3 CINEMÁTICA

Campo de velocidad

En el instante t, la velocidad $\boldsymbol{u}$ de cada elemento fluido centrado en (x, y, z) es una función vectorial $\boldsymbol{u}(x,y,z,t)$, que también indicaremos en forma compacta con $\boldsymbol{u}(x_i,t)$ o $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ ($\boldsymbol{r} \equiv (x,y,z)$). El campo de velocidad es un *campo vectorial*, así como $\rho(x_i,t)$ es un campo escalar, $\boldsymbol{\sigma}(x_i,t)$ es un campo tensorial, etc..

Ejemplos sencillos de campos de velocidad son el de un fluido en reposo: $\boldsymbol{u}(x_i,t) = 0$, y el de un fluido que escurre con velocidad uniforme: $\boldsymbol{u}(x_i,t) = \boldsymbol{u}_0$ = cte.. Más interesante es el campo de velocidad de un fluido que rota con velocidad angular uniforme $\boldsymbol{\omega}$ alrededor de un eje $\boldsymbol{e}_\omega$ (ver Fig. 3.1). Este campo está dado por

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{3.1}$$

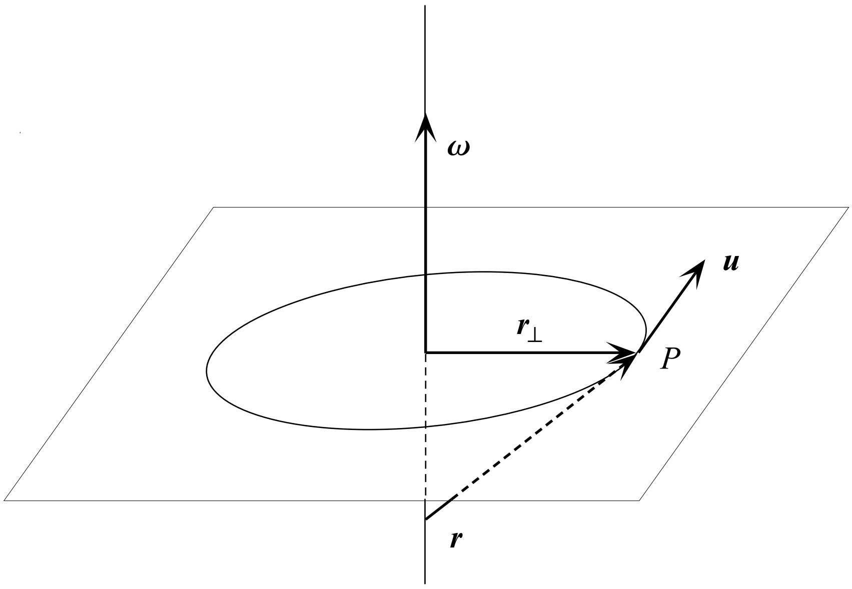

Fig. 3.1. Fluido que rota con velocidad angular uniforme alrededor de un eje fijo.

Si el eje z coincide con el eje de rotación tenemos $\boldsymbol{\omega} \equiv (0,0,\omega)$ y las componentes del campo de velocidad se escriben

$$u_x = -\omega y \quad , \quad u_y = \omega x \quad , \quad u_z = 0 \tag{3.2}$$

de donde resulta

$$|u| = \omega\sqrt{x^2 + y^2} = \omega r_\perp \tag{3.3}$$

En la (3.3),

$$\boldsymbol{r}_\perp = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{e}_\omega(\boldsymbol{e}_\omega \cdot \boldsymbol{r}) \tag{3.4}$$

es la parte de $\boldsymbol{r}$ que es perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$ (Fig. 3.1). Este campo coincide con el de un cuerpo rígido en rotación y tiene la propiedad esencial que la distancia entre dos puntos cualesquiera $\boldsymbol{r}_1$,

$\boldsymbol{r}_2$ del fluido se mantiene constante. En efecto, las respectivas velocidades son $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_2$, y la variación en el tiempo de la diferencia $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ está dada por

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt} - \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} = \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \tag{3.5}$$

Pero $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ es perpendicular a $\boldsymbol{r}$, luego su módulo $|\boldsymbol{r}|$ no varía. Esto último también puede verse calculando

$$\frac{dr^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = 0 \tag{3.6}$$

Nótese que $\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1$ es la velocidad del punto 2 respecto del punto 1, y de acuerdo con lo visto está dada por $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$. Luego todo eje $\boldsymbol{e}'_\omega$ paralelo a $\boldsymbol{\omega}$ se puede con igual derecho elegir como eje de rotación; sin embargo, respecto del eje originario $\boldsymbol{e}_\omega$, el nuevo eje está girando. Por ello, si bien ambos ejes son equivalentes del punto de vista cinemático, no lo son del punto de vista dinámico, pues las fuerzas ficticias que aparecen en uno son diferentes de las del otro.

Distinguiremos entre campos de velocidad *estacionarios* y *no estacionarios*. Un campo se dice estacionario cuando la magnitud, en nuestro caso $\boldsymbol{u}$, es sólo función de la posición, pero no del tiempo, es decir cuando $\partial \mathbf{u} / \partial t = 0$. Un campo de velocidad es estacionario si al medir la velocidad en un determinado punto, ésta se mantiene constante en el tiempo (quedando claro que $\boldsymbol{u}$ puede ser diferente de punto a punto). El campo de rotación que acabamos de describir es estacionario si $d\boldsymbol{\omega}/dt = 0$, y es fácil imaginar otros ejemplos de campos estacionarios.

Elementos materiales

Las líneas y las superficies formadas por puntos, cada uno de los cuales se desplaza con la velocidad del fluido (exactamente como si fuese arrastrado por el fluido), se denominan *líneas* y *superficies materiales*. También se denomina *volumen material* al volumen limitado por una superficie material.

Esta denominación se aplica tanto a elementos finitos como a elementos infinitesimales (sea de línea material, como de superficie y de volumen materiales). Está claro que, cualquiera sea el campo de velocidad, un dado volumen material contiene una masa *constante* de fluido, pues al moverse todos los puntos de la superficie material que lo limita con la misma velocidad del fluido, éste no la puede atravesar. Un *punto material* se puede imaginar como un volumen material infinitamente pequeño.

Líneas de corriente y trayectorias

Dado un campo de velocidad $\boldsymbol{u}(x_i, t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)$, se denominan *líneas de corriente* (o *líneas de campo*) a las líneas que en todos sus puntos tienen por tangente a $\boldsymbol{u}$, en un instante determinado t. Si el campo no es estacionario, la configuración de líneas de corriente varía de instante a instante, pero si el campo es estacionario dicha configuración se mantiene constante en el tiempo.

Se denominan *trayectorias* a las curvas $\boldsymbol{r}(t)$ formadas por las distintas posiciones que toma un *punto material* (o volumen material infinitesimal) con el transcurrir del tiempo. Por lo tanto, cada trayectoria está asociada a un determinado punto material. Evidentemente, la trayectoria asociada con un cierto punto material P tiene por tangente en cada uno de sus puntos $\boldsymbol{r}$ la velocidad $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{r}))$ que dicho punto material tiene en el instante[1] $t_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{r})$ cuando pasa por $\boldsymbol{r}$. En general, una trayectoria *no coincide* con una línea de corriente, pero sí coincide en el caso de campos estacionarios, pues en este caso $\boldsymbol{u}(x_i,t_{\mathrm{P}}(x_i)) = \boldsymbol{u}(x_i)$.

Descripción Euleriana y Lagrangiana

La forma natural de describir el flujo de un fluido consiste en asignar las magnitudes que lo caracterizan en función de la posición $\boldsymbol{r}$ y del tiempo t, por ejemplo, $\rho = \rho(x_i,t)$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x_i,t)$, etc. Esta descripción, que se denomina *Euleriana*, consiste pues en asociar cada magnitud a *puntos fijos del espacio*. Sin embargo, en la Mecánica elemental estamos acostumbrados a describir el movimiento de *objetos físicos* como masas puntuales, cuerpos, etc., cuyos equivalentes en un fluido son la masa contenida en un elemento de volumen material, o bien en un volumen material finito. En consecuencia, resulta muchas veces útil, porque es más susceptible de interpretaciones intuitivas, complementar la descripción Euleriana con una segunda forma de descripción, que se denomina *Lagrangiana*, consistente en asociar cada magnitud con *puntos materiales*.

Para ilustrar la utilidad de esta descripción, consideremos la velocidad $\boldsymbol{u}$. Su variación con el tiempo en el entorno de un *punto fijo* del espacio, esto es $\partial \mathbf{u}/\partial t$, no tiene una interpretación física simple y directa[2]. En cambio, la variación con el tiempo de la velocidad de un dado *punto material* representa la aceleración del fluido (contenido en un volumen material infinitesimal en el entorno de ese punto); para indicar esta variación se utiliza la forma $d\mathbf{u}/dt$. Es evidente que la aceleración $d\mathbf{u}/dt$, que está vinculada dinámicamente con la resultante de las fuerzas que actúan sobre el elemento material, es una magnitud cuya interpretación física es más directa que la de $\partial \mathbf{u}/\partial t$.

Como contrapartida, las magnitudes $\partial \mathbf{u}/\partial x$, $\partial \mathbf{u}/\partial y$, $\partial \mathbf{u}/\partial z$ son las componentes del gradiente de la velocidad, que es un tensor que (como veremos) tiene una clara interpretación física y determina en parte el tensor de los esfuerzos. En contraste, la diferencia de velocidad entre dos puntos materiales cercanos no se puede asociar con un gradiente, pues la distancia entre dos puntos materiales varía con el tiempo.

Por estas razones, es conveniente disponer de fórmulas que permitan pasar con flexibilidad de un tipo de descripción a la otra. Mostraremos cómo hacerlo si se conoce el campo de velocidad en el entorno de un punto $\mathrm{P}(x_i,t)$.

En resumen, podemos de decir que: (a) en la descripción Euleriana cada magnitud está asociada a puntos fijo del espacio, y (b) en la descripción Lagrangiana cada magnitud está asociada con puntos materiales del fluido.

Consideremos ahora una magnitud escalar q. Su derivada temporal en sentido Lagrangiano, o *derivada total* dq/dt se puede relacionar con la derivada temporal en sentido Euleriano, o *derivada local* $\partial q/\partial t$. En efecto, del punto de vista Lagrangiano, q es una función de t y de las coordenadas x_{P}, y_{P}, z_{P} del punto material P con el cual está asociada q. Pero x_{P}, y_{P}, z_{P} son funciones del tiempo, de modo que

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x_{\mathrm{P}}}\frac{dx_{\mathrm{P}}}{dt} + \frac{\partial q}{\partial y_{\mathrm{P}}}\frac{dy_{\mathrm{P}}}{dt} + \frac{\partial q}{\partial z_{\mathrm{P}}}\frac{dz_{\mathrm{P}}}{dt} \tag{3.7}$$

---

[1] El valor de t_{P} se obtiene invirtiendo la ecuación de la trayectoria.

[2] Si bien esta cantidad tiene las dimensiones de aceleración, no es una aceleración, pues mide la diferencia (por unidad de tiempo) de las velocidades de puntos materiales distintos.

que también se puede escribir como:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla q = \frac{\partial q}{\partial t} + u_i \frac{\partial q}{\partial x_i} \tag{3.8}$$

En la (3.8), $\boldsymbol{u}$ es la velocidad de P en el instante t, o sea $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x_i, t)$, pues P tiene coordenadas x_i en t, y ∇q es el gradiente del escalar q calculado en (x_i, t). El último término de la (3.8) se llama *derivada convectiva*; nótese que en el caso de una campo estacionario, con $\partial q / \partial t = 0$, la derivada total coincide con la derivada convectiva.

Se puede llevar a cabo el mismo cálculo para cada una de las tres componentes de un vector $\boldsymbol{a}$. El resultado es:

$$\frac{da_x}{dt} = \frac{\partial a_x}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla a_x \quad , \quad \frac{da_y}{dt} = \frac{\partial a_y}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla a_y \quad , \quad \frac{da_z}{dt} = \frac{\partial a_z}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla a_z \tag{3.9}$$

Pasando a la notación por subíndices que ya hemos usado, estas tres relaciones se sintetizan en la ecuación

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial a_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \tag{3.10}$$

que podemos escribir en forma vectorial como

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{a} \tag{3.11}$$

Del mismo modo se puede obtener la relación entre la derivada local y la derivada total respecto del tiempo de una magnitud tensorial.

Conservación de la masa

Un volumen material queda definido por el hecho que la superficie que lo limita es un superficie material. Por lo tanto, cada punto de esta superficie se mueve con velocidad $\boldsymbol{u}$. Luego,

$$\frac{dV}{dt} = \oint_S \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \, dS = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{u} \, dV \tag{3.12}$$

siendo $\boldsymbol{n}$ la normal saliente. Por lo general $\nabla \cdot \boldsymbol{u}$ varía de punto a punto dentro del volumen, pero para un volumen δV suficientemente pequeño en el entorno del un punto P, $\nabla \cdot \boldsymbol{u} \to (\nabla \cdot \boldsymbol{u})_{\mathrm{P}}$, y queda la relación

$$\frac{1}{\delta V} \frac{d\delta V}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{u} \tag{3.13}$$

Ahora, si δM es la masa contenida en δV, se tiene $\delta M = \rho \delta V$ donde ρ es la densidad en el entorno de P. Por otra parte $\delta M = \text{cte.}$, luego $d\delta M = d\rho \delta V + \rho \, d\delta V = 0$, de modo que

$$\frac{d\delta V}{\delta V} = -\frac{d\rho}{\rho} \tag{3.14}$$

Usando esta última relación, la (3.13) queda en la forma

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{u} \tag{3.15}$$

Esta ecuación establece la relación entre la variación de la densidad en el entorno de un punto material y el campo de velocidad $\boldsymbol{u}$. La ecuación (3.15) es de carácter cinemático: el campo de velocidad (por medio de la (3.13)) determina la variación del volumen de los elementos materiales, siendo su tasa de variación relativa igual a $\nabla \cdot \boldsymbol{u}$; de allí resulta la variación de ρ debido a la conservación de la masa. Otra forma diferencial de esta ecuación es,

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \rho\right) = -\nabla \cdot \boldsymbol{u} \tag{3.16}$$

que se obtiene de la (3.15) usando la relación (3.8) entre la derivada total y la derivada local de ρ. La (3.16) se puede también escribir en la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0 \tag{3.17}$$

Las ecs. (3.15)-(3.17) so diferentes formas de la *ecuación de conservación de la masa* (así llamada porque proviene de la constancia de δM), que también se denomina *ecuación de continuidad*.

Integrando la (3.17) sobre un volumen fijo obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV = -\int_V \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) dV = -\oint_S \boldsymbol{n} \cdot \rho \boldsymbol{u}\, dS \tag{3.18}$$

Esta ecuación expresa que la variación de la masa contenida en un volumen fijo está dada por el flujo neto de materia a través de la superficie que lo rodea. La ec. (3.18) se podría también haber tomado como punto de partida para discutir la conservación de la masa.

Derivada total de integrales materiales

Consideremos ahora la derivada temporal de la integral de una magnitud escalar cualquiera q sobre un volumen *material* finito V, es decir,

$$\frac{d}{dt}\int_V q\, dV \tag{3.19}$$

Imaginemos el volumen V subdividido en n elementos δV, y que en cada uno de ellos q toma el valor q_n; supondremos, además, que $\delta V \to 0$ (y por consiguiente $n \to \infty$), de modo que

$$\frac{d}{dt}\int_V q\, dV = \frac{d}{dt}\left(\lim_{\delta V \to 0} \sum_n q_n \delta V\right) \tag{3.20}$$

entonces,

$$\frac{d}{dt}\int_V q\,dV = \lim_{\delta V\to 0}\sum_n \frac{d}{dt}(q_n\delta V) = \lim_{\delta V\to 0}\sum_n \left(\frac{dq_n}{dt}\delta V + q_n\frac{d\delta V}{dt}\right) \tag{3.21}$$

y obtenemos finalmente

$$\frac{d}{dt}\int_V q\,dV = \int_V \left(\frac{dq}{dt} + q\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right)dV \tag{3.22}$$

El mismo argumento se puede aplicar a una magnitud vectorial cualquiera $\boldsymbol{h}$, y resulta

$$\frac{d}{dt}\int_V \boldsymbol{h}\,dV = \int_V \left(\frac{d\boldsymbol{h}}{dt} + \boldsymbol{h}\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right)dV \tag{3.23}$$

Nótese que tanto en esta ecuación como en la ecuación escalar para q, el primer término se puede identificar con la integral sobre un volumen fijo V, y el segundo término es entonces el efecto sobre todo el volumen del término convectivo.
Aplicando la fórmula (3.22) a la densidad ρ volvemos a obtener la ecuación de conservación de la masa a partir de la expresión integral

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\,dV = \int_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right)dV = 0 \tag{3.24}$$

Puesto que el primer miembro es nulo (ya que la masa contenida en un volumen material es constante) y V es arbitrario, se obtiene la (3.15).

Movimiento relativo en el entorno de un punto

Veremos más adelante que la fuerza que una porción de fluido ejerce sobre otra porción adyacente depende de la manera en que el fluido está siendo deformado por el movimiento. Por lo tanto es importante analizar el carácter del movimiento en el entorno de un punto material.
Sea $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)$ la velocidad en el instante t del fluido en el punto P y $\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u}$ la velocidad en ese mismo instante en un punto P′ situado en $\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}$ (con δx_i indicamos las componentes de $\delta\boldsymbol{r}$, ver Fig. 3.2). Podemos entonces escribir

$$\delta\boldsymbol{u} = (\delta\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} \tag{3.25}$$

que en un sistema de coordenadas Cartesianas se expresa como

$$\delta u_i = u_i(\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r},t) - u_i(\boldsymbol{r},t) = \delta x_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{3.26}$$

Las expresiones (3.25) y (3.26) son correctas al primer orden en la pequeña distancia δr entre los dos puntos.

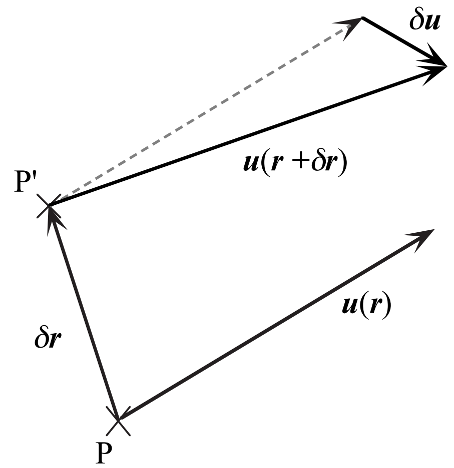

Fig. 3.2. Movimiento relativo de un fluido en el entorno de un punto P.

Los coeficientes $\partial u_i / \partial x_j$ son las componentes del tensor de segundo rango $\nabla \boldsymbol{u}$, que no recibe una denominación especial. Aquí, lo llamaremos simplemente el *gradiente de la velocidad*. Notemos, por otro lado, que $\delta \boldsymbol{u}$ representa la tasa de variación de $\delta \boldsymbol{r}$, es decir $\delta u_i = d\delta x_i / dt$. En efecto

$$\frac{d\delta \boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{r} + \delta \boldsymbol{r})}{dt} - \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r} + \delta \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = \delta \boldsymbol{u} \tag{3.27}$$

Para analizar las propiedades físicas del tensor gradiente de la velocidad conviene separarlo en sus partes simétrica $\boldsymbol{\varepsilon}$ y antisimétrica $\boldsymbol{\xi}$, en la forma

$$\nabla \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\xi} \tag{3.28}$$

que escrita en términos de las componentes cartesianas es

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij} + \xi_{ij} \tag{3.29}$$

donde

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad , \quad \xi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \tag{3.30}$$

Estudiaremos ambas partes por separado.

Parte Antisimétrica

La contribución de ξ_{ij} a δu_i, que llamaremos $\delta u_i^{(a)}$, es

$$\delta u_i^{(a)} = \delta x_j \xi_{ij} \tag{3.31}$$

Es fácil mostrar (desarrollando la suma en *j* para cada *i*) que el segundo miembro se puede escribir en forma vectorial como

$$\delta \boldsymbol{u} = \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \delta \boldsymbol{r}) \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{u} \tag{3.32}$$

La cantidad $\boldsymbol{\omega}$ se denomina *vorticosidad*, o *vorticidad*, del campo de velocidades. Se ve, entonces, que la contribución de $\boldsymbol{\xi}$ a $\delta \boldsymbol{u}$ deja invariante el módulo de $\delta \boldsymbol{r}$ y cambia sólo su dirección. En efecto, como $\boldsymbol{\omega} \times \delta \boldsymbol{r}$ es perpendicular a $\delta \boldsymbol{r}$, se tiene que

$$\frac{d}{dt}\delta r^2 = \frac{d}{dt}\delta \boldsymbol{r} \cdot \delta \boldsymbol{r} = 2\delta \boldsymbol{r} \cdot \frac{d\delta \boldsymbol{r}}{dt} = \delta \boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \delta \boldsymbol{r}) = 0 \tag{3.33}$$

Por lo tanto, la variación de $\delta \boldsymbol{r}$ debida a $\boldsymbol{\xi}$ es una *rotación rígida* alrededor de P (como la que vimos al principio del capítulo) con una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}/2$.
Es interesante verificar que $\nabla \times \boldsymbol{u}$ representa efectivamente un vector que corresponde al doble de la velocidad angular local de rotación. De acuerdo con el teorema de Stokes se tiene que

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \oint_C \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{dl} \tag{3.34}$$

donde S es una superficie (abierta) que se apoya sobre la curva C que sirve de borde. Si consideramos un círculo de radio δr alrededor de P, normal a $\boldsymbol{\omega}$, la (3.34) nos da

$$\pi \delta r^2 \langle | \nabla \times \boldsymbol{u} | \rangle = 2\pi \delta r \langle \delta u \rangle \tag{3.35}$$

donde $\langle\ \rangle$ indica el valor medio sobre el área del círculo o sobre su perímetro, según corresponda. Por otra parte, el módulo de la velocidad angular de rotación se define como $\Omega = \langle \delta u \rangle / \delta r$, de modo que

$$\langle | \nabla \times \boldsymbol{u} | \rangle = 2\Omega \tag{3.36}$$

y en el límite $\delta r \to 0$ obtenemos

$$\omega = | \nabla \times \boldsymbol{u} | = 2\Omega \tag{3.37}$$

Parte simétrica

Indicaremos con $\delta \boldsymbol{u}^{(s)}$ la contribución de $\boldsymbol{\varepsilon}$ a $\delta \boldsymbol{u}$, de forma tal que

$$\delta u_i^{(s)} = \delta x_j \varepsilon_{ij} \tag{3.38}$$

Puesto que $\boldsymbol{\varepsilon}$ es un tensor simétrico, en todo punto P se puede siempre elegir un sistema *local* de coordenadas (x, y, z), en el cual la matriz de sus componentes ε_{ij} es diagonal. En este sistema de coordenadas (ejes principales de $\boldsymbol{\varepsilon}$) tenemos

$$\delta u_x^{(s)} = \delta x\, \varepsilon_{xx} \quad , \quad \delta u_y^{(s)} = \delta y\, \varepsilon_{yy} \quad , \quad \delta u_z^{(s)} = \delta z\, \varepsilon_{zz} \tag{3.39}$$

Para averiguar el significado físico de estas relaciones consideremos la primera de las ecs. (3.39). De acuerdo con la misma resulta

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\delta u_x^{(s)}}{\delta x} = \frac{1}{\delta x}\frac{d\delta x}{dt} \tag{3.40}$$

Expresiones análogas se obtienen para ε_{yy} y ε_{zz}. Luego, ε_{xx} ε_{yy} y ε_{zz} representan las tasas (o velocidades) de estiramiento o acortamiento relativas en las direcciones de los ejes principales del tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$.

El segmento material PP' se puede imaginar descompuesto en tres segmentos según los ejes principales. Cada una de esas tres componentes sufre un estiramiento (o contracción) relativa dado por el respectivo término ε_{xx} ε_{yy} y ε_{zz}. Si estos tres términos son iguales entre sí, el segmento PP' mantiene su orientación respecto de los ejes principales (y por lo tanto respecto de cualquier sistema de ejes); de no ser así, además del estiramiento (o contracción) sufrirá también un cambio de dirección. Pero si tomamos tres segmentos de longitud $\delta x = \mathrm{PP}'_x$, $\delta y = \mathrm{PP}'_y$ y $\delta z = \mathrm{PP}'_z$, cada uno paralelo a un eje principal, estos tres segmentos sufren sólo estiramientos o contracciones y se mantienen paralelos al sus respectivos ejes, *cualesquiera sean* los valores de ε_{xx} ε_{yy} y ε_{zz}.

Veamos ahora cómo varía el volumen $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ de un elemento de fluido que inicialmente es un paralelepípedo cuyas tres aristas, de longitudes δx, δy, δz, están orientadas según los ejes principales. La variación relativa del volumen es:

$$\frac{1}{\delta V}\frac{d\delta V}{dt} = \frac{1}{\delta x}\frac{d\delta x}{dt} + \frac{1}{\delta y}\frac{d\delta y}{dt} + \frac{1}{\delta z}\frac{d\delta z}{dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \tag{3.41}$$

de modo que

$$\frac{1}{\delta V}\frac{d\delta V}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \nabla \cdot \boldsymbol{u} \tag{3.42}$$

La cantidad $\nabla \cdot \boldsymbol{u}$ no es otra cosa que la traza del tensor simétrico $\boldsymbol{\varepsilon}$; luego es invariante ante rotaciones de coordenadas. Por lo tanto $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$ significa que un volumen δV se mantiene constante, independientemente de su forma y orientación.

En el caso particular en que $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz}$, los tres elementos de línea δx, δy, δz se estiran (o contraen) en la misma proporción. Luego, un elemento de fluido no cambia de forma (si es esférico, seguirá siendo esférico), pero sí cambia de volumen, puesto que $\nabla \cdot \boldsymbol{u}$ puede no ser nula en este caso. En Mecánica de Fluidos, este tipo de deformaciones se llaman *expansiones* o *compresiones puras*.

Lo anteriormente expuesto indica que el tensor simétrico $\boldsymbol{\varepsilon}$ se puede expresar de forma *invariante* como la suma de un tensor de traza nula $\boldsymbol{\varepsilon}'$, más un tensor isótropo $[\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})/3]\mathbf{I}$, de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}' + [\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})/3]\mathbf{I} = \boldsymbol{\varepsilon}' + \tfrac{1}{3}(\nabla \cdot \boldsymbol{u})\mathbf{I} \tag{3.43}$$

es decir

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + (T/3)\delta_{ij} \tag{3.44}$$

donde

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - (T/3)\delta_{ij} \quad , \quad T = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \nabla \cdot \boldsymbol{u} \tag{3.45}$$

El tensor $\boldsymbol{\varepsilon}'$ tiene traza nula y por lo tanto describe *deformaciones puras* (con cambio de forma pero sin cambio de volumen). Por ejemplo, una esfera se puede transformar en un elipsoide, pero conservando el volumen encerrado. Por este motivo $\boldsymbol{\varepsilon}'$ recibe el nombre de tensor de *velocidad* (o *tasa*) *de deformación*, en sentido estricto. En cambio, el segundo término de la (3.43) describe la variación de volumen sin cambio de forma, es decir la velocidad (o tasa) de compresión o de expansión isótropa.

Resumiendo todo lo expuesto, podemos enunciar lo siguiente:

> El movimiento de un fluido en el entorno de un punto P se puede considerar como la superposición de:
> (a) una *rotación pura* con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \boldsymbol{u}/2$ alrededor de un eje que pasa por P.
> (b) una *deformación*, que a su vez consiste en la superposición de una *expansión* o *compresión isótropa*, cuya magnitud es $\delta V^{-1} d\delta V/dt = \nabla \cdot \boldsymbol{u}$, más una *deformación pura* (sin cambio de volumen), dada por el tensor de velocidad de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}'$.

Este resultado se suele llamar *Teorema de Helmholtz*.