

4. ECUACIONES BÁSICAS DE LA DINÁMICA DE FLUIDOS

Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

La ecuación de movimiento de un fluido expresa la Segunda Ley de Newton, esto es, que la tasa de cambio de la cantidad de movimiento de una dada porción de fluido es igual a la resultante de las fuerzas que actúan sobre esta porción. Existen diferentes formas, todas equivalentes, de escribir esta Ley.

Forma integral Lagrangiana (volumen material)

Sea V un volumen material rodeado por una superficie (obviamente también material) S . La cantidad de movimiento contenida en V es

$$\int_V \rho \mathbf{u} dV \quad (4.1)$$

Su derivada total respecto del tiempo (derivada material) es

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{u}) dV + \int_V \rho \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{u}) dV = \int_V \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dV \quad (4.2)$$

donde usamos la ecuación de conservación de la masa para simplificar la expresión. Entonces, la derivada de la cantidad de movimiento contenida en el volumen V , es simplemente la suma de los productos de las masas (ρdV) por las aceleraciones ($d\mathbf{u}/dt$) de los elementos infinitesimales que integran el volumen material finito V .

En general, sobre una porción dada de fluido actúan fuerzas de volumen y de superficie, cuya resultante debe ser igual a la derivada temporal de la cantidad de movimiento. Si indicamos con \mathbf{g} la resultante de las fuerzas de volumen (por unidad de masa), tenemos,

$$\int_V \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dV = \int_V \rho \mathbf{g} dV + \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.3)$$

Si transformamos el último término en otra integral de volumen (por el Teorema de Green),

$$\int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV \quad (4.4)$$

el balance de cantidad de movimiento se expresa como

$$\int_V \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} dV = \int_V (\rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV \quad (4.5)$$

La (4.5) es la forma integral Lagrangiana de la ecuación de movimiento.

Forma diferencial Lagrangiana

La relación integral (4.5) vale para una elección arbitraria del volumen material sobre el cual se integra. Por lo tanto en todos los puntos del fluido se debe cumplir

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho g + \nabla \cdot \sigma \quad (4.6)$$

Esta ecuación diferencial expresa la aceleración del fluido en términos de la fuerza de volumen y la divergencia del tensor de los esfuerzos, y se conoce como *ecuación de movimiento*.

Las fuerzas de superficie contribuyen a la aceleración del fluido sólo si el tensor de los esfuerzos varía con la posición, más precisamente, sólo si la divergencia de σ no es nula. Cuando $\nabla \cdot \sigma = 0$, el efecto de las fuerzas de superficie sobre un elemento material es el de deformarlo, pero sin cambiar su cantidad de movimiento.

Forma integral Euleriana (volumen fijo)

La mayoría de los problemas de la Mecánica de Fluidos requiere el uso de la ecuación de movimiento en la forma diferencial (4.6), pero hay algunos casos importantes en los cuales es útil disponer de una relación integral que exprese el balance de la cantidad de movimiento para un volumen fijo del espacio.

Consideremos entonces un volumen V fijo (no material) cerrado por una superficie S (obviamente, también fija). La derivada temporal local de la cantidad de movimiento contenida en V , debe ser igual a las fuerzas que actúan sobre el fluido en V (ya sea de volumen, ya sea ejercidas a través de la superficie S) *menos* el flujo neto de la cantidad de movimiento que sale a través de S . Esto se expresa como sigue:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) dV = \int_V \rho g dV + \oint_S \sigma \cdot n dS - \oint_S \rho u (u \cdot n) dS \quad (4.7)$$

o, en notación indicial,

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) dV = \int_V \rho g_i dV + \oint_S \sigma_{ij} \cdot n_j dS - \oint_S \rho u_i (u_j \cdot n_j) dS \quad (4.8)$$

Las dos últimas integrales se pueden convertir, con toda generalidad, en integrales de volumen de la forma

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) dV = \int_V \left[\rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) \right] dV \quad (4.9)$$

y obtenemos así la expresión buscada.

Forma diferencial Euleriana

Como la relación anterior vale para cualquier volumen fijo V , sigue que

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) \quad (4.10)$$

Desarrollando las derivadas de los productos y llevándolos al primer miembro,

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.11)$$

La suma del segundo y tercer término del miembro izquierdo es nula por la ecuación de conservación de la masa, y queda

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.12)$$

o, en notación vectorial

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (4.13)$$

Obsérvese que la forma diferencial Euleriana (4.13), se podría también haber obtenido directamente a partir de la forma Lagrangiana (4.6), empleando la relación entre operadores

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (4.14)$$

que tiene en cuenta el movimiento del fluido a través de la superficie S por medio del término convectivo $\mathbf{u} \cdot \nabla$.

Para utilizar la ecuación de movimiento en cualquiera de sus formas (ecs. (4.5), (4.6), (4.9) y (4.10)) hace falta conocer \mathbf{g} y $\boldsymbol{\sigma}$ como funciones de \mathbf{r} y t , eventualmente a través de ρ , \mathbf{u} , etc.. En lo que hace a las fuerzas de volumen, por ahora nos limitaremos a la gravedad ($\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$, donde \mathbf{e}_z es el versor en la dirección vertical). Discutiremos ahora las diferentes formas que puede tomar la ecuación del movimiento de acuerdo a la forma del tensor de los esfuerzos.

La hipótesis del equilibrio termodinámico local

Ya vimos en el Capítulo 1 que en un fluido en reposo $\boldsymbol{\sigma}$ toma la forma particular

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} \quad (4.15)$$

donde la presión p está determinada por los parámetros termodinámicos del medio (densidad y temperatura), definidos para fluidos *en equilibrio* por medio de la ecuación de estado.

Conocemos la ecuación de estado para algunos fluidos especiales, por ejemplo para los gases perfectos se tiene (ec. (2.19)) que

$$p = \rho RT / \mu \quad (4.16)$$

Resulta útil recordar brevemente el modelo cinético que está a la base de esta ecuación, a fin de aclarar algunas cuestiones.

En los cursos elementales el modelo del gas ideal se presenta suponiendo que las partículas del gas (moléculas, iones, electrones, etc.) rebotan elásticamente contra la pared material del recipiente que contiene el gas. A primera vista, esta imagen es demasiado restringida pues parece

ser, en la práctica, tan sólo una razonable (aunque grosera) aproximación de la compleja fenomenología involucrada en la interacción de un gas con una pared sólida.¹

Pero en realidad, el aspecto esencial del modelo es que *en el equilibrio* (y por lo tanto, en un gas en reposo), los parámetros termodinámicos y mecánicos del gas tienen igual valor de ambos lados (digamos lado 1 y lado 2) de toda superficie ideal en su seno. Por lo tanto, en promedio, el efecto de la migración de moléculas (por la agitación térmica) desde el lado 1 hacia el lado 2 se compensa exactamente con el efecto de la migración de moléculas desde 2 hacia 1, de manera que el resultado neto es nulo, tanto en lo referente a la concentración, como en cuanto al transporte de la cantidad de movimiento y de la energía². Naturalmente, cuando no hay equilibrio termodinámico (y con más razón, cuando no existe reposo), el balance del transporte desde 1 hacia 2 y desde 2 hacia 1 *no es exacto*. Por lo tanto, estrictamente hablando, el modelo no se podría aplicar, y el concepto de presión perdería validez.

Sin embargo, en la práctica hay una gran variedad de casos en los cuales los efectos de los apartamientos del equilibrio termodinámico (o del reposo) son pequeños. Gracias a ello, para cada elemento infinitesimal del fluido se pueden seguir usando las variables termodinámicas de equilibrio, y también se puede definir la presión. En estos casos se dice que hay *equilibrio termodinámico local*.³ Los efectos asociados con la falta de equilibrio termodinámico sobre escalas espaciales grandes (como la difusión de partículas y la difusión térmica), y con el movimiento (la difusión de la cantidad de movimiento, es decir la fricción interna) se agregan como correcciones. Este punto de vista es, precisamente, el que se adopta en la Mecánica de Fluidos. De acuerdo con la hipótesis del equilibrio termodinámico local, podemos entonces afirmar que

En un fluido en movimiento, el tensor de los esfuerzos tiene la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}' \quad (4.17)$$

donde el tensor isótropo $-p\mathbf{I}$ se define como si el fluido se encontrara en reposo, a partir de los parámetros termodinámicos de equilibrio correspondientes a cada punto, y $\boldsymbol{\sigma}'$ es aquella parte del tensor de los esfuerzos que se debe agregar para dar cuenta de los efectos del movimiento.

Debe quedar claro que $\boldsymbol{\sigma}'$ depende del estado del movimiento en el entorno de cada punto, o movimiento relativo, expresado matemáticamente por el tensor $\nabla\mathbf{u}$, y que tiende a cero si no hay movimiento relativo. El tensor $\boldsymbol{\sigma}'$ está asociado al transporte microscópico de cantidad de

¹ Ni que hablar del caso de un plasma, el cual sin embargo se comporta como un gas perfecto cuando está completamente ionizado.

² En cuanto a los efectos estadísticos, esto equivale a suponer que las moléculas que se dirigen de 1 a 2 rebotan elásticamente en la superficie ideal, y que lo mismo ocurre con las que se dirigen de 2 a 1.

³ El hecho que pueda existir equilibrio termodinámico local en un sistema que globalmente está fuera del equilibrio se debe a dos motivos. Primero, que toda porción diminuta (en escala macroscópica) del medio contiene un número muy grande de moléculas y por lo tanto le podemos aplicar consideraciones estadísticas y definir sus variables termodinámicas. Segundo, que el tiempo necesario para que se establezca el equilibrio dentro de la parcela es sumamente breve en comparación con el tiempo necesario para que los procesos de transporte logren establecer el equilibrio de la parcela con el resto del sistema (esto es cierto siempre y cuando los gradientes de concentración, temperatura, etc. no sean demasiado grandes). Aceptaremos este hecho sin demostración, ya que la demostración requiere consideraciones de teoría cinética que escapan al nivel de esta presentación.

movimiento debido a la diferente velocidad macroscópica que poseen elementos de fluido adyacentes (y que se manifiesta macroscópicamente como una fricción interna). Puesto que estos elementos intercambian moléculas (y hay interacciones atractivas entre las moléculas cercanas a la superficie que separa ambos elementos), cabe esperar que el transporte de cantidad de movimiento tienda a *reducir* la diferencia de velocidad entre elementos cercanos. Subrayamos que este efecto *no* está relacionado con las colisiones entre las moléculas, sino con la *migración* de moléculas desde un elemento de fluido a los elementos adyacentes, y viceversa.

Es oportuno también aclarar aquí que el carácter isótropo de la parte $-p\mathbf{I}$ que se sustrae al tensor de los esfuerzos para formar $\boldsymbol{\sigma}'$ *no debe* hacernos creer que $\boldsymbol{\sigma}'$ sea un tensor de traza nula. Lo que estamos haciendo, al descomponer $\boldsymbol{\sigma}$ en una parte isótropa más un tensor $\boldsymbol{\sigma}'$, es separar la parte de $\boldsymbol{\sigma}$ que *no depende* del estado del movimiento relativo (que es isótropa) de la parte que *sí depende* de dicho estado de movimiento. Por lo tanto $\boldsymbol{\sigma}'$ no tiene porqué ser de traza nula, sino que a su vez se podrá descomponer en una parte isótropa y otra de traza nula.

La ecuación de Euler

Queda todavía el problema de calcular $\boldsymbol{\sigma}'$. Pero antes de ocuparnos de ese tema es importante observar que en muchos casos, las fuerzas debidas a $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}'$ son muy pequeñas respecto de la fuerza debida al gradiente de la presión. Cuando eso ocurre podemos, en primera aproximación, *ignorar* el efecto de $\boldsymbol{\sigma}'$. En estos casos el tensor de los esfuerzos se reduce al que existiría en un fluido en reposo con la misma distribución de densidad y temperatura (y, eventualmente, de otros parámetros termodinámicos). Por lo tanto

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} \quad , \quad p = p(\rho, T, \dots) \quad (4.18)$$

y la correspondiente ecuación de movimiento es

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p \quad (4.19)$$

que se conoce como *Ecuación de Euler*. Los flujos que cumplen la (4.19) se denominan *flujos ideales*. Más adelante estableceremos criterios prácticos para determinar cuándo y donde un flujo se puede considerar ideal y por lo tanto se puede describir mediante la (4.19).

Relaciones constitutivas para fluidos Newtonianos

Cuando el tensor $\boldsymbol{\sigma}'$ no es despreciable necesitamos *relaciones constitutivas* o *reológicas* que nos permitan calcularlo. Este es un problema sumamente complejo, pero afortunadamente en muchos casos es suficiente con la aproximación más sencilla, que se conoce como de *fluido Newtoniano*.

Dicha aproximación se funda en las tres hipótesis que enunciamos a continuación.

(a) *Una rotación pura alrededor de un punto no contribuye al tensor de los esfuerzos en ese punto*. Esto es aceptable porque tal movimiento mantiene constantes las distancias entre puntos materiales y entonces no genera fricción interna. Por lo tanto la parte antisimétrica del tensor de las derivadas de la velocidad *no interviene* en la determinación de $\boldsymbol{\sigma}'$.

(b) *Existen relaciones lineales entre las componentes de $\boldsymbol{\sigma}'$ y las componentes del tensor velocidad de deformación $\boldsymbol{\epsilon}$* . Claramente esta hipótesis es una aproximación razonable, en tanto y en

cuanto los gradientes de las componentes de \mathbf{u} se puedan considerar constantes sobre distancias del orden del alcance de las fuerzas de superficie.

(c) *La parte isotrópica* $[\text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon})/3]\mathbf{I}$ (asociada a las compresiones o expansiones) y *la parte anisótropa* $\boldsymbol{\epsilon}'$ (asociada con las deformaciones puras) de $\boldsymbol{\epsilon}$ contribuyen con coeficientes diferentes al tensor de los esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}'$. Por lo tanto escribiremos

$$\boldsymbol{\sigma}' = 2\eta\boldsymbol{\epsilon}' + \zeta(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} \quad (4.20)$$

En resumen, agrupando los dos términos isotrópicos del tensor de los esfuerzos, éste se expresa como sigue:

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p + \zeta \nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + 2\eta\boldsymbol{\epsilon}' \quad (4.21)$$

Se puede demostrar sin dificultad que la tendencia de las fuerzas dependientes de la velocidad a reducir la diferencia de velocidad entre capas cercanas, implica que tanto η como ζ son *positivos*. Estos parámetros se denominan *coeficientes de viscosidad* y tienen la dimensión de densidad por velocidad por distancia, por ejemplo en el sistema cgs se miden en $\text{g cm}^{-1}\text{s}^{-1}$.

Es interesante considerar los signos de los dos términos que contribuyen a la parte isotrópica. Dado que la presión no depende del estado de movimiento, si consideramos un elemento de volumen esférico, el fluido en su interior empuja siempre hacia afuera⁴ por efecto de este término. No ocurre lo mismo con el término $\nabla \cdot \mathbf{u}$: si el volumen se está expandiendo ($\nabla \cdot \mathbf{u} > 0$), el término es positivo y se opone a la expansión. Viceversa si el volumen se está comprimiendo ($\nabla \cdot \mathbf{u} < 0$), el término es negativo y se opone a la compresión. Por lo tanto este término da lugar a fuerzas que se oponen tanto a la expansión como a la compresión, y son proporcionales a la rapidez con éstas se producen.

En general η y ζ son funciones del estado termodinámico del fluido y por lo tanto dependen de la temperatura y de la presión. El segundo coeficiente de viscosidad, ζ , es difícil de medir y su valor no se conoce para muchos fluidos para los cuales se conoce η . Los coeficientes de viscosidad de un gas aumentan con la temperatura. Para el caso de un gas de esferas rígidas, no es difícil mostrar con base en la Teoría Cinética que $\eta \propto \sqrt{T}$ y que no depende de la presión. En el caso de los líquidos es más complicado estimar η , pero se puede justificar teóricamente que debe decrecer con la temperatura, en contraste con lo que ocurre en los gases.

La Ecuación de Navier-Stokes

La expresión (4.21) del tensor de los esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ se debe introducir en la ecuación general de movimiento (4.6), pero como η y ζ dependen de la temperatura y de la presión (que en general no son uniformes en el fluido) no los podemos sacar fuera del operador divergencia.

En muchos casos, sin embargo, los coeficientes de viscosidad no varían apreciablemente en el flujo y los podemos considerar constantes. Por lo tanto, la ecuación de movimiento del fluido es

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho\mathbf{g} - \nabla p + \zeta \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \eta \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.22)$$

⁴ Esto es verdad si la presión es positiva, cosa que ocurre siempre en los gases, pero en los líquidos pueden existir presiones negativas como ya mencionamos en el Capítulo 1.

Si $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, lo cual equivale a $\rho = \text{cte.}$, se obtiene la importante *ecuación de Navier-Stokes*:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.23)$$

que describe flujos viscosos incompresibles de fluidos Newtonianos.

Ecuación de la energía

Se puede adquirir una visión más amplia del efecto de las fuerzas de superficie en el movimiento del fluido, considerando el balance de energía en un elemento material de volumen δV limitado por la superficie (material) δS .

Las fuerzas de volumen y de superficie realizan trabajo sobre el fluido en δV , y al mismo tiempo puede haber transferencia de calor a través del contorno δS . Parte de la ganancia neta de energía se manifiesta como un incremento de la *energía cinética* del fluido y, el resto, de acuerdo con la Primera Ley de la Termodinámica, aparece como un aumento de la *energía interna* del fluido. Por lo tanto

$$\frac{dE}{dt} = P + \frac{dQ}{dt} \quad (4.24)$$

donde E es la energía del elemento material, P es la potencia desarrollada por las fuerzas que actúan sobre él, y dQ/dt es el flujo neto de calor (por unidad de tiempo) que entra al elemento. Analizaremos este balance para deducir una ecuación diferencial válida en cada punto del fluido, que exprese el balance de energía para una dada masa de fluido.

La potencia (trabajo por unidad de tiempo) desarrollada sobre δV es la suma de la contribución debida a la resultante de las fuerzas de volumen más la contribución debida a las fuerzas de superficie que actúan sobre δS :

$$P = \int_{\delta V} \rho u_i g_i dV + \oint_{\delta S} u_i \Sigma_i dS \quad (4.25)$$

donde el último término se puede escribir como

$$\oint_{\delta S} u_i \Sigma_i dS = \oint_{\delta S} u_i \sigma_{ij} n_j dS = \int_{\delta V} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \sigma_{ij}) dV \quad (4.26)$$

Debe quedar en claro que esta integral no se debe confundir con el trabajo efectuado por la *resultante* de las fuerzas de superficie sobre δV .

De (4.25) y (4.26) obtenemos la potencia neta *por unidad de masa* \mathcal{P} desarrollada sobre un elemento material

$$\mathcal{P} = u_i g_i + \frac{u_i}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\sigma_{ij}}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (4.27)$$

El segundo término de (4.27) (que proviene del trabajo de las fuerzas de superficie) está relacionado con la pequeña diferencia que hay entre los esfuerzos sobre las caras opuestas del elemento, y contribuye junto el primero (que proviene de las fuerzas de volumen) a la *ganancia de*

energía cinética por unidad de masa de todo el volumen. En efecto, si usamos la ecuación de movimiento general (4.6) tenemos que los primeros dos términos del miembro derecho de la (4.27) se combinan para dar

$$u_i \frac{du_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) \quad (4.28)$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = u_i g_i + \frac{u_i}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.29)$$

El tercer término de la (4.27), esto es

$$\frac{\sigma_{ij}}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (4.30)$$

está relacionado con la pequeña diferencia de velocidades que hay entre las caras opuestas del elemento, y proviene del trabajo realizado para *deformar* el elemento, sin cambiar su velocidad. Este *trabajo de deformación* se manifiesta completamente como un aumento de la *energía interna* del fluido.

Por otro lado, la energía interna del fluido también se ve afectada por la cantidad de calor neta que ingresa al elemento de volumen. Supondremos que el calor se transfiere por conducción molecular. Entonces, la tasa de ganancia de calor por conducción a través de δS es

$$\oint_{\delta S} k \frac{\partial T}{\partial x_i} n_i dS = \int_{\delta V} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) dV \quad (4.31)$$

donde T es la temperatura local y k la conductividad térmica del fluido. Luego, el calor ganado por el elemento de fluido, por unidad de tiempo y de masa, es,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (4.32)$$

De esta manera, la tasa de variación de la energía interna por unidad de masa, e , viene dada por

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sigma_{ij}}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (4.33)$$

La expresión del primer término se puede simplificar si se descompone el tensor $\partial u_i / \partial x_j$ en una parte simétrica y otra antisimétrica, pues el producto saturado de σ_{ij} con la parte antisimétrica es idénticamente nulo. Así obtenemos

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (4.34)$$

donde ε_{ij} es la parte simétrica de $\partial u_i / \partial x_j$.

Si ahora introducimos la expresión general (4.21) de σ_{ij} , que obtuvimos en la sección anterior para fluidos Newtonianos en la ec. (4.34) para la tasa de variación de la energía interna, y suponemos que el segundo coeficiente de viscosidad ζ es nulo, encontramos

$$\frac{de}{dt} = -\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{2\eta}{\rho} \left[\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (4.35)$$

Para interpretar el primer término del miembro derecho de la (4.35) podemos observar que en virtud de la ecuación de continuidad tenemos que $\nabla \cdot \mathbf{u} = \delta V^{-1} d\delta V / dt$, de modo que

$$-\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{p}{\delta M} \frac{d\delta V}{dt} \quad (4.36)$$

pues $\rho \delta V = \delta M$ es la masa del elemento material. Por lo tanto este término representa la potencia por unidad de masa desarrollada por la presión (isótropa) en la expansión o compresión del elemento de volumen; es negativo (e disminuye) si hay expansión y positivo (e aumenta) si hay compresión.

En cuanto al segundo término, conviene escribirlo en la forma

$$\frac{2\eta}{\rho} \left[\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \right] = \frac{2\eta}{\rho} \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij} \right)^2 \quad (4.37)$$

que es una identidad pues $\delta_{ii} = 3$ y $\varepsilon_{ii} = \nabla \cdot \mathbf{u}$. De esta manera vemos que este término es definido positivo, mostrando que cualquier deformación del fluido está inevitablemente acompañada por una transformación de la energía mecánica asociada con el movimiento en energía interna del fluido. En consecuencia podemos definir la *tasa de disipación de energía mecánica por unidad de masa*, debida a la viscosidad como

$$\phi = \frac{2\eta}{\rho} \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij} \right)^2 \quad (4.38)$$

Nótese que la disipación de energía mecánica debida a la viscosidad es equivalente en sus efectos a una transferencia irreversible de calor.

En resumen, el primer término de la expresión de la tasa de variación de la energía interna por unidad de masa de/dt representa los cambios *reversibles* asociados con las deformaciones isótropas, y el segundo término representa los cambios *irreversibles* asociados con las deformaciones puras.

Si tomamos en cuenta el término $\zeta (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}$ del el tensor de los esfuerzos, podemos ver fácilmente que también las compresiones y expansiones puras dan lugar a una disipación irreversible. En efecto, en este caso aparece un término adicional en de/dt que es proporcional a $\zeta (\nabla \cdot \mathbf{u})^2$ y por lo tanto es siempre positivo de modo que lleva a una aumento de e . Este efecto está ligado con el cambio de signo del término $\zeta (\nabla \cdot \mathbf{u})$ cuando se considera un volumen en expansión o en compresión, de resultas de lo cual en ambos casos el trabajo tiene el mismo signo (positivo).

Resumiendo nuestros resultados, tenemos que la tasa de variación de la energía por unidad de masa está dada por

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) + \frac{de}{dt} \quad (4.39)$$

donde la tasa de variación de la energía cinética por unidad de masa está dada por la ec. (4.29) y la tasa de variación de la energía interna por unidad de masa está dada por la ec. (4.34).

Propiedades termomecánicas de fluidos reales

Antes de concluir este Capítulo conviene hacer algunos breves comentarios acerca de las limitaciones de algunas de las hipótesis que hemos hecho en lo referente al comportamiento de los fluidos.

Ecuación de estado

La ecuación de estado de los gases ideales es una razonable aproximación al comportamiento de un gas real, siempre y cuando se encuentre a una temperatura elevada (en relación con la temperatura crítica) y su densidad sea muy baja. En estas condiciones se pueden despreciar las interacciones entre las moléculas y éstas se pueden suponer puntiformes. Con estas hipótesis la Teoría Cinética permite deducir la ecuación de estado del gas ideal

$$pV = nRT \quad (4.40)$$

Sin embargo, hay muchos flujos de interés práctico de gases o vapores a baja temperatura y alta densidad (por ejemplo flujos bifásicos en los que participan un líquido junto con su vapor, como ocurren en condensadores y otros dispositivos industriales). En estos casos puede ser necesario utilizar una mejor aproximación de la ecuación de estado real, que tome en cuenta aproximadamente los efectos que hemos despreciado. Una fórmula muy usada es la *ecuación de estado de van der Waals*

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2} \right) (V - nb) = nRT \quad (4.41)$$

En la (4.41) a y b son constantes características del gas, cuyo significado físico se desprende de lo siguiente:

- el término an^2/V^2 proviene de que la presión que ejerce un gas real es menor que la de un gas ideal debido a las fuerzas de atracción entre las moléculas; este efecto es proporcional a la probabilidad de que dos moléculas interactúen, que a su vez es proporcional al cuadrado de la densidad (proporcional a n/V).
- el término nb proviene de que las moléculas tienen un volumen finito y por lo tanto el volumen del gas no se puede reducir a valores arbitrariamente pequeños.

La ecuación de (4.41) es puramente empírica y si bien da cuenta cualitativamente del comportamiento de los gases reales, no es muy exacta del punto de vista cualitativo. Otra ecuación que se suele emplear es la *ecuación de estado virial*, que se funda en un tratamiento estadístico de las interacciones intermoleculares. Para los líquidos, no se conocen ecuaciones de estado exactas y sencillas basadas en teorías fundamentales, de modo que en la práctica se emplean coeficientes fenomenológicos determinados experimentalmente.

De la ecuación de estado se derivan ciertas propiedades de los fluidos que son de interés para nosotros, y que vamos a discutir brevemente a continuación.

Compresibilidad

Cuando se debe tomar en cuenta la compresibilidad del gas, hay que tener presente que la ecuación de estado depende fuertemente de la temperatura y por lo tanto la respuesta a los esfuerzos de compresión depende de qué pasa con la temperatura durante el proceso. Podemos considerar dos casos límite, según si la compresión ocurre muy lentamente o bien muy rápidamente.

Si la compresión de una parcela del gas es muy lenta, intercambiará calor con el gas que la rodea y/o con las paredes del recipiente que lo contiene. Por lo tanto se mantendrá a temperatura constante durante el proceso. La respuesta del gas a un esfuerzo de compresión está entonces determinada por el *módulo de compresión isotérmica* k_T , definido como

$$k_T \equiv -V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T \quad (4.42)$$

Para un gas ideal, resulta de la (4.40) que

$$k_T = p \quad (4.43)$$

Si en cambio la compresión es muy rápida, no habrá intercambio de calor entre la parcela y el gas que la rodea y/o con las paredes del recipiente que lo contiene. Por lo tanto el proceso será adiabático, y la entropía del gas se mantendrá constante. La respuesta del gas está entonces determinada por el *módulo de compresión adiabático* k_S , definido como

$$k_S \equiv -V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_S \quad (4.44)$$

Para un gas ideal, resulta de la (4.40) que

$$k_S = \gamma p \quad (4.45)$$

donde γ es el coeficiente adiabático, que ya introdujimos en el Capítulo 2 al tratar el equilibrio de la atmósfera.

En situaciones intermedias, en que hay cierto intercambio de calor, pero no lo suficiente para que el proceso sea isotérmico, se pueden definir módulos de compresión politrópicos, con valores intermedios entre k_T y k_S .

En cuanto a los líquidos, la hipótesis de incompresibilidad se cumple razonablemente bien en la mayoría de los casos, dado que la materia condensada es poco compresible porque los átomos y moléculas están dispuestos en arreglos compactos. Sin embargo hay situaciones en las cuales se debe tomar en cuenta la compresibilidad (por ejemplo al estudiar la propagación del sonido, como haremos más adelante). Bien por debajo de la temperatura crítica, la energía cinética de las moléculas de un líquido es pequeña frente a la energía potencial de las fuerzas intermoleculares, por lo tanto el trabajo de compresión incrementa fundamentalmente a esta última. En consecuencia no hay diferencia apreciable entre los módulos de compresión isotérmico y adiabático y

se suele hablar de *módulo de compresión* k , a secas. Valores de k para algunos líquidos son⁵: para el agua 20 kb, para el benceno 97 kb, para el mercurio 3.8 kb.

Expansión térmica

Cuando la temperatura de un fluido no es uniforme es preciso tomar en cuenta las variaciones de densidad que ocurren debido a la expansión térmica. El parámetro que mide este efecto es el *coeficiente de expansión térmica* a presión constante⁶, α_p , que mide la variación de volumen de un elemento del fluido por efecto de una variación de temperatura:

$$\alpha_p \equiv \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (4.46)$$

Para un gas ideal, la ecuación de estado (4.40) nos da simplemente

$$\alpha_p = \frac{1}{T} \quad (4.47)$$

Para los líquidos, el coeficiente de expansión térmica es mucho menor que el de un gas, y se puede considerar constante en un amplio rango de temperaturas. Su orden de magnitud varía entre 10^{-5} y $10^{-6} \text{ }^\circ\text{K}^{-1}$.

Fluidos no Newtonianos

El modelo de fluido Newtoniano es de gran utilidad y se aplica a muchas situaciones, pero también se dan muchos casos de gran interés en que el comportamiento de los fluidos no se describe adecuadamente mediante relaciones constitutivas lineales e independientes del tiempo como la (4.20). La rama de la Mecánica que estudia las relaciones constitutivas apropiadas a tales casos es la Reología. Nosotros no vamos a desarrollar en detalle este tema, y remitimos al lector a la bibliografía especializada. Aquí nos limitaremos a una breve discusión con el propósito que el estudiante se forme una idea general acerca de los fluidos no Newtonianos.

El problema fundamental de la Reología consiste en determinar, en cada punto del medio, la relación entre el tensor de los esfuerzos $\boldsymbol{\sigma}$ y el estado de deformación (que para un fluido está determinado por el tensor velocidad de deformación $\boldsymbol{\epsilon}$). Para fijar ideas, consideremos un experimento ideal para estudiar la viscosidad, en el cual el fluido ocupa el espacio entre dos placas planas paralelas⁷ separadas por una distancia pequeña d , una de las cuales está inmóvil mientras que la otra se desplaza paralelamente a sí misma con la velocidad constante U (Fig. 4.1). Se

⁵ La unidad de presión en el sistema MKS es el Pascal (Pa), equivalente a 1 Newton/m². Sin embargo se usan frecuentemente otras unidades, por ejemplo en meteorología se suele dar la presión atmosférica en hectopascales (= 10² Pa). En geofísica se suele usar el bar (1 b = 10⁶ Pa) y sus múltiplos. Un kilobar (kb) equivale a 10⁹ Pa. La presión atmosférica standard al nivel del mar es de 1013.25 hectopascales, de modo que 1 kb equivale aproximadamente a 1000 atmósferas de presión.

⁶ Hablamos de coeficiente de expansión a *presión constante* para distinguirlo del coeficiente de expansión a *volumen constante*, que mide la variación de presión que resulta de una variación de temperatura, cuando el *volumen* del elemento se mantiene constante.

⁷ En la práctica estos experimentos se realizan colocando el fluido en el espacio entre dos cilindros coaxiales, uno de los cuales es fijo mientras que el otro gira con velocidad angular constante.

mide el esfuerzo σ necesario para mantener constante la velocidad de la placa móvil, como función de u , o más precisamente, de la velocidad de deformación $\varepsilon \equiv U/d$ (suponemos que d es muy pequeño).

Si se representan los resultados de este tipo de experimentos en un diagrama (ε, σ) , se pueden obtener diversas clases de resultados, como se indica en la Fig. 4.1.

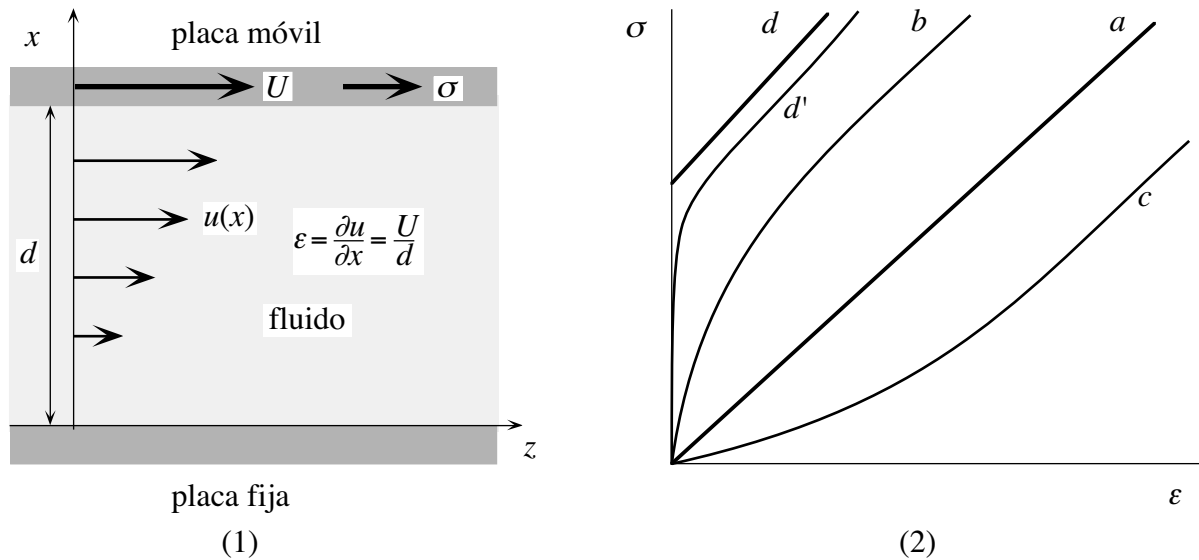


Fig. 4.1. (1) Experimento ideal para determinar la relación entre el esfuerzos de corte σ y la velocidad de deformación ε . (2) Resultados del experimento para: (a) un fluido Newtoniano, (b) un líquido pseudoplástico, (c) un líquido dilatante, (d) un fluido de Bingham, (d') fluido pseudoplástico cuyo comportamiento es prácticamente indistinguible del de un fluido de Bingham.

El resultado para un fluido Newtoniano es, por supuesto, que existe una relación lineal entre σ y ε , como lo indica el caso (a) de la figura. Este tipo de resultado es el que se obtiene para todos los gases, todos los líquidos puros (agua, alcohol, benceno, etc.) y la mayoría de las soluciones de moléculas simples (por ejemplo agua salada), cuyo comportamiento es Newtoniano con muy buena aproximación.

Sin embargo, otros fluidos que comprenden en general mezclas complejas como barros y pastas, los geles, las soluciones de polímeros, los fluidos orgánicos como la sangre y las mucosidades del aparato respiratorio, las grasas y aceites lubricantes muy viscosos, etc., exhiben comportamientos diferentes, como se indica en los casos (b), (c) y (d) de la Fig. 4.1. Estos fluidos se dicen *no Newtonianos*. Está claro que los flujos de líquidos no Newtonianos no se pueden describir mediante la ecuación de Navier-Stokes (4.23), sino que habrá que usar una ecuación del tipo

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho g - \nabla p + 2\nabla \cdot (\eta \varepsilon') \quad (4.48)$$

donde la dependencia de η en ε será la que se ha determinado empíricamente, o la que surge de algún modelo aproximado adecuado.

Los fluidos no Newtonianos presentan comportamientos curiosos, en el sentido que resultan poco familiares porque difieren de los del agua que es el líquido más común. Sin embargo estas características son de gran importancia práctica. Por lo tanto es conveniente tener una idea

acerca de las mismas con miras a las aplicaciones de la Mecánica de los Fluidos, tanto tecnológicas como para otras disciplinas científicas (ciencias biomédicas, ciencias del medio ambiente, etc.). Con este fin describiremos ahora las típicas clases de fluidos no Newtonianos.

Fluidos pseudoplásticos. Su comportamiento corresponde a la curva (b) de la Fig. 4.1. En estos medios η *decrece* con ε , y por lo tanto hay menor resistencia al flujo para esfuerzos mayores. Es decir, el fluido escurre más fácilmente cuanto mayor es el esfuerzo. La mayoría de las suspensiones, los barro⁸, muchas soluciones de polímeros y la sangre⁹ se comportan de esta manera.

Fluidos dilatantes. Su comportamiento responde a la curva (c) de la Fig. 4.1. En un medio dilatante η *crece* con ε , y por lo tanto hay mayor resistencia al flujo para esfuerzos mayores. Los fluidos dilatantes no son tan abundantes como los pseudoplásticos. Como ejemplos podemos citar la solución de almidón en agua, y la arena impregnada de agua (como las arenas movedizas, y la que se encuentra en las playas en la zona barrida por la rompiente).

Fluidos de Bingham. Su comportamiento está representado por la curva (d) de la Fig. 4.1. Se trata de líquidos que poseen una pequeña *rigidez*, que les permite resistir esfuerzos de corte siempre que éstos no superen un umbral σ_0 , pero escurren fácilmente cuando están sometidos a un esfuerzo grande. Ejemplos de este tipo de medios son la masa de pan, la pasta de dientes, la manteca, la gelatina y algunos barro y suspensiones. En la práctica puede ser muy difícil distinguir entre un fluido de Bingham y un fluido pseudoplástico cuyo comportamiento es como d' en la Fig. 4.1.

Reología dependiente del tiempo

Hasta aquí hemos supuesto (implícitamente) que a una dada velocidad de deformación ε le corresponde un esfuerzo σ , cuyo valor no cambia mientras ε se mantenga constante. Es decir, que la relación entre σ y ε no depende del tiempo (ver Fig. 4.2a). Esto ocurre para muchos líquidos, pero no siempre es así. El esfuerzo, y por lo tanto la viscosidad, puede tanto *crecer* como *decrecer* con el tiempo a medida que el fluido está siendo sometido a una tasa constante de deformación, y tales cambios pueden ser reversibles o irreversibles.

Tenemos básicamente tres clases de comportamiento.

Fluidos independientes del tiempo. Este es el caso de la mayoría de los líquidos simples.

Fluidos tixotrópicos. Son aquellos cuya viscosidad *disminuye* con el tiempo (Fig. 4.2b). Comprenden soluciones de polímeros, pinturas, suspensiones, arcillas, la miel, etc. La tixotropía ocurre, invariablemente, en fluidos pseudoplásticos, es decir, todos los fluidos tixotrópicos son también pseudoplásticos, aunque la inversa no es cierta pues existen fluidos pseudoplásticos cuya viscosidad es independiente del tiempo.

Fluidos reopépticos (o antitixotrópicos, o con tixotropía negativa). Son aquellos cuya viscosidad *aumenta* con el tiempo (Fig. 4.2c). Todos los fluidos reopépticos son también dilatantes.

El comportamiento dependiente del tiempo está relacionado con la estructura microscópica del fluido. En estos fluidos hay moléculas de gran tamaño, de formas planas (como en las arcillas) o filiformes (como ocurre en los polímeros de alto peso molecular), que en el reposo suelen estar orientadas al azar, o bien los filamentos están enrollados sobre sí mismos o enredados los unos con los otros. Esto determina la viscosidad al comienzo del escurrimiento. Pero a medida que el

⁸ Por este motivo es que las ruedas de un automóvil patinan en el barro más fácilmente si giran rápido, y es sabido que para conseguir tracción cuando se han empantanado conviene hacerlas girar muy lentamente.

⁹ Esta característica es esencial (y vital) para la circulación sanguínea.

fluido se mueve, si esas partículas se orientan, o si los filamentos se desenrollan o desenredan, el fluido escurre más fácilmente, lo que se traduce en una disminución de la viscosidad con el transcurrir del tiempo. Esto es lo que origina la thixotropía. Pero también se puede dar, en otros casos, el efecto contrario, cuando el movimiento del fluido produce reordenamientos o cambios en la conformación de las partículas que tienden a dificultar el escurrimiento. Cuando el movimiento termina y el fluido queda nuevamente en reposo, puede ocurrir que al cabo de cierto tiempo el fluido recupere sus propiedades iniciales, en cuyo caso los cambios producidos por el movimiento son reversibles. La presencia de la thixotropía (o de la antithixotropía) implica que para hacer predicciones acerca del comportamiento de un flujo es preciso conocer su historia previa. Por ejemplo, las propiedades del flujo de un líquido thixotrópico en una larga tubería son diferentes en distintos puntos del conducto.

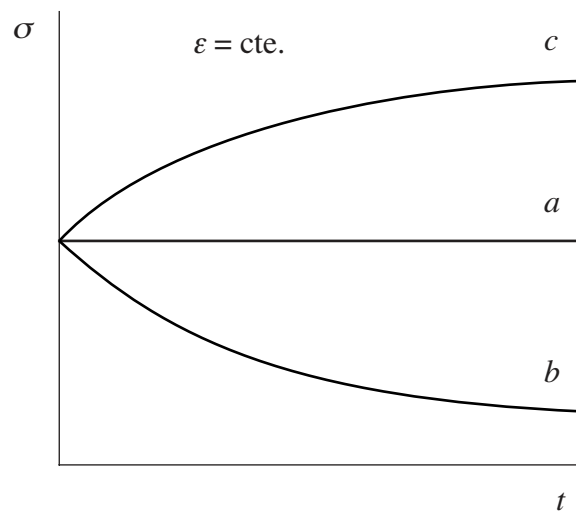


Fig. 4.2. Comportamiento dependiente del tiempo a $\varepsilon = \text{cte.}$: (a) fluido con viscosidad independiente del tiempo, (b) fluido thixotrópico, (c) fluido reopéctico.

Viscoelasticidad

Para completar esta sintética reseña de los comportamientos no Newtonianos corresponde mencionar la *viscoelasticidad*. Consiste en la propiedad que tienen algunos fluidos como masas, soluciones gomosas y otros más, de poseer cierto grado de *elasticidad*, que les permite recuperar su forma cuando desaparecen los esfuerzos de corte que los han deformado. La manifestación de esta elasticidad depende de la escala de tiempo del fenómeno. Vamos a dar un ejemplo. Consideremos la masilla siliconada conocida vulgarmente como masilla mágica, o masilla saltarina. Se trata de un líquido muy viscoso, que normalmente fluye con extrema lentitud. Si se toma una porción de esta masilla y se le da forma de pelota, se la puede hacer rebotar en el piso igual que una pelota de goma, es decir, se comporta en este caso como un sólido elástico. Sin embargo, si se deja la pelota sobre una mesa, al cabo de algunos minutos se aplanan y lentamente se derraman sobre la mesa. Si se le da a la masilla la forma de un cilindro, y se estira ese cilindro, lo que ocurra depende de cuán rápidamente la estiramos. Si le damos un tirón brusco, el cilindro se rompe produciendo una *fractura frágil*, como ocurre con un sólido rígido. Pero si la estiramos lentamente fluye hasta que se produce un filamento muy delgado, que finalmente se rompe por *fractura dúctil*. La masa que se prepara para hacer tallarines tiene propiedades semejantes, si ha

sido trabajada adecuadamente. También las rocas de la corteza terrestre tienen este comportamiento, pues si bien estamos acostumbrados a considerarlas sólidas, sobre las escalas de tiempo geológicas fluyen como un líquido viscoso.

Estos ejemplos muestran que el mismo material se puede comportar sea como un líquido, sea como un sólido, dependiendo de la escala de tiempo del proceso de deformación.

El lector comprenderá fácilmente que la teoría de los flujos de líquidos no Newtonianos es sumamente compleja, aunque de gran importancia práctica para muchas aplicaciones.