

2. HIDROSTÁTICA

Cuando una parcela de fluido se encuentra en equilibrio, la resultante de las fuerzas de volumen y de superficie que actúan sobre ella debe ser nula. Si expresamos esta condición por unidad de volumen, esto significa que en el equilibrio se debe cumplir

$$\mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (2.1)$$

En un fluido en reposo el tensor de los esfuerzos tiene la forma $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$, por lo tanto la condición (2.1) se escribe

$$\mathbf{f} = \nabla p \quad (2.2)$$

Si la fuerza por unidad de volumen \mathbf{f} se debe a la gravedad tendremos $\mathbf{f} = \rho\mathbf{g}$. La ec. (2.2) se denomina *ecuación fundamental de la hidrostática*.

Principio de Arquímedes

Sea un cuerpo de volumen V limitado por la superficie S , sumergido en un fluido en reposo cuya densidad es ρ . La fuerza que el fluido ejerce sobre el cuerpo, denominada *empuje*, vale

$$\mathbf{E} = -\int_S p \mathbf{n} dS \quad (2.3)$$

Aquí \mathbf{n} es la normal exterior del elemento de superficie dS del cuerpo. Por otra parte, la presión en el fluido está determinada por la condición de equilibrio

$$\nabla p - \rho\mathbf{g} = 0 \quad (2.4)$$

Si aplicamos el Teorema de Green a la expresión de \mathbf{E} y usamos la (2.4) resulta entonces

$$\mathbf{E} = -\int_V \nabla p dV = -\mathbf{g} \int_V \rho dV = -\mathbf{g} M_f \quad (2.5)$$

donde M_f es la masa del fluido desplazado por el cuerpo. Por lo tanto, el empuje es igual en módulo pero de signo opuesto al peso del fluido desplazado, resultado que constituye el bien conocido *Principio de Arquímedes*.

Equilibrio en líquidos con estratificaciones de densidad

La densidad de un líquido es función de la temperatura, la composición química y la concentración de eventuales solutos. Si alguno, o varios, de estos parámetros son función de la posición, la densidad será diferente de un punto a otro del fluido¹. La condición de equilibrio

$$\nabla p = \rho\mathbf{g} \quad (2.6)$$

vale también en este caso, pero el hecho que

¹ Esto es cierto aún si consideramos incompresible al líquido.

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z \quad (2.7)$$

implica que el gradiente de la presión debe tener en todo punto la dirección z , o sea que en el equilibrio $\partial p / \partial x = \partial p / \partial y = 0$ (si así no fuera existirían componentes del gradiente de la presión que no podrían ser equilibrados por la gravedad). Por lo tanto resulta que

$$p = p(z) \quad (2.8)$$

y entonces la condición (2.6) se reduce a la forma escalar

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (2.9)$$

Claramente, esta condición se puede satisfacer sólo si la densidad es también función solamente de z :

$$\rho = \rho(z) \quad (2.10)$$

Un líquido cuya densidad depende solamente de z se dice *estratificado*. Por ejemplo, en el mar, la temperatura y la salinidad del agua dependen de z , y por lo tanto la densidad depende de z .

La condición de equilibrio (2.9) se puede cumplir cualquiera sea la estratificación de densidad (2.10). Sin embargo, no todos estos equilibrios son estables, como mostraremos ahora.

Consideremos el caso de un líquido 2 de densidad ρ_2 que descansa sobre otro líquido 1 de densidad ρ_1 . La superficie que separa ambos líquidos es horizontal y por lo tanto se satisface la condición de equilibrio. Vamos a mostrar que este equilibrio es *inestable* si $\rho_2 > \rho_1$ (como ocurre si tenemos agua sobre aceite).

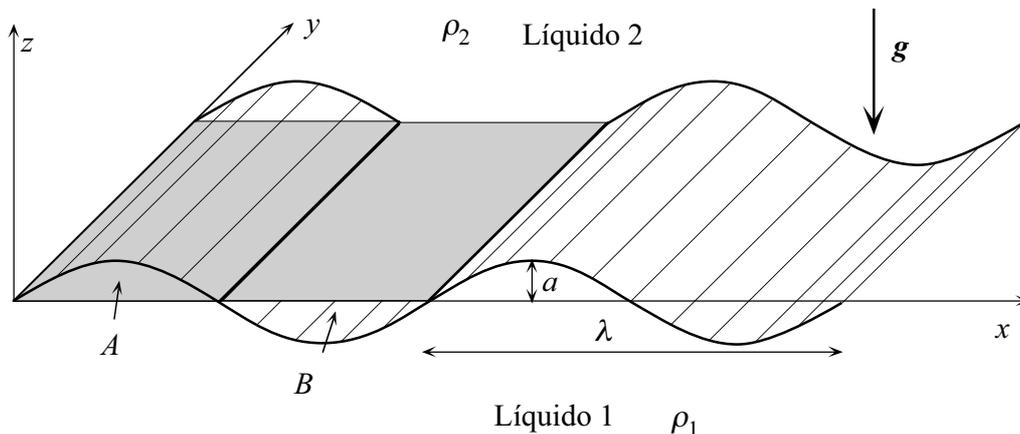


Fig. 2.1. Estabilidad del equilibrio de dos líquidos superpuestos. Por efecto de la perturbación de la interfaz, el líquido 2 que ocupaba el volumen A ha descendido, pasando a ocupar el volumen B . Recíprocamente, el líquido 1 que ocupaba el volumen B ha ascendido, pasando a ocupar el volumen A . El equilibrio es inestable si $\rho_2 > \rho_1$ pues la porción del líquido 1 que ha subido, al hallarse rodeada de un fluido más denso, experimenta una fuerza neta hacia arriba, a la vez que la porción del líquido 2 que ha bajado y está dentro de un medio menos denso está sometida a una fuerza neta hacia abajo: por lo tanto estas fuerzas tienden a acrecentar la amplitud de la perturbación.

Para ver esto, consideremos una perturbación del equilibrio, que consiste en que la superficie de separación deja de ser horizontal y toma la forma que se indica en la Fig. 2.1. Está claro que si $\rho_2 > \rho_1$, en virtud del Principio de Arquímedes, sobre la porción A del líquido 1 que se ha desplazado hacia arriba (respecto del equilibrio) actúa una fuerza neta dirigida hacia arriba. Análogamente, sobre la porción B del líquido 2, que se ha desplazado hacia abajo, actúa una fuerza neta dirigida hacia abajo.

A los fines del cálculo vamos a suponer que el desplazamiento vertical de la superficie de separación tiene la forma² ($a, \lambda = \text{cte.}$):

$$\delta z = a \sin(2\pi x / \lambda) \quad (2.11)$$

El volumen (por unidad de longitud en la dirección y) de las porciones A y B es

$$\delta V = \lambda a / \pi \quad (2.12)$$

Por lo tanto, debido a la deformación de la superficie de separación, una porción del líquido 1, que antes de la deformación ocupaba el elemento B , ha pasado a ocupar el elemento A . Viceversa, la porción del líquido 2, que antes de la deformación ocupaba el elemento A , ha pasado a ocupar el elemento B . Es decir, la perturbación consiste en el *intercambio* de los líquidos contenidos en los elementos de volumen A y B .

Como resultado de estos desplazamientos la porción del líquido 2 que ha descendido ha sufrido una disminución de su energía potencial³, dada por

$$\delta U_2 = -\frac{2}{\pi} m_2 g a = -\frac{2}{\pi} \delta V \rho_2 g a \quad (2.13)$$

mientras que la porción del líquido 1 que ha ascendido ha tenido un aumento de energía potencial igual a

$$\delta U_1 = \frac{2}{\pi} m_1 g a = \frac{2}{\pi} \delta V \rho_1 g a \quad (2.14)$$

La variación neta de energía potencial del sistema es entonces

$$\delta U = \delta U_1 + \delta U_2 = -\frac{2}{\pi} \delta V g a (\rho_2 - \rho_1) \quad (2.15)$$

Claramente, se tendrá

$$\delta U < 0 \quad \text{si} \quad \rho_2 > \rho_1 \quad (2.16)$$

lo que significa que si el líquido más denso está *encima* del menos denso, el equilibrio no corresponde a un *mínimo* de energía potencial. Por lo tanto el equilibrio es *inestable* y se rompe espontáneamente: el líquido más pesado baja y el líquido más liviano sube, hasta que terminan

² Se ha supuesto esta particular forma de la perturbación al solo objeto de fijar ideas. En realidad, se puede imaginar otro tipo de perfil (triangular, rectangular, etc.) para las porciones A y B y el resultado es el mismo en lo que concierne a la estabilidad o inestabilidad del equilibrio.

³ El factor $2/\pi$ proviene del cálculo del desplazamiento del baricentro de la porción del fluido 2 que se ha desplazado.

por darse vuelta. La descripción detallada del desarrollo de la inestabilidad es muy complicada, puesto que las ecuaciones que la describen son no lineales y su evolución depende de la forma de la perturbación inicial⁴. Para una condición inicial de la forma (2.11) cuya amplitud a es infinitesimal, al comienzo de la inestabilidad la perturbación conserva la forma sinusoidal y su amplitud crece exponencialmente con el tiempo (etapa lineal). Pero cuando la magnitud de la perturbación se hace apreciable, su forma deja de ser sinusoidal y su velocidad de crecimiento alcanza un valor de saturación (etapa no lineal).

En el caso opuesto (líquido denso en el fondo y líquido menos denso arriba), tendremos

$$\delta U > 0 \quad \text{si} \quad \rho_2 < \rho_1 \quad (2.17)$$

y por lo tanto el equilibrio es *estable* pues corresponde al *mínimo* de la energía potencial. Si se perturba este estado, las fuerzas de empuje tienden a *restituir* el equilibrio. De resultados de esto hay *oscilaciones* de la superficie de separación, que se propagan en forma de ondas que se denominan *ondas internas de gravedad*.

No es difícil demostrar que la condición de estabilidad del equilibrio para un líquido con una estratificación continua de densidad es

$$\frac{d\rho}{dz} < 0 \quad (2.18)$$

Las ondas internas que se producen cuando se perturba una estratificación estable de este tipo son de gran interés en oceanografía.

Equilibrio de la atmósfera

El equilibrio de gases (y en particular, de la atmósfera) se puede estudiar también mediante la ecuación fundamental de la hidrostática (2.2) pero se debe tomar en cuenta la compresibilidad, que relaciona la densidad con la presión.

Si suponemos que el aire se comporta como un gas ideal, la ecuación de estado es

$$p = \rho RT / \mu \quad (2.19)$$

donde μ es el peso molecular y $R = 8\,3143 \dots \text{J/mol } ^\circ\text{K}$ es la constante universal de los gases. Usando la (2.19) podemos eliminar ρ de la ec. (2.6) y resulta

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\mu g}{R} \frac{p}{T} \quad (2.20)$$

Integrando esta ecuación obtenemos

$$p(z) = p(0) \exp\left(-\frac{\mu g}{R} \int_0^z \frac{dz}{T(z)}\right) \quad (2.21)$$

⁴ Este tipo de inestabilidad, que hemos presentado en su forma más sencilla, es de gran importancia ya sea en la naturaleza como en el laboratorio, y se denomina *inestabilidad de Rayleigh-Taylor* o también *inestabilidad de intercambio*.

Para calcular explícitamente esta integral y así obtener $p(z)$ es necesario saber cómo varía T con la altura. Esto lo consiguen los meteorólogos enviando globos sonda con instrumentos que miden T y envían a tierra esa información. Nosotros aquí vamos a estudiar el problema postulando algunas distribuciones de temperatura simples (aunque no realísticas).

Atmósfera isoterma

Si suponemos $T = T_0 = \text{cte.}$ la (2.21) se integra de inmediato y obtenemos

$$p(z) = p(0)e^{-z/z^*} \quad \text{con} \quad z^* = \frac{RT_0}{\mu g} \quad (2.22)$$

Por lo tanto, en una atmósfera isoterma la presión (y por lo tanto la densidad) disminuye exponencialmente con la altura, y se reduce por un factor $1/e$ en la altura característica z^* . Para la atmósfera terrestre (cuya composición aproximada es 80% de N_2 y 20% O_2), si suponemos una temperatura de 300 °K, resulta $z^* \approx 8.7 \text{ km}$.

Atmósfera adiabática

El modelo de la atmósfera adiabática es útil para describir la estabilidad del equilibrio atmosférico. Corresponde a tener en cada z la temperatura, densidad y presión que adquiere una masa de aire que evoluciona adiabáticamente. Recordando la expresión de la energía interna de un gas, tenemos que para n moles de gas

$$E = \frac{f}{2} nRT = \frac{1}{\gamma - 1} nRT \quad (2.23)$$

donde f indica el número de grados de libertad de las moléculas y γ es el coeficiente adiabático

$$\gamma = \frac{f + 2}{f} \quad (2.24)$$

En un proceso adiabático no hay variación de entropía y por lo tanto $dE = -pdV$. Entonces si una porción de aire se eleva adiabáticamente en dz tendremos

$$\frac{dE}{dz} = \frac{1}{\gamma - 1} nR \frac{dT}{dz} = -p \frac{dV}{dz} \quad (2.25)$$

Pero en una transformación adiabática

$$pV^\gamma = \text{cte.} \quad (2.26)$$

de modo que

$$pdV = -Vdp/\gamma \quad (2.27)$$

Además, en el equilibrio

$$dp = -\rho g dz \quad (2.28)$$

luego, teniendo en cuenta que

$$V\rho = n\mu \quad (2.29)$$

resulta

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{\text{ad}} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} = \text{cte.} \quad (2.30)$$

Integrando la (2.30) conseguimos la variación de T con z en la forma

$$T(z) = T_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{RT_0} z\right) = T_0 \left(1 - \frac{z}{z_{\text{ad}}}\right), \quad z_{\text{ad}} = \frac{\gamma}{\gamma-1} z^*, \quad T_0 = T(z=0) \quad (2.31)$$

Una vez conocido $T(z)$ quedan también determinadas la presión y la densidad como

$$p(z) = p_0 (T/T_0)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \rho(z) = \rho_0 (T/T_0)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (2.32)$$

pues $p_0 = \rho_0 RT_0 / \mu$. Las fórmulas (2.31) y (2.32) muestran que una atmósfera adiabática tiene una altura finita dada por z_{ad} : a esa altura T , p y ρ se anulan.

El gradiente adiabático de temperatura se puede también escribir en términos del calor específico a presión constante, c_p . En efecto, de

$$c_p = c_v + R/\mu \quad (2.33)$$

y recordando que $c_v = du/dT$ y $u = U/\rho$, obtenemos

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{\text{ad}} = -\frac{g}{c_p} \quad (2.34)$$

Para aire seco $(dT/dz)_{\text{ad}} = -0.01 \text{ }^\circ\text{K/m}$.

Estabilidad del equilibrio atmosférico

El gradiente adiabático representa el valor crítico de dT/dz que separa distribuciones de temperatura correspondientes a equilibrio estable, de distribuciones correspondientes a equilibrio inestable. Sea, en efecto, un perfil de temperatura tal que

$$\frac{dT}{dz} > \left(\frac{dT}{dz}\right)_{\text{ad}} \quad (2.35)$$

o sea que a una altura z determinada, el gradiente de la temperatura real es mayor que el gradiente adiabático (perfil *superadiabático*, ver la Fig. 2.2a). Esta situación es de equilibrio *estable*, pues un elemento de volumen de aire en z que se eleva adiabáticamente en dz , es más frío, y entonces más denso que el aire que lo rodea en su nueva posición. Luego recibe un empuje menor que su peso y tiende a *descender*, restituyendo así el equilibrio. Análogamente, si una perturbación lo hace descender se encuentra rodeado de aire más frío y más denso, y recibe un empuje mayor que su peso y tiende a *ascender* y volver a su posición de equilibrio.

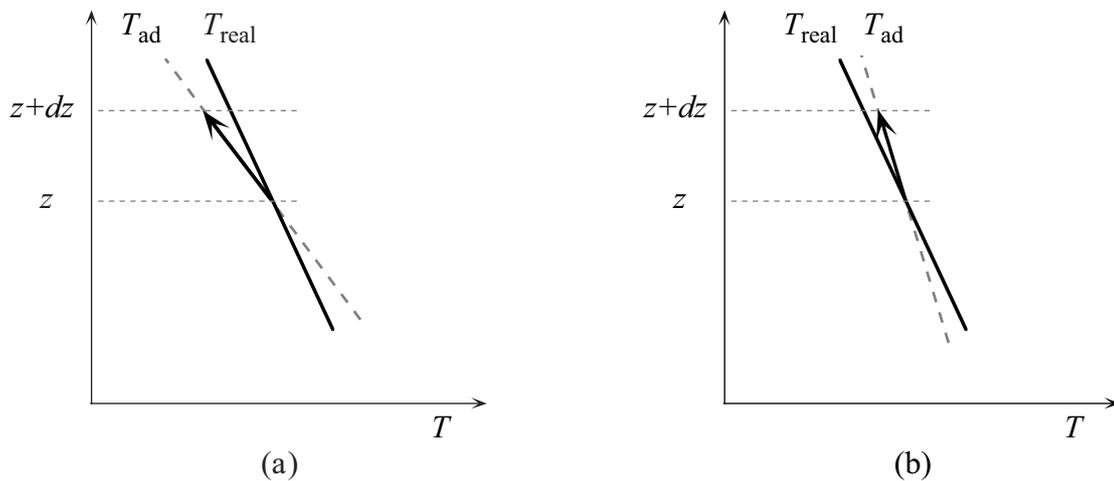


Fig. 2.2. Estabilidad del equilibrio en la atmósfera. En (a) la temperatura real disminuye con la altura más lentamente que en una atmósfera adiabática; luego una parcela de aire que se eleva adiabáticamente en dz es más fría, y entonces más densa, que el aire que la rodea; por lo tanto tiende a descender: la estratificación es estable. En (b) la temperatura real disminuye con la altura más rápidamente que en una atmósfera adiabática; por consiguiente una parcela de aire que se eleva adiabáticamente en dz es más caliente, y entonces menos densa, que el aire que la rodea; por lo tanto tiende a ascender: la estratificación es inestable.

En cambio, si la distribución de temperatura tiene un gradiente *subadiabático*, es decir si

$$\frac{dT}{dz} < \left(\frac{dT}{dz} \right)_{\text{ad}} \quad (2.36)$$

el equilibrio es inestable (Fig. 2.2b). En efecto, un elemento de volumen que por causa de alguna perturbación asciende en dz , se encuentra rodeado de aire más frío, y por ende más denso, de modo que tiende a *ascender*. Por lo tanto el equilibrio es *inestable*, y se forman *corrientes convectivas*.

La distribución de temperatura en la atmósfera varía de un lugar a otro de la Tierra, y en cada lugar determinado depende de la hora del día, de la estación, y de las condiciones meteorológicas del momento. En la Fig. 2.3a se indican (cualitativamente) perfiles medios típicos de temperatura para el verano y el invierno en latitudes intermedias. Vemos que la región (1) ($h \leq 15$ km) que constituye la *tropósfera* tiene $dT/dz < 0$. En la tropósfera se pueden dar (o no) condiciones de inestabilidad, dependiendo del valor de dT/dz . La región (2) (de 15 a 50 km de altura), que se denomina *estratósfera*, es siempre estable.

El desarrollo de inestabilidades convectivas en la tropósfera es la causa de la formación de cúmulonimbus, y el origen de las *tormentas de verano*. Esto sucede porque la intensa radiación solar en las horas más calurosas del día aumenta fuertemente la temperatura del suelo y de las capas de aire adyacentes (Fig. 2.3b). Por eso las condiciones de inestabilidad se suelen dar por la tarde, y las tormentas de verano ocurren casi siempre entonces, o en las primeras horas de la noche.

Durante el invierno, en cambio, se produce a menudo lo que se llama *inversión de temperatura*. Esto sucede en las noches despejadas, cuando debido a la radiación térmica que se pierde hacia el espacio, el suelo y las capas de aire inmediatamente por encima de él se enfrían mucho. En

esos casos, el perfil $T(z)$ tiene la forma indicada en (ii) en la Fig. 2.3b. Cuando esto ocurre, la estratificación del aire cercano al suelo es sumamente estable. Si el aire es muy húmedo se produce neblina en la madrugada, y el *smog* no se eleva y difunde, sino que permanece a baja altura y cerca del suelo.

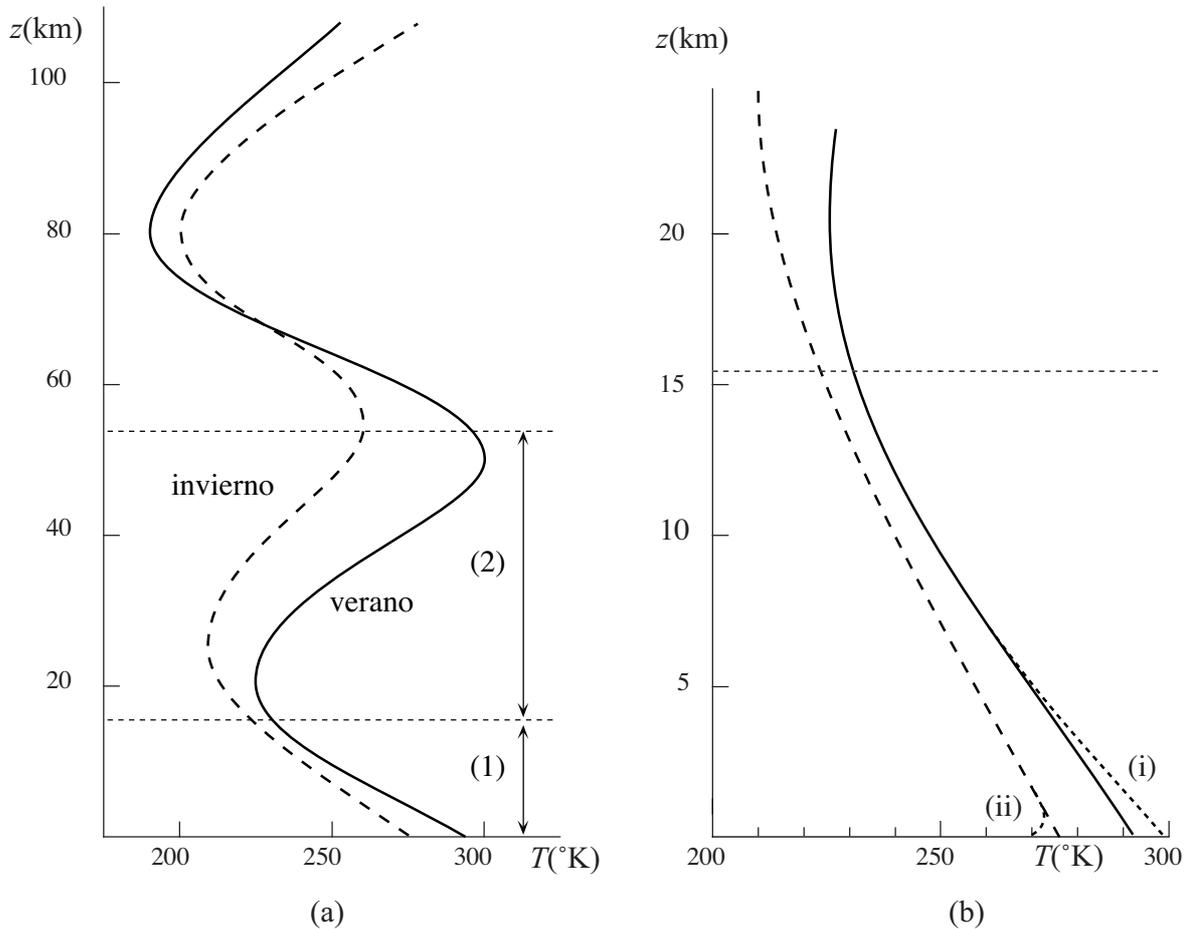


Fig. 2.3. (a) Perfiles medios típicos de temperatura para el verano y el invierno para una latitud intermedia. En la tropósfera (región (1), $h \leq 15$ km) se tiene $dT/dz < 0$ y se pueden dar (o no) condiciones de inestabilidad. En cambio la estratósfera (región (2), de 15 a 50 km de altura) es siempre estable. (b) Detalle de la tropósfera. En verano la intensa radiación solar en las horas más calurosas calienta el suelo y las capas más bajas de la atmósfera produciendo condiciones de inestabilidad (curva (i)) que dan lugar a corrientes convectivas, formación de cumulonimbus y tormentas hacia el final del día. En las noches despejadas de invierno, el fuerte enfriamiento del suelo y las capas de aire más próximas a él debido a la radiación térmica que se pierde en el espacio produce en la madrugada estratificaciones sumamente estables (curva (ii)) denominadas capas de inversión, que suelen estar asociadas con neblinas matinales.

Condiciones de contorno en interfases

Se denomina *interfase* el contorno que separa dos fases diferentes (por ej. una fase sólida de una fase líquida o gaseosa), e *interfaz* el contorno que separa dos medios de diferente constitución (por ej., dos líquidos no miscibles), en una misma fase.

Las condiciones que se plantean en la superficie que separa un fluido de otro fluido o un fluido de un sólido requieren especial consideración, ya sea porque afectan el movimiento de los fluidos, como también porque dan lugar a varios fenómenos importantes en situaciones estáticas. Nótese, en primer lugar, que si un elemento de volumen es atravesado por un tal contorno, por lo general no es cierto que la diferencia entre las magnitudes de la fuerza de superficie sobre la cara que se encuentra de un lado del contorno y la fuerza sobre la cara opuesta escala como la distancia entre las caras.

El transporte de energía y de cantidad de movimiento a través del contorno entre dos medios se realiza tanto por migración de moléculas como por efecto de las fuerzas intermoleculares, de la misma manera que a través de una superficie en el seno de un fluido homogéneo. Por consiguiente, magnitudes como la temperatura y la velocidad tienden a tomar rápidamente, o a mantener, el mismo valor de ambos lados del contorno. Pero no ocurre necesariamente lo mismo con el transporte de masa, si uno o ambos medios están constituidos por materia condensada (sólidos o líquidos). Muchas veces, las diferencias de composición química (tipo de moléculas) y de densidad entre los medios separados por el contorno se reducen con extrema lentitud. En tales casos, esas diferencias son duraderas y casi permanente. Consideremos, por ejemplo, una interfase líquido-sólido: las moléculas del sólido están ligadas a la red cristalina, y aunque algunas moléculas del líquido penetran ocasionalmente en el campo de fuerzas de las moléculas del sólido, se limitan a transferir energía (calor) y cantidad de movimiento, y regresan al líquido sin producir cambios en la composición y/o la densidad de los medios.

En base a la Hipótesis del continuo, la Mecánica de Fluidos trata estos contornos como superficies matemáticas ideales, donde las propiedades del fluido presentan discontinuidades y las caracteriza por ciertas propiedades macroscópicas. Tales propiedades se suponen conocidas, sea como datos experimentales, sea como resultados de teorías microscópicas.

Nosotros no limitaremos al más vistoso e importante de los efectos mecánicos que aparecen en la escala macroscópica de resultados de los fenómenos interfaciales: la *tensión superficial*.

Tensión superficial

Todo el mundo ha observado alguna vez gotas líquidas en un medio gaseoso y ha visto la forma curva que asume la superficie libre de un líquido en reposo cerca de las paredes del recipiente que lo contiene. Tales observaciones no se pueden explicar mediante la condición de equilibrio hidrostático (2.6), pues es evidente que según la (2.6), las superficies de igual presión y densidad (que deben ser paralelas a la interfaz en su entorno) son siempre perpendiculares a la dirección de la gravedad.

Es fácil mostrar que si la presión fuese la única fuerza de superficie presente, no sólo toda interfase debería ser plana, sino que tampoco podrían ocurrir saltos de presión a través de una interfase, contrariamente a lo que muestra el conocido fenómeno de la capilaridad.

Para ello, consideremos un elemento de volumen chato atravesado por la interfaz entre dos fluidos en reposo (Fig. 2.4). El espesor del elemento es δh y sus caras 1 y 2 tienen un área δl^2 . Supongamos que exista un salto de presión $p_2 - p_1$ a través de la interfaz. Debido a esa diferencia de presión habrá una fuerza neta debida a los esfuerzos sobre las caras 1 y 2, cuya magnitud es

$$(p_2 - p_1)\delta l^2 \quad (2.37)$$

y por lo tanto es proporcional a δl^2 y no a δh . Por otra parte, la fuerza neta sobre la superficie lateral debida a la presión debe ser proporcional a la superficie lateral, que escala como $\delta l \delta h$. Por consiguiente, prescindiendo de toda consideración acerca de la dirección de estas fuerzas, está claro que son de orden distinto y no se pueden compensar entre sí. Es evidente que tampoco ninguna fuerza de volumen (que es proporcional a $\delta V = \delta h \delta l^2$) puede compensar la fuerza dada por (2.37). Luego, si no existieran otras fuerzas de superficie que las debidas a la presión, deberíamos tener $p_2 = p_1$, de modo que la presión sería continua a través de la interfaz.

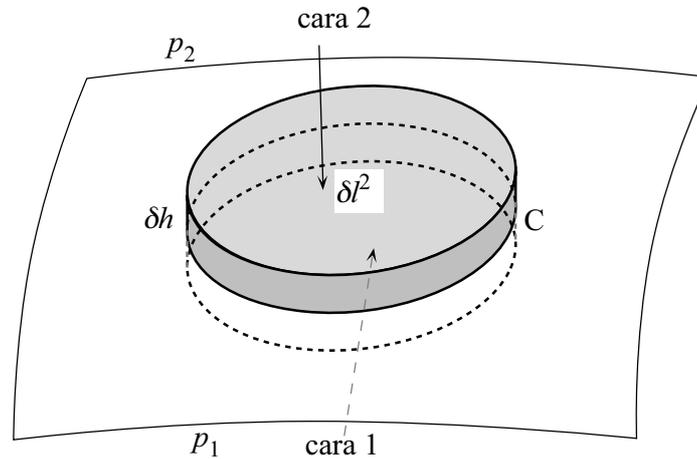


Fig. 2.4. Elemento de fluido chato atravesado por una interfaz. La fuerza neta debido a la diferencia de presión entre la cara 2 y la cara 1 escala como δl^2 y la fuerza neta sobre la cara lateral debida a la presión escala como $\delta l \delta h$. Por lo tanto no se pueden equilibrar. Se concluye que para que sea posible el equilibrio, la interfase debe ser sede de fuerzas que se ejercen sobre la curva C, que es la intersección de la interfaz con la cara lateral.

Por otra parte, en el *seno* de los dos fluidos (recordemos que están en reposo) no pueden aparecer otras fuerzas que no sean las debidas a la presión. Luego una diferencia de presión, si es que existe, tiene que ser compensada por otras fuerzas, que hasta ahora no habíamos considerado. El asiento de esas nuevas fuerzas no puede ser otro que *la interfaz misma*, o sea la abrupta transición entre dos fluidos de distintas propiedades. Por lo tanto se deben ejercer sobre la superficie lateral, que es la única atravesada por la interfaz, más precisamente sobre la curva C que resulta de la intersección de la superficie lateral con la interfaz. La fuerza que se ejerce sobre un elemento de línea dl de C debe ser *normal* a la superficie lateral, es decir debe estar en el plano tangente a la interfaz, y ser ortogonal a dl (esto último es necesario por la condición de reposo). Deben cumplir, además, las siguientes condiciones:

- Su resultante sobre un elemento extremadamente chato atravesado por la interfaz debe ser proporcional al área frontal δl^2 del elemento, es decir, no debe tender a cero con δh .
- Su resultante sobre el mismo elemento debe tener dirección opuesta a la resultante (2.37).

Esta segunda exigencia, junto con la condición que las fuerzas deben ser paralelas a la interfaz, implica que sólo puede darse $p_2 \neq p_1$ si hay *curvatura* de la superficie.

Todo esto equivale a suponer que la interfaz entre dos medios se comporta como una *membrana de espesor infinitesimal*, sede de fuerzas finitas, tangentes a su superficie. Por lo tanto la interfaz posee una *tensión superficial* cuya magnitud está determinada por un coeficiente γ , de modo tal que:

A través de todo elemento lineal $d\mathbf{l}$ apoyado sobre una interfaz, la parte situada de un lado del elemento ejerce sobre la parte que está del otro lado una fuerza $d\mathbf{t}$, cuya magnitud es proporcional a $d\mathbf{l}$ y es independiente de la orientación del elemento. La fuerza $d\mathbf{t}$ es tangente a la interfaz y normal a $d\mathbf{l}$, y se expresa como

$$d\mathbf{t} = \gamma d\mathbf{l} \mathbf{n} \quad (2.38)$$

donde \mathbf{n} es normal a $d\mathbf{l}$ y paralela a la interfaz, y su sentido va desde la porción sobre la cual es ejercida la fuerza hacia la porción que la ejerce. El factor γ que aparece en la (2.38) se denomina *coeficiente de tensión superficial*⁵, y le daremos signo positivo si la fuerza $\mathbf{t}_{d\mathbf{l}}$ es atractiva. El coeficiente de tensión superficial es una propiedad de la interfase, es decir, de la naturaleza de los dos medios presentes de ambos lados de la misma, y de su estado termodinámico.

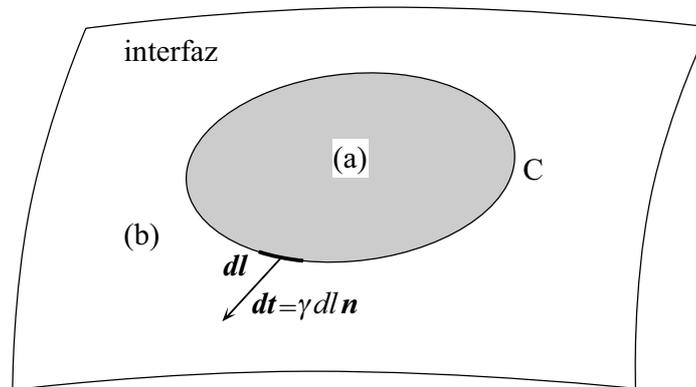


Fig. 2.5. Mostramos la misma situación que en la Fig. 2.4, pero para mayor claridad hemos dibujado solamente la intersección entre el elemento de volumen y la interfaz. A través de cada elemento $d\mathbf{l}$ de la curva C, la porción (b) de la interfaz ejerce sobre la porción (a) una fuerza $d\mathbf{t}$ que es tangente a la interfaz y normal a $d\mathbf{l}$.

En la Fig. 2.5 se ha representado la fuerza $d\mathbf{t}$ ejercida por la porción (b) de la interfaz sobre la porción (a). En este caso, γ es positivo, puesto que $d\mathbf{t}$ tiene el mismo sentido que \mathbf{n} .

Debido a la tensión superficial, para aumentar en δA el área de un elemento de superficie de la interfaz es preciso realizar un trabajo

$$\delta W = \gamma \delta A \quad (2.39)$$

y por lo tanto, habrá una variación $\gamma \delta A$ de la energía del sistema (que incluye la interfaz). Para tener en cuenta esto debemos agregar un término de *energía superficial*, de la forma γA , a los términos que representan las energías de volumen de los medios (1) y (2).

Del punto de vista de la termodinámica, el trabajo realizado al deformar la interfaz se almacena en el sistema como energía libre de Helmholtz. La energía libre de Helmholtz es una función de estado termodinámica dada, por unidad de masa, por

$$f(T, v) = e - Ts \quad (2.40)$$

⁵ Las dimensiones del coeficiente de tensión superficial son las de fuerza/longitud.

donde T es la temperatura, v el volumen específico, y e, s la energía interna y la entropía por unidad de masa. La energía libre total F del sistema integrado por dos medios uniformes de densidades ρ_1, ρ_2 , y volúmenes V_1, V_2 , con una interfase de área A , tiene entonces la forma

$$F = \rho_1 V_1 f_1 + \rho_2 V_2 f_2 + \gamma A \quad (2.41)$$

donde f_1, f_2 son las energías libres por unidad de masa de los dos medios. Luego, en un proceso en el cual las densidades ρ_1, ρ_2 y la temperatura común T se mantienen constantes, el trabajo hecho sobre el sistema es

$$\delta W = \delta F = \gamma \delta A \quad (2.42)$$

Vemos entonces que γ se puede interpretar también como una energía por unidad de área.

Contorno de equilibrio entre dos fluidos en reposo

Vamos a suponer que γ es uniforme sobre la interfaz. En primer término, mostraremos que una superficie curva en estado de tensión ejerce un esfuerzo normal. Para ello consideramos el entorno de un punto O de la interfaz (ver Fig. 2.6). Elegimos O como origen de un sistema de coordenadas cuyo eje z es normal a la interfaz. Sea $z = \zeta(x, y)$ la ecuación de la interfaz; entonces $\zeta(0, 0) = 0$ y

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)_O = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)_O = 0 \quad (2.43)$$

puesto que la interfaz es tangente al plano $z = 0$. Supondremos que en el entorno de O , la interfaz se puede aproximar por una superficie de segundo orden; geoméricamente, esto significa que en O , la superficie está caracterizada por dos radios de curvatura, R_x, R_y , correspondientes cada uno a las curvas que resultan de intersecar la superficie con dos planos ortogonales que contienen al eje z , y que podemos considerar como los planos (x, z) e (y, z) .

Es un resultado bien conocido del análisis matemático que el radio de curvatura de una curva plana $y = y(x)$, está dado por

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (2.44)$$

donde las primas indican derivación respecto de x . Como en nuestro caso las derivadas primeras son nulas, los radios de curvatura en los planos (x, z) e (y, z) son, respectivamente

$$\frac{1}{R_x} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{R_y} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \quad (2.45)$$

Evaluemos ahora la resultante $d\mathbf{F}'$ de las fuerzas ejercidas por la tensión superficial sobre dos elementos de línea dy paralelos al eje y , colocados a una distancia $dx/2$ de O (ver Fig. 2.5). Las componentes x se compensan entre sí, pero quedan las componentes según z que se suman dando

$$dF'_z = 2\gamma \, dy \, \text{sen } \theta = \gamma \, dx \, dy / R_x = \gamma \, dx \, dy (\partial^2 \zeta / \partial x^2) \quad (2.46)$$

puesto que $\text{sen}\theta \approx \theta \approx dx/2R_x$. Análogo valor se encuentra si calculamos la resultante dF'' de las fuerzas ejercidas por la tensión sobre dos elementos de línea dx , paralelos al eje x , y colocados a $dy/2$ de O , pero con $\partial^2\xi/\partial y^2$ en lugar de $\partial^2\xi/\partial x^2$.

Por lo tanto, la resultante de las fuerzas de tensión superficial que se ejercen sobre el elemento de superficie $dx dy$ de la interfaz, equivale a un esfuerzo normal a la interfaz (o lo que es lo mismo, a una presión) dado por:

$$p_s = \frac{dF'_z + dF''_z}{dx dy} = \gamma \left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} \right) = \gamma \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right) \quad (2.47)$$

De la teoría de las superficies de segundo orden, se sabe que la suma entre paréntesis es independiente de la elección de los dos planos ortogonales: éstos se pueden elegir arbitrariamente, pero habitualmente se eligen de modo que R_x , R_y sean los radios de curvatura *principales*. Por supuesto, R_x , R_y se deben tomar *con sus signos* (dados por los signos de las derivadas segundas). En todos los casos, las fuerzas que contribuyen a la presión equivalente sobre la interfaz están dirigidas hacia el respectivo centro de curvatura.

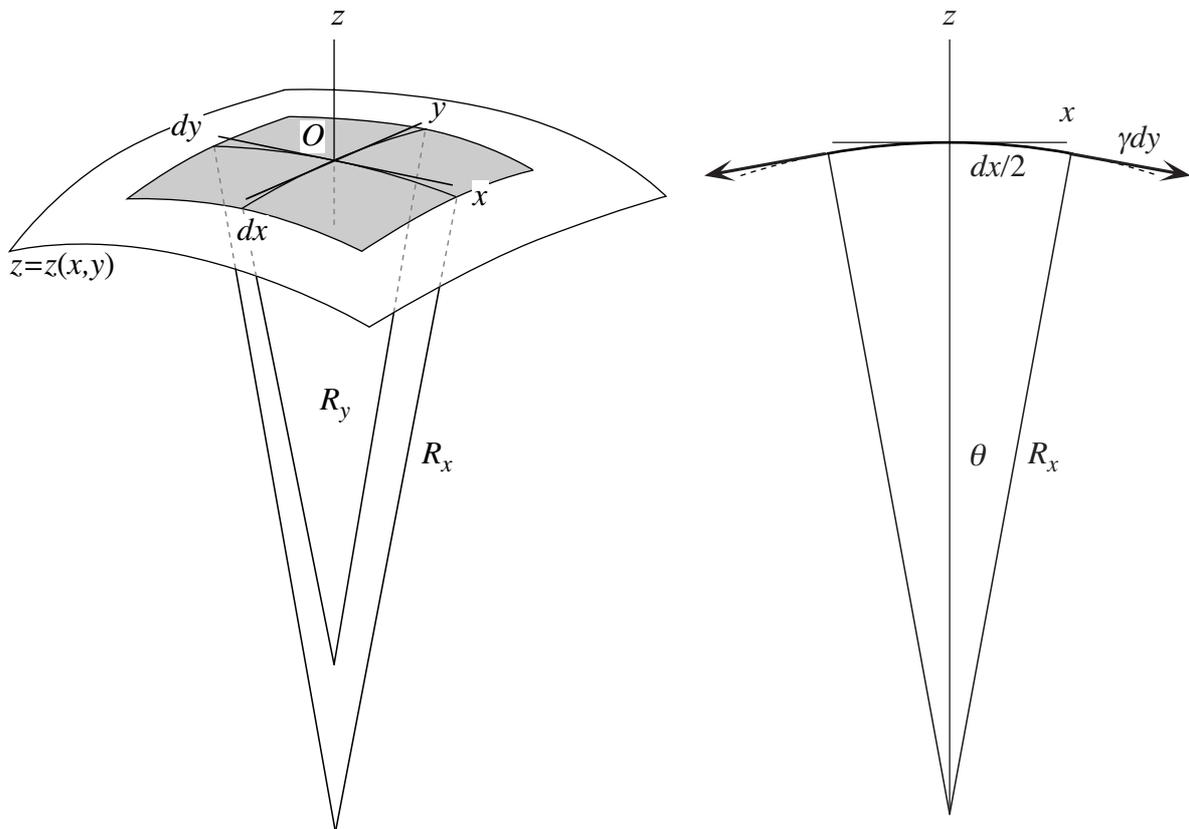


Fig. 2.6. Las fuerzas que actúan sobre el elemento de superficie $dx dy$ de la interfaz tienen como resultante una fuerza neta normal a la interfaz, que se puede interpretar como debida a una presión de superficie p_s . La magnitud y el signo de p_s dependen de la curvatura de la interfaz.

El esfuerzo normal p_s se denomina *presión de superficie*. En el equilibrio, p_s debe balancear la diferencia entre las presiones ejercidas por los fluidos a ambos lados, dada por:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = p_s = \gamma \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right) \quad (2.48)$$

de modo que la presión de superficie se suma a la presión del fluido dentro del cual se encuentra el centro de curvatura más próximo. La (2.48) se denomina *fórmula de Laplace*.

Forma de una gota líquida

Un caso interesante es el de un pequeño volumen de fluido completamente rodeado por otro (gota o burbuja). Si el volumen es muy pequeño, los efectos de la gravedad (como veremos en seguida) se pueden despreciar y tanto p_1 como p_2 son uniformes. Luego el salto de presión es el mismo sobre toda la interfaz, el radio de curvatura es constante y la única forma admisible es la esfera. A este resultado también se llega por la condición de mínima energía: dado que γ es la energía de superficie por unidad de área, la mínima energía se tiene para una gota esférica, pues tiene el área mínima para el volumen dado.

Veamos bajo que condición se puede despreciar la gravedad. La diferencia de presión debida a la gravedad entre los polos de la esfera es $2\rho gR$, donde R es el radio de la esfera. Esta diferencia debe ser despreciable frente a $2\gamma / R$ lo cual conduce ($R_x = R_y = R$) a la condición

$$R \ll \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \quad (2.49)$$

Para una gota de agua en aire, resulta $R \ll 0.27$ cm.

Línea de contacto triple y ángulo de contacto

Por lo general, toda superficie de contacto entre dos fluidos está limitada por una línea a lo largo de la cual están en contacto *tres* medios (uno de ellos puede ser un sólido). La *línea de contacto triple* está sujeta a la tensión de tres interfases diferentes. En el equilibrio, la resultante de estas tres tensiones sobre un elemento dl de la línea de contacto debe tener componente nula en toda dirección a lo largo de la cual la línea de contacto se puede desplazar.

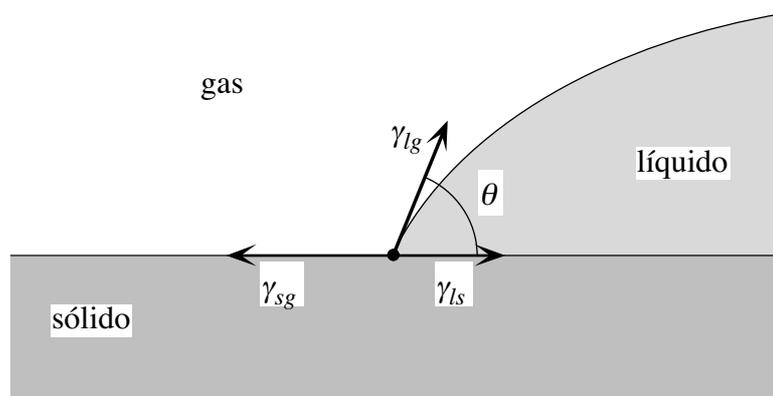


Fig. 2.7. Equilibrio de una línea de contacto triple entre un sólido (1) un gas (2) y un líquido (3). Se han indicado las fuerzas por unidad de longitud de la línea de contacto triple suponiendo que todos los coeficientes de tensión interfacial son positivos.

En la Fig. 2.7 se representa una línea de contacto triple entre un sólido, un gas y un líquido (piense, concretamente, en una gota líquida que descansa sobre una superficie sólida plana y está

rodeada de aire). Claramente, la línea de contacto está obligada a desplazarse sobre la superficie del sólido. En el equilibrio, entonces, la resultante de las tensiones sobre un elemento dl de la línea de contacto debe tener componente nula en toda dirección del plano superficial del sólido. De resultas de esta condición, el *ángulo de contacto* θ queda determinado por los valores de γ , de acuerdo con

$$\gamma_{ls} + \gamma_{lg} \cos\theta = \gamma_{sg} \quad (2.50)$$

Dado que $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, la condición (2.50) se puede satisfacer sólo si

$$\gamma_{sg} + \gamma_{lg} \geq \gamma_{ls} \geq \gamma_{sg} - \gamma_{lg} \quad (2.51)$$

Si se cumple que $\gamma_{ls} \geq \gamma_{sg} + \gamma_{lg}$ (veremos que γ_{sg} y γ_{lg} son seguramente positivos) tendremos $\theta = \pi$, esto es, el líquido no moja al sólido y tiende a evitar estar en contacto con él. Esto ocurre porque es energéticamente favorable reducir el área de la interfaz líquido-sólido aún a pesar que esto implica incrementar el área de las interfases sólido-gas y líquido-gas. En este caso la gota descansa sobre la superficie sólida apoyándose solo en un punto.

En cambio si $\gamma_{ls} \leq \gamma_{sg} - \gamma_{lg}$, tendremos $\theta = 0$, esto es, el líquido moja perfectamente al sólido y tiende a extenderse sobre él para cubrirlo por completo. Sucede así porque es energéticamente favorable aumentar el área de la interfaz líquido-sólido y disminuir el área de la interfaz sólido-gas, aún a pesar que esto implica aumentar el área de la interfaz líquido-gas.

Cuanto menor es θ , mayor es el grado de “mojabilidad”; para el agua pura sobre la mayoría de los sólidos resulta $\theta < \pi/2$, a diferencia del mercurio para el cual generalmente $\theta > \pi/2$.

Características de los coeficientes de tensión superficial

La tensión superficial se origina en las fuerzas atractivas intermoleculares. Consideremos una molécula en el seno del fluido. En promedio, la resultante de las fuerzas de interacción que las moléculas vecinas ejercen sobre ella es nula. Por lo tanto, un cambio de posición de nuestra molécula no implica trabajo, y en consecuencia la energía libre del sistema no varía. Consideremos ahora una molécula que está en el entorno de la interfase (a una distancia menor o del orden del alcance de las fuerzas intermoleculares, esto es, unos 10^{-7} cm). En este caso, debido a la distinta naturaleza y concentración de las moléculas de uno y otro lado de la interfase, la resultante de las fuerzas de interacción que se ejercen sobre ella *no es nula*. Por lo tanto un cambio de posición de nuestra molécula *requiere trabajo*, y por consiguiente implica una variación de la energía libre del sistema. De resultas de esto, la energía total de cada fluido es función del número de moléculas en el entorno de la interfase, que a su vez es proporcional al área de ésta (para una dada densidad, y supuesto fijo el alcance de las fuerzas intermoleculares).

En base a estos conceptos, es fácil ver que γ es positivo cuando uno de los dos medios es líquido o sólido, y el otro un gas. En efecto, las moléculas de un líquido están sujetas a fuerzas atractivas ejercidas por las moléculas vecinas. Estas fuerzas se equilibran en promedio para las moléculas que están lejos de la interfaz, como ya dijimos. Pero a las moléculas que están cerca de la interfaz con el gas le faltan vecinos del lado del gas, y entonces experimentan una fuerza neta de cohesión, que tiende a alejarla de la interfaz. Por lo tanto las moléculas del líquido tienden a moverse hacia adentro, lo que es equivalente a decir que la interfaz entre un líquido y un gas se comporta como una membrana elástica en tensión, que tiende a contraerse. Si no hay otras fuer-

zas que se opongan a esta tendencia, el área de la interfaz toma el valor mínimo compatible con el volumen del líquido. Esta es la razón por la cual las gotas líquidas pequeñas son esféricas.

En cambio, en una interfase líquido-líquido, se puede dar también la situación opuesta, en la cual $\gamma < 0$. En este caso, la interfase tiende a extenderse. Esta situación es claramente inestable y conduce a una mezcla de los dos líquidos.

Los casos de interfases cerradas sólido-gas o sólido-líquido no tienen interés en este contexto, debido a que el contorno del sólido es indeformable. Vimos ya, en cambio, que tienen especial interés los casos en los cuales hay *líneas de contacto triples*, que involucran dos fluidos y un sólido (además, obviamente, de las que involucran tres fluidos).

Para la interfaz entre aire y agua pura a 15 °C, se tiene $\gamma = 73.5 \text{ dyn/cm}$ ($= \text{erg/cm}^2$). Para aire-metal líquido γ es mucho mayor, como es de esperar en vista de la gran densidad de los metales líquidos ($\gamma = 780 \text{ dyn/cm}$ para mercurio-aire). Para aceite-agua γ es positivo, pero menor que para agua-aire (por este motivo una gota de aceite depositada sobre la superficie del agua se extiende enormemente, formando una película extremadamente delgada).

El coeficiente de tensión superficial es función de la temperatura. Una relación empírica que describe con razonable aproximación el comportamiento de muchas superficies líquidas es la ecuación de Eötvös

$$\gamma = k \frac{T_c - T}{v_m^{2/3}} \quad (2.52)$$

donde v_m es el volumen molar del líquido, T_c la temperatura crítica ($T_c = 647 \text{ °K}$ para el agua) y k es una constante que se determina experimentalmente. El volumen molar de un líquido depende de la temperatura, pero no muy fuertemente, y depende muy débilmente de la presión a que está sometido el líquido cuya superficie estamos considerando. La ecuación de Eötvös predice que γ disminuye con la temperatura hasta que se anula a la temperatura crítica (donde un líquido y su vapor se confunden y desaparece la interfaz entre ambos).

Como ya se dijo, las fuerzas de tensión superficial dependen de lo que hay del otro lado de la superficie del líquido, pues *siempre* el espacio más allá de la superficie está ocupado por algún otro medio⁶, cuyas moléculas interactúan con las del líquido que están cerca de la interfaz. Pero cuando el medio que rodea al líquido es un gas o un vapor, su influencia es escasa, debido a la baja densidad de sus moléculas. Por lo tanto en estos casos se puede suponer con buena aproximación que el coeficiente de tensión interfacial depende solamente del líquido.

No es así, en cambio, cuando un líquido está en contacto con un sólido (por ejemplo, con las paredes del recipiente que lo contiene), o con otro líquido. En estos casos, debido a la alta densidad de estos medios, su interacción con el líquido a través de la interfaz es muy intensa. Dependiendo de la naturaleza de las sustancias en contacto, además, esta interacción puede ser atractiva, o por el contrario, repulsiva. Corresponde también puntualizar que, debido al corto alcance de las fuerzas intermoleculares, la presencia de películas delgadas (incluso monomoleculares) de contaminantes puede tener un efecto muy pronunciado. Este hecho tiene una enorme importancia práctica.

Debido a esto, podemos modificar según nos convenga los efectos de tensión interfacial, ya sea disolviendo en el líquido sustancias *tensioactivas*, como jabones y detergentes, ya sea recu-

⁶ En última instancia, por el vapor del mismo líquido.

briendo las superficies de sólidos con grasas y aceites. Los jabones y detergentes al disolverse en el agua disminuyen la tensión superficial de ésta y en consecuencia facilitan que moje y disuelva otras sustancias, y también facilitan la formación de espuma. Por el contrario, las grasas y aceites tienden a repeler el agua e impiden que los objetos se mojen.

La contaminación de las aguas con jabones y detergentes (que siempre están presentes en las aguas servidas) es nociva para muchos organismos grandes y pequeños que subsisten gracias a los efectos de la tensión interfacial. Hay insectos que caminan sobre el agua gracias a la tensión superficial, y otros que al sumergirse llevan consigo una burbuja de aire que les permite respirar. Muchas aves y mamíferos acuáticos evitan que el agua impregne su plumaje o pelambre gracias a las películas de aceite que los recubren.

Las circunstancias bajo las cuales la tensión superficial tiene efectos mecánicos significativos depende de la magnitud de las otras fuerzas presentes en el sistema, y deben ser examinadas caso por caso. En general, son importantes en los sistemas donde las áreas de las interfases son grandes para su volumen. Muchos de estos sistemas revisten gran importancia tecnológica o práctica. Las emulsiones (como la mayonesa) son un ejemplo de este tipo. Otro ejemplo lo constituyen los flujos en medios porosos (por ejemplo el flujo de hidrocarburos líquidos en yacimientos). También son importantes en sistemas en los que las otras fuerzas en juego son pequeñas, como ocurre en muchas situaciones de interés biológico.

Cohesión de líquidos

Debido a las fuerzas intermoleculares las partes de un líquido tienden a mantenerse unidas. Es así que una columna líquida resiste esfuerzos de *tracción*. Esta propiedad se denomina *cohesión*, y está relacionada con el concepto de tensión superficial. La cohesión del agua es fundamental para explicar el ascenso de la savia en árboles muy altos.

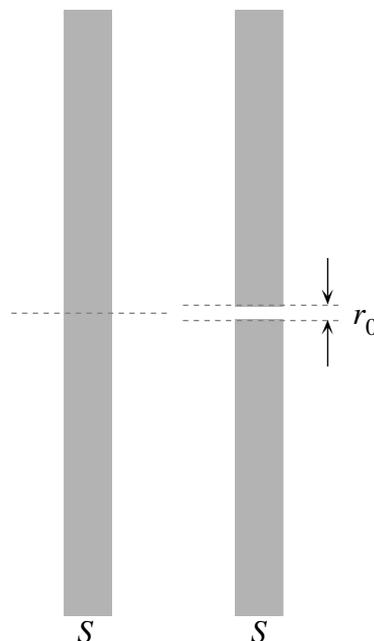


Fig. 2.8. Para romper una columna líquida es preciso separar las dos partes a una distancia mayor que el alcance de las fuerzas intermoleculares.

Sea, por ejemplo una columna⁷ de sección S , como se indica en la Fig. 2.8. Para romperla en dos partes es necesario conseguir de alguna forma (que por el momento no nos interesa) que las dos partes se separen hasta una distancia mayor que el rango de las fuerzas intermoleculares, digamos una distancia del orden de r_0 (Capítulo 1). En este proceso se crean *dos* superficies, cada una de área igual a S , es decir $2S$ en total. Esto implica un trabajo dado por

$$W = 2\gamma S \quad (2.53)$$

Este trabajo debe ser igual al trabajo de la fuerza de tracción F que es preciso ejercer para separar las dos partes de la columna, que vale (en orden de magnitud)

$$W = F r_0 \quad (2.54)$$

Por lo tanto, el esfuerzo de tracción (fuerza por unidad de área) debe valer

$$p_0 = \frac{F}{S} = \frac{2\gamma}{r_0} \quad (2.55)$$

La cantidad p_0 , que recibe el nombre de *presión intrínseca* o *presión de Laplace*, es el esfuerzo necesario para romper la columna líquida y da la medida de su cohesión. Para agua a 25°C , con $r_0 \approx 10^{-8}$ cm, resulta $p_0 \approx 140$ atmósferas⁸.

No es fácil medir la cohesión de líquidos, ya que el efecto es influenciado por la presencia de contaminantes, tanto en el líquido como sobre la superficie del tubo que lo contiene. Los mejores resultados se han obtenido mediante tubos rotantes, en los cuales la fuerza centrífuga ejerce la tracción sobre el líquido. Con esos dispositivos, usando agua común sin ninguna precaución especial en cuanto a la limpieza, se obtienen valores entre 3 y 10 atmósferas. Con precauciones especiales de limpieza se han obtenido valores 10 veces mayores.

⁷ La columna líquida se supone contenida en un tubo delgado o un capilar.

⁸ Por lo tanto una columna de agua de unos 1500 m de altura podría sostener su propio peso sin romperse.