla \alpha) \times \mathbf{A} \quad (5.7)$$

y obtenemos

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \nabla \times (\nabla p) - \frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho) \times (\nabla p) = -\frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho) \times (\nabla p) \quad (5.8)$$

Por lo tanto, para que $\nabla p / \rho$ se pueda escribir como el gradiente es preciso que los gradientes de p y de ρ sean *paralelos* en todo punto del fluido, esto es, que las superficies sobre las cuales $p = \text{cte.}$ (llamadas *isobaras*) coincidan con las superficies sobre las que $\rho = \text{cte.}$ (denominadas *isoesteras*). En ese caso se tiene que $\rho = f(p)$. Un flujo en el cual esto se cumple se denomina *barotrópico*. Discutiremos a continuación varios casos de este tipo.

² Hay importantes excepciones; por ejemplo, en sistemas rotantes (no inerciales) \mathbf{g} no se puede escribir como $\nabla\varphi$. Estos casos incluyen las corrientes en los océanos y en la atmósfera terrestre y se deben tratar aparte.

Flujo incompresible con densidad uniforme

Este es un caso trivial de flujo barotrópico en el cual el gradiente de la densidad es idénticamente nulo. Entonces la ecuación de Euler se puede escribir como

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{\nabla p}{\rho} = -\nabla\left(\varphi + \frac{p}{\rho}\right) \quad (5.9)$$

Si se toma el rotor de ambos miembros se encuentra que $\nabla \times (d\mathbf{u}/dt) = 0$. Esto no se traduce en consecuencias inmediatas sobre el campo \mathbf{u} , pero implica que derivada total de la vorticidad $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ es nula pues $\nabla \times (d\mathbf{u}/dt) = d(\nabla \times \mathbf{u})/dt = d\boldsymbol{\omega}/dt = 0$.

Usando una conocida relación vectorial, podemos escribir la derivada convectiva $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ como

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla(u^2/2) + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = \nabla(u^2/2) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \quad (5.10)$$

y por lo tanto la (5.9) tiene la forma

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{u^2}{2} + \varphi + \frac{p}{\rho}\right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = 0 \quad (5.11)$$

Esta es una expresión muy interesante de la ecuación de movimiento, que da lugar a tres formas simplificadas muy usadas que consideraremos a continuación.

Flujo incompresible estacionario ($\partial \mathbf{u} / \partial t = 0$).

Tomando el producto escalar de la (5.11) por \mathbf{u} , obtenemos

$$\mathbf{u} \cdot \nabla\left(\frac{u^2}{2} + \varphi + \frac{p}{\rho}\right) = 0 \quad (5.12)$$

lo que muestra que a lo largo de una línea de corriente se cumple que

$$\frac{u^2}{2} + \varphi + \frac{p}{\rho} = \text{cte.} \quad (5.13)$$

Esta ecuación se conoce como *ecuación de Bernoulli* y expresa una integral primera³ de la ecuación del movimiento para flujos invíscidos, incompresibles y estacionarios.

Flujo incompresible irrotacional ($\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = 0$)

En este caso el campo de velocidad se puede derivar de un potencial ϕ , esto es

$$\mathbf{u} = \nabla\phi \quad (5.14)$$

y entonces la ec. (5.11) se puede escribir en la forma

$$\nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \varphi + \frac{p}{\rho}\right) = 0 \quad (5.15)$$

³ Esta integral primera equivale a la integral primera de la energía mecánica que se tiene en la dinámica de un punto material cuando se mueve bajo la acción de una fuerza conservativa.

de donde obtenemos la integral primera

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \varphi + \frac{p}{\rho} = f(t) \quad (5.16)$$

donde $f(t)$ es una función arbitraria del tiempo. La existencia de esta integral es importante pues simplifica el problema de encontrar soluciones no estacionarias de la ecuación de Euler.

Flujo incompresible irrotacional y estacionario ($\nabla \times \mathbf{u} = 0$ y $\partial \mathbf{u} / \partial t = 0$)

En este caso la (5.15) se reduce a

$$\nabla \left(\frac{u^2}{2} + \varphi + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (5.17)$$

de donde se desprende que

$$\frac{u^2}{2} + \varphi + \frac{p}{\rho} = \text{cte.} \quad (5.18)$$

en todo punto del flujo. La (5.18) es una forma muy importante de la ecuación de Bernoulli que vamos a usar frecuentemente en los Capítulos siguientes.

Flujo compresible barotrópico

Cuando el flujo es compresible, pero no hay conducción de calor y además el flujo es *homoentrópico* (es decir la entropía tiene el mismo valor en todo punto) o bien es *estacionario*, el término $\nabla p / \rho$ se puede escribir en la forma ∇h donde

$$h = e + p / \rho \quad (5.19)$$

es la *entalpía* por unidad de masa.

Naturalmente, en un flujo gobernado por la ecuación de Euler, la derivada total de la entropía es nula si no hay conducción de calor. En efecto, en este caso se tiene $de = -p dv$ (pues la variación de la energía interna por unidad de masa se debe exclusivamente al trabajo reversible de la presión) y por lo tanto

$$TdS = de + pdv = 0 \quad (5.20)$$

En consecuencia, si el flujo es homoentrópico en un cierto instante, mantendrá siempre esta condición.

Volvamos ahora a la entalpía y calculemos su derivada total para un flujo sin conducción de calor gobernado por la ecuación de Euler. La unidad de masa ocupa el volumen $v = 1 / \rho$, luego $h = e + pv$ y entonces

$$\frac{dh}{dt} = \frac{de}{dt} + p \frac{dv}{dt} + v \frac{dp}{dt} = v \frac{dp}{dt} \quad (5.21)$$

Expresando las derivadas totales en la forma $d / dt = \partial / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$, queda:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla h = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p \right) \quad (5.22)$$

o sea

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = \mathbf{u} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla h \right) \quad (5.23)$$

El primer miembro de esta ecuación es (recordemos que $h = e + p/\rho = e + pv$):

$$\frac{\partial h}{\partial t} - v \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial t} + p \frac{\partial v}{\partial t} \quad (5.24)$$

y claramente es nulo si el flujo es *estacionario*, o bien si es *homoentrópico*, pues en tal caso $de = -p dv$ tanto si se trata de variaciones convectivas o locales.

Por lo tanto, cuando se cumple una u otra de estas condiciones, la (5.23) nos dice que

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla h \quad (5.25)$$

y por consiguiente, la integral del movimiento (5.13) o (5.16) hallada para flujos incompresibles con densidad uniforme existe también para flujos compresibles, pero con la función entalpía $h = e + p/\rho$, en lugar del cociente p/ρ que aparecía para el caso de flujos incompresibles.

Nótese que tanto p/ρ para fluidos incompresibles como h para fluidos compresibles (bajo las condiciones señaladas), cumplen el rol de un potencial por unidad de masa, del mismo modo que φ . Naturalmente, φ está asociado con las fuerzas de volumen, pues $-\nabla\varphi$ es la aceleración que producen dichas fuerzas. En cambio p/ρ (para fluidos incompresibles) y h (para fluidos compresibles, pero sólo cuando el flujo es estacionario o bien homoentrópico) están asociadas con las fuerzas de superficie, y representan un potencial por unidad de masa cuyo gradiente (en ambos casos) produce una aceleración igual a $-(\nabla p)/\rho$.

Ecuaciones de evolución de la vorticidad

Examinaremos primero el caso de flujos ideales barotrópicos, con fuerzas de volumen conservativas. La ecuación de movimiento (ecuación de Euler) se puede escribir entonces en la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{u^2}{2} + \varphi + h \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = 0 \quad (5.26)$$

Tomando el rotor de esta ecuación, tenemos,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = 0 \quad (5.27)$$

que es la forma Euleriana de la ecuación de evolución de la vorticidad $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ en los flujos ideales barotrópicos con fuerzas de volumen conservativas.

Para obtener la forma Lagrangiana, observemos que el segundo término de esta expresión se puede simplificar usando la siguiente identidad vectorial

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (5.28)$$

donde \mathbf{A} y \mathbf{B} son dos vectores cualesquiera. De esta manera la (5.27) se escribe

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{u}(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (5.29)$$

Pero $\nabla \cdot \mathbf{u} = -\rho^{-1} d\rho/dt$, y $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$, por lo tanto nos queda

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (5.30)$$

que es la ecuación de la vorticidad en forma Lagrangiana.

Debe quedar claro que esta ecuación, ya sea en forma Euleriana (5.27) o Lagrangiana (5.30), *no es* equivalente a la ecuación de Euler. En efecto, *no determina* el campo de velocidad sino solo su rotor⁴. Sin embargo, la ec. (5.30) es muy útil para determinar cómo varía $\boldsymbol{\omega}$ en un fluido ideal. La simple inspección de las formas Euleriana (5.27) y Lagrangiana (5.30) de la ecuación de evolución de $\boldsymbol{\omega}$ nos da una información importante sobre lo que ocurre con $\boldsymbol{\omega}$. En efecto, la ec. (5.27) nos dice que si en todo punto se cumple que $\boldsymbol{\omega} = 0$ (o, más en general, si en todo punto se cumple que $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = 0$) en un cierto instante, entonces tendremos que en ese instante $\partial \boldsymbol{\omega} / \partial t = 0$ en todo punto, y por lo tanto seguiremos teniendo $\boldsymbol{\omega} = 0$ en todo punto y en cualquier otro instante. Esto significa que:

Si en un fluido ideal⁵ la vorticidad es nula en un momento dado, como quiera que éste se mueva, seguirá siendo nula en todo otro momento.

En cambio, de la forma Lagrangiana se desprende que:

Si en un cierto volumen material se cumple que $\boldsymbol{\omega} = 0$ en un determinado instante, la vorticidad de ese mismo volumen material seguirá siendo siempre nula.

La ecuación de Helmholtz

Para conocer más acerca de la vorticidad conviene escribir la (5.30) de una forma diferente, que puede obtener con una transformación sencilla. Dividiendo la (5.30) por ρ , y reagrupando términos obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} \quad (5.31)$$

que se denomina *ecuación de Helmholtz*. La ecuación (5.31) tiene una notable interpretación (ver Fig. 5.1): la variación del vector $\boldsymbol{\omega}/\rho$ asociado a un elemento de fluido es proporcional a la de un elemento material de longitud infinitesimal $\boldsymbol{\lambda}$, *paralelo* a $\boldsymbol{\omega}/\rho$.

En efecto, la variación de un elemento material de longitud λ está dada por

⁴ Si sumamos a \mathbf{u} el gradiente de una función escalar cualquiera, la vorticidad sigue siendo la misma. Por lo tanto la vorticidad determina \mathbf{u} sólo a menos de funciones no constantes.

⁵ Siempre y cuando se cumplan las condiciones que permiten expresar la ecuación de movimiento en la forma (5.26)

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \lambda_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = (\boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (5.32)$$

que es idéntica a la ecuación de Helmholtz con $\boldsymbol{\lambda}$ en lugar de $\boldsymbol{\omega} / \rho$.

La ecuación de Helmholtz tiene también una interpretación en términos del *momento angular*. En efecto, consideremos un elemento material homogéneo cilíndrico de longitud λ cuyo eje es paralelo a $\boldsymbol{\omega}$. Ya hemos visto en el Capítulo 3 (ec. (3.37)) que dicho elemento rota como un cuerpo rígido, con una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ dada por

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \quad (5.33)$$

Luego el módulo del momento angular del elemento es

$$L = C \delta m \delta r^2 \omega \quad , \quad \delta m = \pi \delta r^2 \lambda \rho \quad (5.34)$$

donde C es un factor numérico constante⁶. Supongamos ahora que el elemento se ha estirado, adquiriendo una longitud λ' , y al mismo tiempo han variado su radio y su densidad, que valen ahora $\delta r'$ y ρ' , y su velocidad angular, que ahora es ω' . Su momento angular es entonces

$$L' = C \delta m \delta r'^2 \omega' \quad (5.35)$$

puesto que su masa se mantiene constante porque es un elemento material.

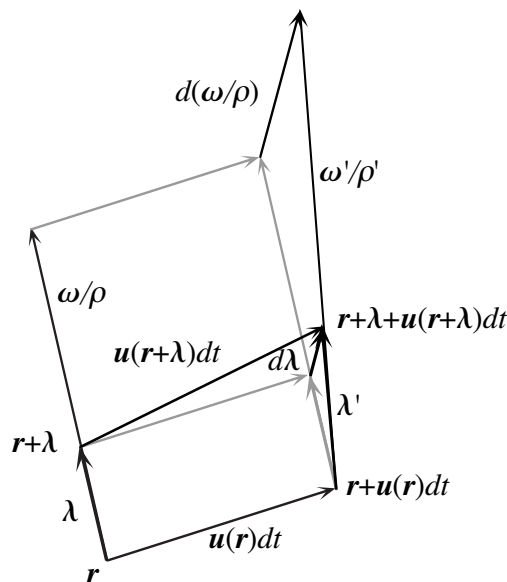


Fig. 5.1. Interpretación de la ecuación de Helmholtz.

A partir de la constancia de la masa ($\delta m = \pi \delta r'^2 \lambda' \rho' = \pi \delta r^2 \lambda \rho$) obtenemos

$$\delta r'^2 = \delta r^2 \frac{\lambda \rho}{\lambda' \rho'} \quad (5.36)$$

⁶ El factor C es un número que se puede obtener calculando el momento de inercia de un cilindro homogéneo que rota alrededor de su eje. Pero su valor exacto es irrelevante en el presente contexto.

Pero hemos visto que las variaciones de λ y ω/ρ son proporcionales; entonces

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\omega'/\rho'}{\omega/\rho} \quad (5.37)$$

de donde obtenemos

$$\frac{\lambda\rho}{\lambda'\rho'} = \frac{\omega}{\omega'} \quad (5.38)$$

Sustituyendo (5.38) en (5.36) resulta

$$\delta r'^2 \omega' = \delta r^2 \omega \quad (5.39)$$

y por lo tanto

$$L' = L \quad (5.40)$$

es decir, la ecuación de Helmholtz es también un enunciado de la conservación del momento angular de un elemento de fluido.

En resumen, hemos visto que en un flujo gobernado por la ecuación de Euler, la variación de ω está sujeta a fuertes restricciones:

Si en un determinado momento la vorticidad es nula en el interior de un cierto volumen material, seguirá siendo nula siempre en ese volumen. Esto quiere decir que la vorticidad no se transfiere de una región material a otra del fluido, sino que es arrastrada por el movimiento del fluido. En este traslado, el valor de ω varía de acuerdo con las deformaciones del elemento de fluido según lo establece la ecuación de Helmholtz, pero nunca aparece vorticidad en un elemento de fluido donde era nula, ni se anula en un elemento donde tenía un valor finito.

En particular, si después de un movimiento como se quiera complicado, un elemento material de fluido vuelve a tener en $t = t_1$ la misma forma y tamaño que tenía en $t = t_0$, tendremos que $|\omega(t_1)| = |\omega(t_0)|$ para ese elemento.

Teorema de Kelvin

Vamos a demostrar que en los flujos ideales barotrópicos (cuando $\nabla p/\rho$ se puede poner bajo la forma de un gradiente) con fuerzas de volumen conservativas, la circulación de la velocidad a lo largo de un línea material cerrada se mantiene constante. Este enunciado se conoce con el nombre de *Teorema de Kelvin*, y se puede considerar como la forma integral de la ecuación de Helmholtz.

La circulación de \mathbf{u} alrededor de una curva material cerrada C (ver Fig. 5.2) se define como

$$\Gamma_C(t) = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \quad (5.41)$$

En general, recordando lo visto para la derivada total de integrales materiales (Capítulo 3), se tiene que

$$\frac{d\Gamma_C}{dt} = \oint_C \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{l} + \oint_C \mathbf{u} \cdot \frac{d(d\mathbf{l})}{dt} \quad (5.42)$$

Pero todos los elementos $d\mathbf{l}$ son elementos materiales, puesto que conforman una línea material cerrada; luego, se puede escribir

$$\frac{d(d\mathbf{l})}{dt} = (d\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{u} \quad (5.43)$$

Reemplazando esta expresión y empleando la ecuación de Euler en la forma $d\mathbf{u}/dt = -\nabla(\varphi + h)$, queda

$$\frac{d\Gamma_C}{dt} = -\oint_C \nabla(\varphi + h) \cdot d\mathbf{l} + \oint_C d\mathbf{l} \cdot \nabla\left(\frac{1}{2}u^2\right) \quad (5.44)$$

donde hemos expresado $\mathbf{u} \cdot (d\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ en forma conveniente. De esta forma vemos que ambas integrales son nulas, puesto que sus integrandos son diferenciales totales, lo que demuestra el enunciado del Teorema de Kelvin.

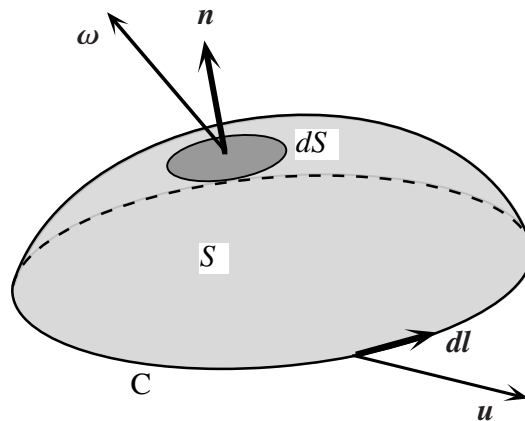


Fig. 5.2. Circulación de \mathbf{u} alrededor de una curva material cerrada C y flujo de la vorticidad concatenado por la misma.

Dado que Γ_C es una constante, si aplicamos el teorema de Stokes a la (5.41) obtenemos

$$\Gamma_C = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \text{cte.} \quad (5.45)$$

donde S es una superficie material abierta cualquiera dentro del fluido, que se apoya sobre la curva C (Fig. 5.2). La superficie S es arbitraria, puesto que

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0 \quad (5.46)$$

La (5.45) muestra entonces que el flujo de $\boldsymbol{\omega}$ concatenado por toda curva material C es invariante.

Movimientos vorticosos

Del mismo modo que se definen las líneas de corriente como las líneas que en un instante dado t son tangentes al campo de velocidad $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, se definen las *líneas de vórtice* como las líneas que en un instante dado t son tangentes al *campo de vorticidad* $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t)$. El haz constituido por las líneas de vórtice concatenadas por la curva C se denomina *tubo de vórtice*. Las líneas de vórtice que pasan por la curva C forman la *superficie o pared* del tubo de vórtice. La fuerza de un tubo de vórtice se define como el flujo de $\boldsymbol{\omega}$ concatenado por toda curva material C que rodea el tubo. Usando esta terminología, la (5.45) expresa que *la fuerza de todo tubo de vórtice es invariante*.

Los tubos de vórtices son en algún sentido permanentes, y la superficie material que coincide en un dado instante con la superficie de un tubo de vórtice, continúa siendo la superficie de ese tubo de vórtice. En otras palabras, en un fluido no viscoso, los tubos de vórtice se mueven con el fluido y su fuerza permanece constante. Este enunciado resume las leyes más importantes de la dinámica de vórtices.

Si la sección transversal de un tubo de vórtice tiende a cero, en el límite se obtiene un línea de vórtice. El resultado anterior muestra que una línea material que coincide inicialmente con una línea de vórtice sigue siendo un línea de vórtice. El hecho que la fuerza de un tubo de vórtice de pequeña sección transversal permanece constante mientras se mueve con el fluido, tiene implicaciones para una línea de vórtice. En efecto, si un elemento de longitud Δl de una línea material que coincide con una línea de vórtice aumenta su longitud, entonces la pequeña sección transversal ΔS del tubo de vórtice debe disminuir de acuerdo con la conservación de la masa, y la magnitud de la vorticidad debe aumentar. Dado que $\omega \Delta S = \text{cte.}$ y $\Delta S \Delta l \rho = \text{cte.}$, tanto ω como Δl varían como $1/\Delta S$, en otras palabras, $\omega \propto \rho \Delta l$, como ya habíamos demostrado antes.

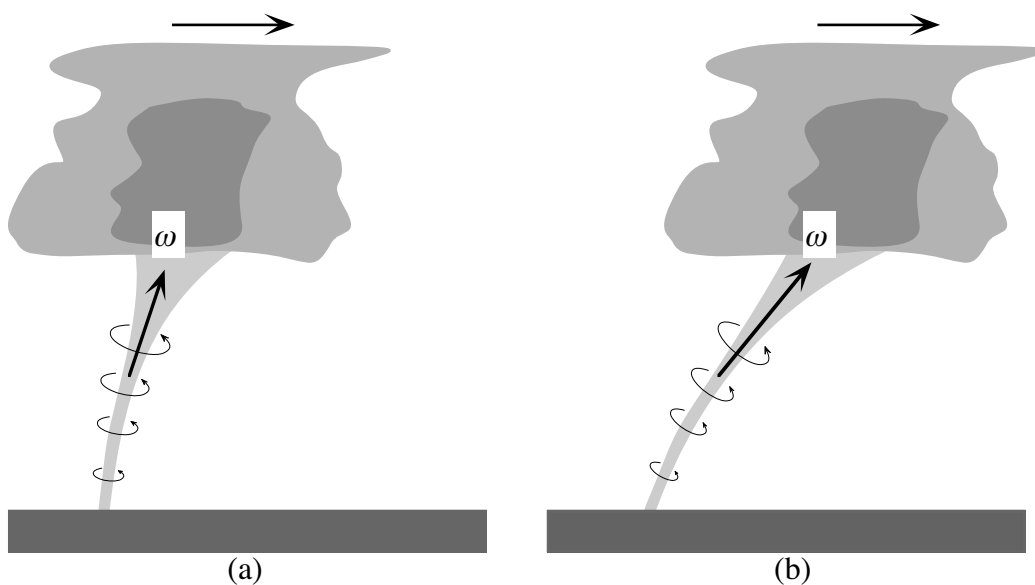


Fig. 5.3. Intensificación de un tornado por estiramiento de los tubos vorticosos.

De resultados de esto, el estiramiento de los tubos vorticosos debido al movimiento del fluido intensifica la vorticidad local. Esto es lo que ocurre en los tornados, donde las fuertes corrientes térmicas ascendentes que producen los cumulonimbus producen un fuerte estiramiento de los tubos vorticosos lo cual a su vez origina los intensos y devastadores movimientos rotatorios que se observan. La característica proyección en forma de embudo de los tornados (y no el aire en su

interior) señala, en realidad, el tubo vorticoso pues marca regiones de muy baja presión (donde el aire se expande rápidamente y la humedad se condensa), y éstas a su vez están ubicadas en el núcleo del vórtice, donde se concentra toda la vorticidad. De esta forma, cuando las nubes de tormenta se desplazan (Fig. 5.3) la vorticidad se intensifica: un ejemplo práctico de las consecuencias de la ecuación de Helmholtz.

En contraste con lo anterior, el frenamiento gradual (“spin-down”) del líquido en una taza de té que ocurre después de haberlo revuelto para disolver el azúcar, es el resultado del acortamiento de los tubos vorticosos (Fig. 5.4). El grueso del flujo es esencialmente no viscoso y en rápida rotación, y la fuerza centrífuga se equilibra (casi) con el gradiente de presión en sentido radial y dirigido hacia el eje. Este gradiente de presión también actúa sobre la delgada capa de líquido en contacto con el fondo de la taza, donde el flujo es viscoso, pero en esta zona prevalece sobre la fuerza centrífuga pues el líquido gira mucho más lentamente. Por lo tanto, el fluido de la capa viscosa se mueve en espiral hacia el centro (esto se manifiesta en que las hojas de té se acumulan en el centro del fondo de la taza) y luego asciende, saliendo de la capa vorticiosa (Fig. 5.4b). De resultas de esto los tubos vorticosos del grueso del fluido se acortan y su sección aumenta, de modo que la vorticidad decrece con el tiempo. Es debido a esta sutil combinación de dinámica viscosa y no viscosa que ocurre el inocuo y familiar fenómeno del aquietamiento del té que ha sido revuelto.

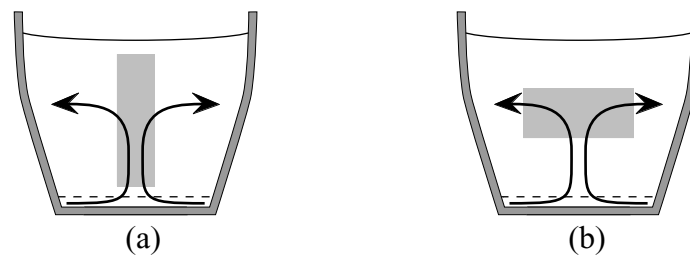


Fig. 5.4. Cuando se ha revuelto el té de una taza, la rotación del líquido se frena debido al acortamiento de los tubos vorticosos.

La ecuación de Helmholtz (5.31) toma una forma particularmente sencilla en el caso de flujos planos o con simetría axial, en los cuales una de las tres coordenadas es ignorable. Para flujos planos ($\mathbf{u} \equiv (u_x, u_y, 0)$, $\partial / \partial z = 0$), la única componente no nula de $\boldsymbol{\omega}$ es ω_z . Entonces, la (5.31) se reduce a

$$\omega = k\rho \quad , \quad k = \text{cte.} \quad (5.47)$$

que nos dice simplemente que la vorticidad de un elemento material varía en proporción con su densidad. Si además de plano, el flujo es incompresible, la (5.47) nos dice que la vorticidad de un elemento material se conserva: en otras palabras, la vorticidad está congelada en el fluido y es arrastrada por éste en su movimiento.

Para flujos con simetría axial, en un sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) con eje z coincidente con el eje de simetría,

$$\mathbf{u} = u_r(r, z)\mathbf{e}_r + u_z(r, z)\mathbf{e}_z \quad (5.48)$$

Las líneas de corriente están todas en planos $\theta = \text{cte.}$ y la única componente no nula de $\boldsymbol{\omega}$ es la componente θ :

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_\theta = \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta \quad (5.49)$$

Al usar estas expresiones en la ec. de Helmholtz (5.31) hay que tener presente que la componente θ del operador gradiente es $\nabla_\theta = r^{-1} \partial / \partial \theta$, y que $\partial \mathbf{e}_r / \partial \theta = \mathbf{e}_\theta$, pues el versor \mathbf{e}_r depende de θ . Resulta entonces

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\omega}{\rho r} \right) = 0 \quad (5.50)$$

de donde resulta

$$\omega = k \rho r \quad , \quad k = \text{cte.} \quad (5.51)$$

Si además de tener simetría axial, el flujo es incompresible, la (5.51) nos dice que la vorticidad de un elemento material varía en proporción a r . A este mismo resultado se podría haber llegado directamente observando que en este caso las líneas de vórtice son circunferencias de radio r . Los anillos de humo son ejemplos de flujos vorticosos con simetría axial.

Flujos viscosos, no barotrópicos y con fuerzas de volumen no conservativas

Cuando se cumple una o más de las tres condiciones mencionadas en el encabezamiento, la circulación de la velocidad alrededor de una línea material cerrada C no es más constante. Para analizar de donde provienen las variaciones de Γ_C retomamos la demostración del teorema de la circulación (teorema de Kelvin) a partir de la ec. (5.42):

$$\frac{d\Gamma_C}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{l} + \oint_C \mathbf{u} \cdot \frac{d(d\mathbf{l})}{dt} \quad (5.52)$$

El segundo término del miembro derecho es nulo como antes. Para evaluar el primero, en lugar de la ecuación de Euler (como hicimos antes), usaremos la ecuación de Navier-Stokes (ec. (4.22)) escrita en la forma

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (5.53)$$

donde con \mathbf{f} indicamos la aceleración debida a las fuerzas de volumen (ahora no necesariamente conservativas) y $\nu = \eta / \rho$ es el coeficiente de *viscosidad cinemática*. Sustituyendo la (5.53) en (5.52) obtenemos

$$\frac{d\Gamma_C}{dt} = \oint_C \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} - \oint_C \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\mathbf{l} + \oint_C \nu \nabla^2 \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{I} + \mathbf{II} + \mathbf{III} \quad (5.54)$$

Examinemos ahora el significado físico de los tres términos **I**, **II**, **III**.

Fuerzas de volumen no conservativas

Corresponden al término **I**. Las fuerzas que no derivan de un potencial, y que por lo tanto tienen una circulación no nula alrededor de un circuito cerrado, *crean circulación* en el fluido. En hidrodinámica se presentan dos casos importantes.

Las fuerzas de Coriolis

Estas fuerzas aparecen cuando se estudia el movimiento de un fluido en un referencial que rota con una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$, bajo la forma de un término $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$. Por ejemplo, los flujos en la atmósfera y en los océanos tienen lugar en un referencial que gira con la velocidad angular local debida a la rotación terrestre, cuya magnitud para un lugar cuya latitud es θ tiene el valor

$$\Omega = \Omega_0 \cos \theta \quad , \quad \Omega_0 = 2\pi / (24 \text{ horas}) = 7.2 \times 10^{-5} \text{ radianes/s} \quad (5.55)$$

Debido a la fuerza de Coriolis se generan movimientos de circulación ciclónica en la atmósfera terrestre, cuyo sentido depende del hemisferio considerado. El término de Coriolis domina cuando es superior a los efectos de la aceleración convectiva $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$. La razón de las amplitudes de ambos efectos es del orden de

$$\frac{\text{efectos convectivos}}{\text{efectos de Coriolis}} \approx \frac{U^2 / L}{\Omega U} \approx \frac{U}{\Omega L} \equiv \text{Ro} \quad (5.56)$$

El número puro Ro se denomina número de Rossby. El efecto de las fuerzas de Coriolis prevalece cuando Ro es pequeño, lo que se cumple al nivel de los movimientos atmosféricos de gran escala ($L \approx 10^6$ m, $U \approx 1 - 10$ m/s).

Las fuerzas magnetohidrodinámicas

También se crea vorticosidad por efecto de las fuerzas producidas por campos magnéticos sobre las corrientes eléctricas que circulan en fluidos conductores. En efecto, estas fuerzas son de la forma $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ (\mathbf{j} es la densidad de corriente y \mathbf{B} el campo magnético) y comunican al fluido una componente de rotación. Ejemplos de fluidos conductores son los metales líquidos (como el mercurio, el sodio líquido que se usa como refrigerante en los reactores nucleares autofertilizantes, y el núcleo terrestre) y los plasmas. En el caso del núcleo terrestre, la circulación inducida por los movimientos convectivos radiales dan origen al magnetismo terrestre, pues existe un acoplamiento entre el campo magnético creado por el movimiento del fluido conductor y el movimiento mismo del fluido (efecto dínamo).

Flujos no barotrópicos

Corresponden al término **II** de la (5.54), que existe cuando ∇p y $\nabla \rho$ no son paralelos. Consideremos un elemento del fluido (ver Fig. 5.5): tendremos en este caso que el baricentro del elemento (determinado por la estratificación de densidad) no coincide con el centro de aplicación del empuje de Arquímedes (relacionado con el gradiente de la presión del fluido que rodea al elemento). Por lo tanto aparece una cupla que tiende a producir la rotación del elemento y por lo tanto genera circulación de la velocidad. Un ejemplo de flujo no barotrópico es el que ocurre en un fluido comprendido entre dos placas verticales que están a diferentes temperaturas. En este caso las variaciones de densidad que ocurren por efecto de la expansión térmica inducen un flujo de convección en el cual el fluido del lado de la placa caliente asciende mientras que el que está del lado de la placa fría desciende.

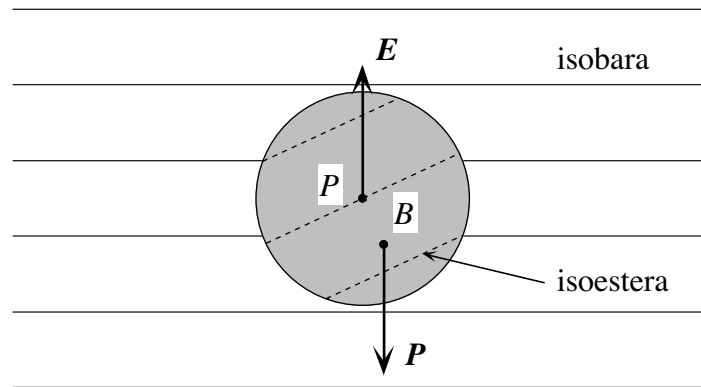


Fig. 5.5. Fuerzas de empuje y peso en un flujo no barotrópico. Cuando el gradiente de la presión y de la densidad no son paralelos, el punto de aplicación del empuje E (determinado por las isobaras del fluido exterior) y el baricentro de un elemento del fluido (determinado por las isoesteras) no se encuentran sobre una línea vertical. Aparece entonces una cupla que produce la rotación local del líquido e induce una circulación de la velocidad.

Efectos de la viscosidad

Están dados por el término **III** de la (5.54). La viscosidad ocasiona gradientes de la velocidad en las inmediaciones de las paredes y por lo tanto genera vorticidad. Un ejemplo es un fluido contenido dentro de un cilindro, que inicialmente está en reposo y en un momento dado comienza a girar alrededor de su eje con una velocidad angular uniforme. El fluido en contacto con las paredes comienza a girar, y el movimiento de rotación se transmite paulatinamente al resto del fluido hasta que finalmente se alcanza un estado estacionario en el cual todo el fluido rota en bloque con la misma velocidad angular que el cilindro. Es el transporte de la vorticidad debido a la viscosidad lo que origina este proceso. Volveremos sobre este tema más adelante, cuando estudiemos la difusión de la vorticidad.

Clasificación de las diferentes clases de flujos

Hacemos ahora un breve digresión para poner orden en los flujos que hemos mencionado hasta aquí. A este punto, efectivamente, quien se acerca por la primera vez a la Mecánica de Fluidos se puede sentir apabullado por la terminología que designa la gran variedad de flujos que hemos presentado, las diferentes ecuaciones que los rigen, las maneras de describirlos, y sus principales características. Puede ser útil como ayuda memoria presentar un cuadro de situación, o esquema conceptual, que permita visualizar la información toda esta información. Nuestro esquema se basa en clasificar al flujo de acuerdo con los cinco criterios siguientes:

- (a) si es o no viscoso,
- (b) si es incompresible (y entonces $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$), o compresible,
- (c) si tiene o no alguna simetría (por ejemplo plana o axial),
- (d) si es barotrópico (y entonces el término $\rho^{-1}\nabla p$ se puede poner bajo la forma de un gradiente), o no lo es,
- (e) si es irrotacional (y entonces $\nabla \times \mathbf{u} = 0$) o no.

De acuerdo con estos criterios hay 18 variedades de flujos (los criterios no son independientes, por ejemplo un flujo irrotacional es necesariamente invíscido y barotrópico). En la Fig. 5.6

representamos nuestro esquema como un mapamundi de los flujos. El lector debe pensar que los bordes superior e inferior del mapa están unidos, de modo se forma un cilindro, y que también los bordes izquierdo y derecho se unen, de modo que el cilindro se cierra sobre sí mismo formando un toroide, o rosquilla. Tuvimos que cortar el toroide en un plano poloidal y uno toroidal para desplegarlo y producir una figura plana.

Con la ayuda de la Fig. 5.6, el lector puede ubicar los diferentes tipos de flujo que hemos mencionado y los que trataremos en los siguientes Capítulos, que aparecen como regiones del mapa, y recordar las condiciones que satisfacen y cuáles ecuaciones los rigen.

		viscoso		no viscoso (ideal)					
compresible		18	17	9	10		no barotrópico		
		16	15	ϕ 6	7	8	barotrópico		
incompresible		14	13	3 ϕ, ψ	4	5	barotrópico		
		12	11 ψ	1	2		no barotrópico		
		3-D	2-D		3-D				
				irrotacional					

Fig. 5.6. Diferentes variedades de flujos. De acuerdo con los 5 criterios de clasificación existen diversas clases de flujos, que se representan por medio de las regiones numeradas de 1 a 18 en que hemos dividido el rectángulo, de acuerdo con los criterios que se expresan alrededor de su perímetro (el orden de numeración es arbitrario). Las áreas gris mediano más la región 3 representan los flujos bidimensionales incompresibles para los cuales se puede definir la función corriente ψ (ver Capítulo 6). Las áreas gris claro junto con la 3 corresponden a los flujos invíscidos, barotrópicos e irrotacionales para los cuales se puede definir el potencial de velocidad ϕ . La región 3 (gris oscuro) comprende los flujos potenciales incompresibles y planos o axialmente simétricos para los cuales se pueden definir tanto ϕ como ψ , y en consecuencia el potencial complejo $w = \phi + i\psi$ (ver Capítulo 6).

Esta clasificación no exhaustiva, pues dentro de cada provincia hay subdivisiones o distritos, según si el flujo es estacionario o depende del tiempo, dentro de los flujos incompresibles si la densidad es uniforme o si hay estratificaciones, etc.. No se han dibujado en la Fig. 5.6 para no complicarla demasiado, pero si fuese necesario se podrían trazar mapas parciales para mostrar esos detalles.