

## 1. NOCIONES BÁSICAS SOBRE LOS FLUIDOS

### ***Comportamiento mecánico de los fluidos***

La propiedad fundamental que caracteriza a los fluidos (líquidos y gases) es que carecen de rigidez y en consecuencia se deforman fácilmente. Por este motivo un fluido no tiene forma y diferentes porciones del mismo se pueden acomodar dentro del recipiente que lo contiene. En esto difieren de los sólidos, que en virtud de su rigidez tienen una forma definida, que sólo varía si se aplican fuerzas de considerable intensidad.

Sin embargo, la distinción entre sólidos y fluidos no es nítida, pues muchos materiales que se comportan como sólidos bajo ciertas circunstancias, en otras circunstancias se comportan como fluidos. Llamaremos *sólido simple* a un medio en el cual las posiciones relativas de sus elementos sufren cambios de pequeña magnitud cuando las fuerzas que actúan sobre él tienen cambios pequeños. Es decir: pequeñas fuerzas producen deformaciones pequeñas. Análogamente, llamaremos *fluido simple* a un medio en el cual las posiciones relativas de sus elementos sufren cambios no pequeños, aún cuando sean pequeños los cambios de las fuerzas que actúan sobre él. En otras palabras: fuerzas pequeñas dan lugar a deformaciones de gran magnitud.

Aquí conviene distinguir entre deformaciones con cambio de volumen pero sin cambio de forma (expansiones o contracciones puras) y deformaciones con cambio de forma pero sin cambio de volumen (distorsiones puras). En general, la deformación es una combinación de ambas.

Llamaremos *fluido* a una porción de materia incapaz de contrarrestar el efecto de fuerzas que producen deformaciones sin cambio de volumen. Esto no quiere decir que el fluido no opone resistencia a tales deformaciones, pero sí significa que esta resistencia tiende a cero cuando tiende a cero la *rapidez* con la cual se produce la deformación, independientemente de la *magnitud* de la deformación. En consecuencia, dicha resistencia limita la *rapidez* con la cual ocurre la deformación, *pero no su magnitud*.

Resumiendo, en un sólido la deformación tiende a cero si la fuerza que la produce tiende a cero, mientras que en un fluido es la rapidez de la deformación la que tiende a cero cuando la fuerza tiende a cero.

La distinción entre líquidos y gases, en lo referente a su comportamiento dinámico, es mucho menos fundamental. Típicamente, la densidad de una sustancia en la fase líquida suele ser mucho mayor (por varios órdenes de magnitud) que en la fase gaseosa<sup>1</sup>, pero esto no afecta el tipo de movimiento, y sólo implica que se requieren fuerzas de diferente magnitud para producir la misma aceleración. La diferencia más significativa (en cuanto a sus efectos dinámicos) entre las propiedades mecánicas de líquidos y gases está en su *compresibilidad*. Los gases se comprimen más fácilmente que los líquidos: en consecuencia, cualquier movimiento que involucre variaciones apreciables de presión está acompañado por cambios de volumen que son mucho mayores en un gas que en un líquido. En general, podemos decir que los líquidos son poco compresibles y que los gases son bastante compresibles.

Las propiedades mecánicas de sólidos, líquidos y gases están directamente relacionados con la estructura molecular de la materia y con la naturaleza de las fuerzas entre moléculas. Esto se puede entender cualitativamente considerando la energía potencial de interacción  $V(r)$  entre dos

---

<sup>1</sup> No siempre es así, por ejemplo, cerca del punto crítico las densidades de las fases líquida y gaseosa son casi iguales.

moléculas como función de la distancia  $r$  que separa sus centros. Para valores pequeños de  $r$  (del orden de  $10^{-8}$  cm) la interacción entre las moléculas es de origen cuántico y puede ser atractiva o repulsiva, de acuerdo con la posibilidad de intercambio de los electrones de los orbitales externos de las mismas. Cuando dicho intercambio es posible, la interacción es atractiva y da lugar a una reacción química<sup>2</sup>. Cuando el intercambio no es posible, la interacción es repulsiva. La forma típica de  $V(r)$  en este último caso se representa cualitativamente en la Fig. 1.1. La fuerza de repulsión ( $-dV/dr$ ) se debe a la impenetrabilidad de los orbitales electrónicos de las moléculas, y disminuye muy rápidamente a medida que  $r$  aumenta. Para distancias mayores entre los centros de las moléculas (unos  $10^{-7}$ - $10^{-8}$  cm) la fuerza es débilmente atractiva. Esta fuerza de *cohesión* disminuye con  $r$ , primero como  $r^{-7}$  y luego como  $r^{-8}$  para  $r$  grande. Su origen es la polarización eléctrica de cada molécula debido a la influencia de la otra. Cuando la separación es  $r_0$  (alrededor de  $3\text{-}4 \times 10^{-8}$  cm para las moléculas más simples), la energía potencial de interacción es mínima y las moléculas están en equilibrio.

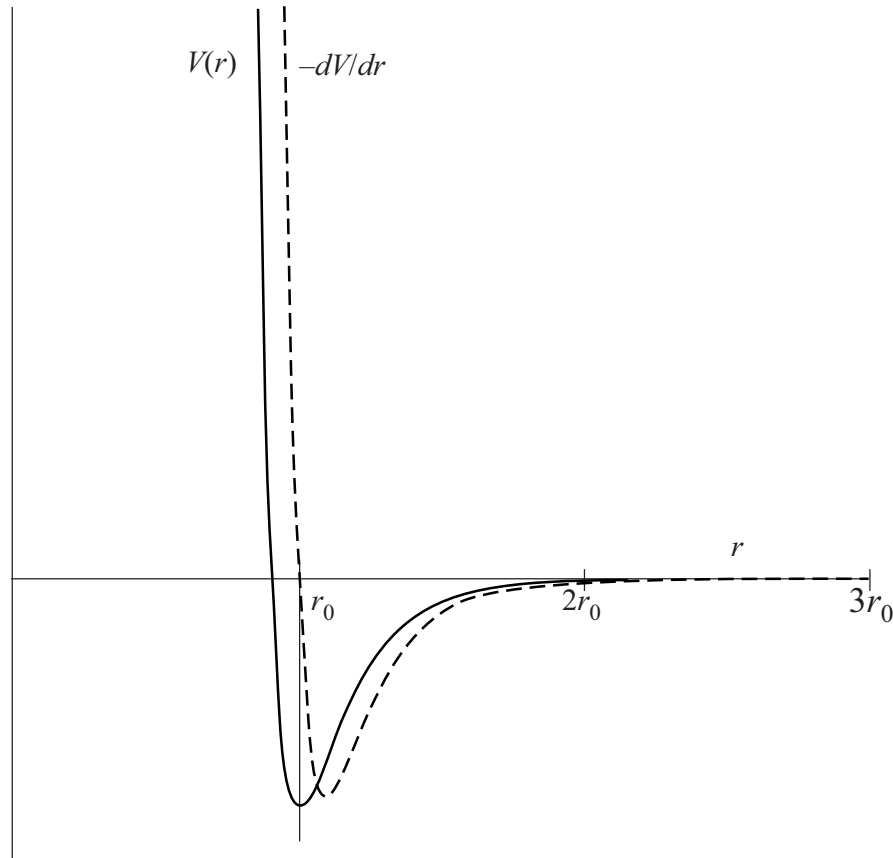


Fig. 1.1. Energía potencial (línea llena) y fuerza de interacción (línea de trazos) entre dos moléculas en función de la distancia entre centros. Se ha supuesto que las moléculas no reaccionan químicamente entre sí. Se puede apreciar que, en primera aproximación, las moléculas comportan como esferas rígidas de radio  $r_0/2$ . Observe que ya para una separación  $2r_0$  la interacción es prácticamente nula. El diagrama es cualitativo.

Si  $m$  es la masa de una molécula y  $\rho$  la densidad de la sustancia, el número de moléculas por unidad de volumen es  $n = \rho/m$  y la distancia media entre ellas es  $d \cong n^{-1/3}$ . Para un gas en

<sup>2</sup> No trataremos el caso de medios en los que están ocurriendo reacciones químicas.

condiciones normales de temperatura y presión,  $n \cong 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ , luego  $d \cong 5 \times 10^{-7} \text{ cm}$ , que es del orden de  $10 r_0$ ; en cambio, para sólidos y líquidos,  $n \cong 10^{22} \text{ cm}^{-3}$  y entonces  $d \cong 5 \times 10^{-8} \text{ cm}$ , del orden de  $r_0$ . En consecuencia, en un gas las moléculas están (término medio) tan lejos una de otra que las fuerzas repulsivas o atractivas de corto alcance que se ejercen entre ellas se pueden despreciar<sup>3</sup>, salvo durante las colisiones. En cambio en los líquidos y los sólidos, las moléculas están todo lo cercanas entre sí que se lo permite su repulsión mutua, y cada molécula está siempre dentro del rango de interacción de varias otras moléculas vecinas.

En el caso de un sólido cristalino el arreglo de las moléculas es *ordenado* y prácticamente permanente. Debido a su energía térmica cada molécula efectúa oscilaciones alrededor de su posición de equilibrio en la red cristalina. Dicha estructura se mantiene prácticamente intacta hasta que la temperatura del sólido alcanza el punto de fusión. Al fundirse, la densidad de la mayoría de las sustancias disminuye<sup>4</sup> sólo ligeramente (unos pocos %), pero esta pequeña variación de la distancia media es suficiente para producir cambios muy importantes de su estructura.

El conocimiento del estado líquido todavía es incompleto. Sin embargo, se sabe que el arreglo de las moléculas es *parcialmente* ordenado: las moléculas forman grupos que se mueven en conjunto y cambian continuamente, perdiendo moléculas e incorporando otras. Esta es la razón por la cual cualquier fuerza aplicada a un líquido produce una deformación sin límite pero sin cambio de volumen.

Veremos más adelante que el mecanismo microscópico por el cual un líquido opone resistencia a los cambios de forma es diferente al que se tiene en el caso de un gas. Sin embargo a nivel macroscópico los efectos son análogos. Por lo tanto, en la descripción macroscópica del movimiento de gases y líquidos se emplean las mismas ecuaciones, y se los trata conjuntamente en una disciplina denominada *Mecánica de Fluidos*. Dentro de la Mecánica de Fluidos se distinguen ulteriormente dos ramas: la *Hidrodinámica*, que estudia el movimiento de fluidos con densidad constante (incompresibles), y la *Dinámica de Gases*, que hace lo propio con fluidos de densidad variable (compresibles). Debe quedar claro, sin embargo, que un mismo fluido (por ejemplo el aire) se puede comportar como compresible o como incompresible, según las circunstancias. Por lo tanto dicha distinción no se refiere a la naturaleza del fluido (composición química, densidad, temperatura, etc.) sino al *tipo de movimiento* que está ocurriendo. Las condiciones bajo las cuales el movimiento de un fluido involucra (o no) variaciones de su densidad, o sea, que pueda ser tratado como compresible (o incompresible) las aclararemos más adelante en el Capítulo 10. Mientras tanto daremos a la “compresibilidad” o “incompresibilidad” del flujo bajo estudio el carácter de hipótesis *a priori*, sujeto a establecer después los criterios para decidir cuál hipótesis se debe aplicar en cada situación concreta. Sin embargo podemos adelantar que en la mayoría de los casos de interés práctico, los líquidos se comportan como incompresibles; en cambio, para los gases se pueden dar ambos tipos de movimiento.

### ***Hipótesis del continuo***

Hemos visto en la sección anterior que las moléculas de un gas están separadas por regiones vacías cuyas dimensiones lineales son mucho mayores que las de las moléculas mismas. Pero incluso en un líquido, en el cual las moléculas están estrechamente empaquetadas, la masa (que

---

<sup>3</sup> Es por este motivo que un gas muy enrarecido y cuya temperatura es muy elevada se comporta como un gas perfecto.

<sup>4</sup> Un caso excepcional es el del agua, en que el hielo es menos denso que el agua líquida.

reside esencialmente en los núcleos atómicos) dista mucho de estar distribuida uniformemente en el espacio. Otras magnitudes, además de la masa, tienen también distribuciones espaciales altamente no uniformes en la escala microscópica.

Sin embargo, en muchas aplicaciones de interés práctico tan sólo nos interesa el comportamiento de la materia en una escala macroscópica, mucho mayor que la distancia intermolecular media  $d$ . Este es el caso de la Mecánica de Fluidos, y gracias a ello podemos ignorar la estructura molecular de la materia cuando describimos su movimiento.

La hipótesis básica de la Mecánica de Fluidos consiste en suponer que en escala macroscópica, un fluido se comporta como si estuviera dotado de una estructura perfectamente continua, o, si se quiere, como si no tuviera estructura alguna. De acuerdo con ello, magnitudes como la masa, la cantidad de movimiento y la energía, asociadas con la materia contenida en una pequeña parcela del fluido, se consideran uniformemente distribuidas en el volumen de la parcela (en vez de estar concentradas en una pequeña fracción de éste, como realmente ocurre).

Para aclarar esta idea mediante un ejemplo, y a la vez dar una definición operativa de las magnitudes que caracterizan el estado de un fluido, nos ocuparemos de la noción de *densidad*.

Consideremos el cociente  $\rho(L) = M(V)/V$  entre la masa  $M(V)$  contenida en un volumen  $V$  de una porción del fluido y el volumen mismo, como función de la dimensión lineal característica  $L = V^{1/3}$  de la porción. Una representación cualitativa de  $\rho(L)$  se da en la Fig. 1.2.

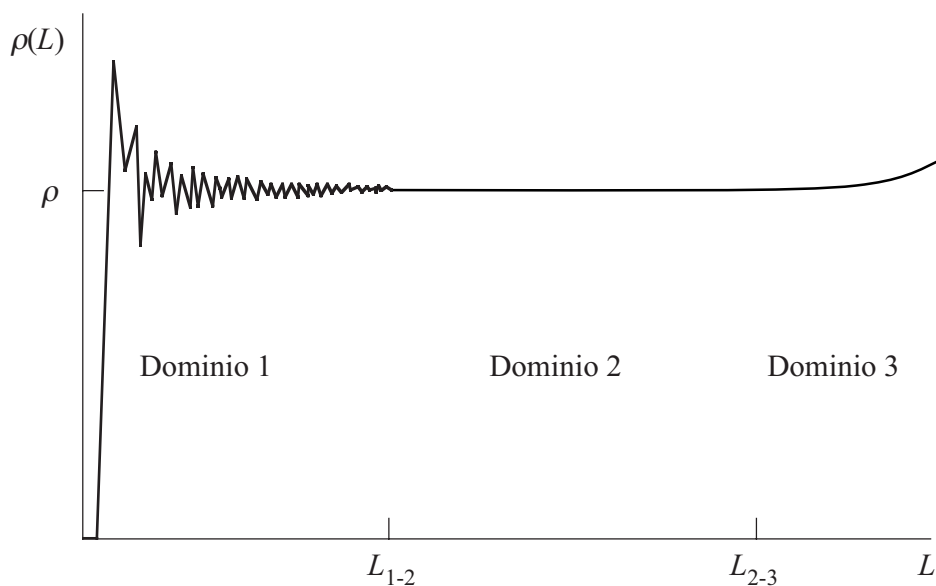


Fig. 1.2. Comportamiento de la densidad media  $\rho(L) = M(V)/V$  como función de  $L$ . En la escala microscópica (dominio 1)  $\rho(L)$  tiene fluctuaciones irregulares de gran magnitud, y por lo tanto el concepto de densidad media carece de significado físico. Sin embargo, se puede observar que en el dominio 2 tiene sentido hablar de la densidad del medio, dado que allí  $\rho(L)$  es independiente del tamaño  $L$  de la muestra.

En la Fig. 1.2 se pueden distinguir claramente tres dominios diferentes:

Dominio 1: para valores muy pequeños de  $L$ , del orden de  $d$ , la granulosidad de la materia produce variaciones bruscas de  $\rho(L)$ ; este es el dominio microscópico.

Dominio 2: en un intervalo en que el valor de  $L$  es pequeño en la escala macroscópica, pero grande respecto de  $d$ ,  $\rho(L)$  se mantiene prácticamente constante e independiente de  $L$ .

Dominio 3: cuando  $L$  es muy grande,  $\rho(L)$  ya no se mantiene constante.

El límite  $L_{1-2}$  entre los dos primeros dominios depende del estado de condensación; para un gas a presión y temperatura normales  $L_{1-2} \approx 10^{-5} - 10^{-6}$  cm, y para un líquido o un sólido  $L_{1-2} \approx 10^{-7}$  cm. El límite  $L_{2-3}$  entre los dos últimos dominios (macroscópicos) depende de las particularidades del sistema sobre escalas grandes, que habitualmente suelen ser mayores que 1 mm, excepto cerca de superficies especiales (por ejemplo, interfases líquido-gas), que se observan como discontinuidades macroscópicas. En consecuencia podemos concluir que en el intervalo  $L_{1-2} < L < L_{2-3}$  (región 2) tiene sentido definir una densidad  $\rho$  del elemento del fluido, pues  $\rho$  no depende ni de la forma ni de la dimensión del volumen de muestreo  $V$ . De manera análoga podemos definir una densidad de cantidad de movimiento, de energía, ..., etc., y por consiguiente también una velocidad del fluido.

En base a estas definiciones podemos enunciar la Hipótesis del Continuo de la manera siguiente:

En una descripción del movimiento de un fluido, tal que concierna muestreos sobre dimensiones mayores o iguales que  $L_{1-2}$ , la materia, la cantidad de movimiento y la energía se pueden suponer uniformemente distribuidas dentro de los elementos de volumen considerados.

Matemáticamente, esto equivale a considerar que

$$\rho = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{M(V)}{V}, \dots, \text{etc.} \quad (1.1)$$

aunque, en realidad, tal límite no existe.

En consecuencia, vamos a suponer que en cada punto<sup>5</sup>  $\mathbf{r}$  en el seno de un fluido, es posible definir una densidad  $\rho$ , una velocidad  $\mathbf{u}$ , una aceleración  $\mathbf{a}$ , etc.; en general, dichas magnitudes dependerán de la posición  $\mathbf{r}$  y del tiempo  $t$ .

Debe quedar claro que la Hipótesis del Continuo *no* implica que todo rastro de la granulosidad de la materia desaparece de las ecuaciones macroscópicas del movimiento. En estas ecuaciones quedan coeficientes<sup>6</sup> que no se pueden calcular o estimar sin recurrir a modelos microscópicos. Pero el cálculo de dichos coeficientes es misión de la Mecánica Estadística, y no nos vamos a ocupar de él en este curso.

No es fácil, en general, justificar la Hipótesis del Continuo y establecer su rango de validez en términos del comportamiento de la materia real. A los fines de estas notas podemos aceptar que su justificación radica en el comportamiento macroscópico de los fluidos tal como resulta de la observación y los experimentos. En tal sentido le daremos el valor de principio fundado en la experiencia. De esta forma aceptaremos como resultados experimentales que la densidad, la velocidad, la aceleración, ..., etc. de un elemento de fluido suficientemente pequeño son independientes del tamaño y la forma de dicho elemento, sin preocuparnos por el límite inferior del Dominio 2 (esto es, operando como si este límite no existiera). Precisamente, para nosotros el sustento de la Hipótesis del Continuo consiste en la observación empírica que la existencia de ese límite se irrelevante en lo que se refiere a la descripción macroscópica del movimiento del fluido.

<sup>5</sup> En lo sucesivo indicaremos las magnitudes vectoriales y tensoriales con símbolos en negrita.

<sup>6</sup> Coeficientes de viscosidad, de conductividad térmica, de tensión superficial e interfacial, etc..

### ***Fuerzas de volumen y de superficie en un fluido***

Consideremos un elemento de fluido de volumen  $V$  rodeado por una superficie cerrada  $S$ . Distinguiremos dos clases de fuerzas que actúan sobre el fluido contenido en dicho elemento: fuerzas de volumen y fuerzas de superficie.

#### **Fuerzas de volumen**

Son las fuerzas que *no dependen de la interacción del fluido en  $V$  con el fluido que lo rodea*. Por lo tanto existirían también si  $V$  estuviera rodeado por el vacío. Ejemplos de esta clase de fuerzas son el peso y las fuerzas ficticias o inerciales<sup>7</sup> (si estudiamos el movimiento del fluido en un referencial no inercial). En el caso de fluidos conductores de la electricidad, como los plasmas, habrá que considerar también a la fuerza de Lorentz. Nosotros nos limitaremos en este curso a la gravedad y a las fuerzas inerciales.

Estas fuerzas se llaman *de volumen* porque se pueden considerar distribuidas uniformemente dentro de  $V$ . Dado el carácter de las fuerzas de gravedad e inerciales, las podremos escribir como

$$\mathbf{F} = M\mathbf{g} = \mathbf{g} \int_V \rho dV \quad (1.2)$$

Aquí  $M$  indica la masa contenida en  $V$ , y el último paso es posible gracias a la Hipótesis del Continuo<sup>8</sup>. Debe quedar claro que  $\mathbf{g}$  no es solamente la aceleración de la gravedad: en un referencial no inercial general incluye también las aceleraciones lineal y de Coriolis.

#### **Fuerzas de superficie**

Son las fuerzas que *dependen de la interacción del fluido en  $V$  con el fluido adyacente* y por lo tanto se ejercen sobre  $V$  a través de  $S$ . Naturalmente, por la Tercera Ley de Newton, el fluido en  $V$  ejerce fuerzas iguales y contrarias sobre el fluido adyacente. Del punto de vista físico estas fuerzas pueden tener dos orígenes: (1) el transporte de cantidad de movimiento por migración de moléculas a través de  $S$  (en gases y líquidos), y (2) las fuerzas intermoleculares, que las moléculas de un lado de  $S$  ejercen sobre las moléculas del otro lado de  $S$  (en líquidos solamente). En ambos casos destacamos el carácter superficial de estas fuerzas (recordemos que las fuerzas intermoleculares son de corto alcance).

Es conveniente definir las fuerzas de superficie asociándolas con elementos de superficie planos  $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$ , identificados por su área  $dS$  y su normal  $\mathbf{n}$ . Más aún, se suelen expresar las fuerzas de superficie en términos de los *esfuerzos* (denominación que indica las fuerzas por unidad de superficie). Debe quedar claro, sin embargo, que lo que nos interesará establecer, para cada elemento de volumen del fluido, es la resultante de las fuerzas de superficie, calculada sobre el área que lo limita.

### ***Propiedades generales de las fuerzas de superficie***

En la Fig. 1.3 hemos representado dos elementos de fluido separados por una superficie plana  $dS$  (para una representación más cómoda, los hemos dibujado desplazados). Por convención, la fuerza  $d\mathbf{F}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t)$  es la fuerza de superficie que ejerce el fluido hacia el cual se dirige  $\mathbf{n}$  sobre el

<sup>7</sup> Por ejemplo, la fuerza centrífuga y la fuerza de Coriolis; esta última es muy importante en las aplicaciones de la Mecánica de Fluidos a la Meteorología y a la Oceanografía.

<sup>8</sup> Se ha supuesto también que  $\mathbf{g}$  no depende de la posición.

fluido desde donde proviene  $\mathbf{n}$ . De este modo (ver la figura),  $d\mathbf{F}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t)$  es la fuerza de superficie que la porción 2 del fluido ejerce sobre la porción 1.

En términos del esfuerzo  $\boldsymbol{\Sigma}$ , se tiene:

$$d\mathbf{F}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t) dS \tag{1.3}$$

Notar que, en general,  $d\mathbf{F}$  y  $\boldsymbol{\Sigma}$  no son paralelos a  $\mathbf{n}$ .

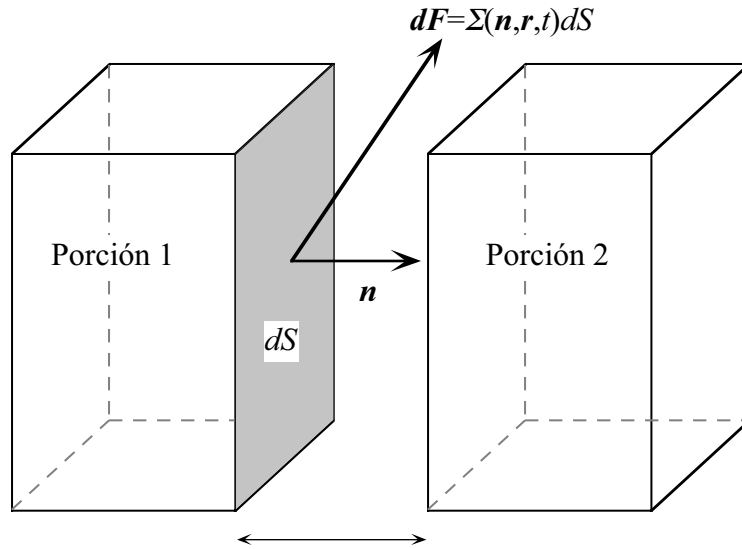


Fig. 1.3. Fuerza de superficie que la porción 2 del fluido ejerce sobre la región 1. Ambas porciones son adyacentes, pero en el esquema se las ha desplazado para que la visualización sea más cómoda.

Por el Principio de Acción y Reacción, la fuerza ejercida por 1 sobre 2 debe ser igual y contraria a la ejercida por 2 sobre 1. Por lo tanto debe ser:

$$\boldsymbol{\Sigma}(-\mathbf{n}, \mathbf{r}, t) = -\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t) \tag{1.4}$$

Para comenzar a aclarar la relación entre las fuerzas de superficie así definidas y su resultante sobre un elemento de volumen es útil estudiar un ejemplo.

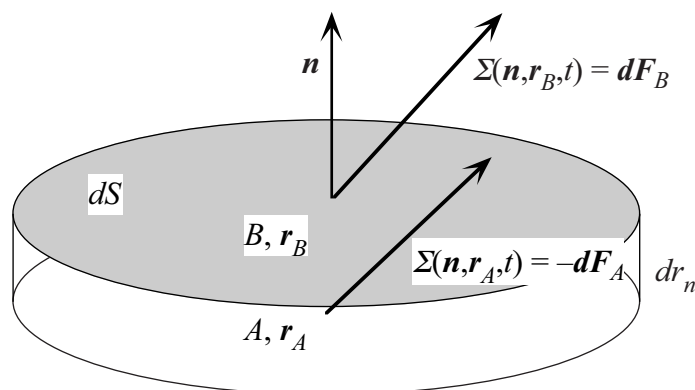


Fig. 1.4. Fuerzas de superficie que se ejercen sobre dos caras planas y paralelas que limitan un elemento fluido. El contorno lateral del elemento es arbitrario.

Sea una pequeña porción chata de fluido, limitada por dos superficies planas y paralelas  $A$  y  $B$  ( $\mathbf{n}_A = \mathbf{n}_B = \mathbf{n}$ ) de igual área  $dS$ , y cuyo contorno lateral es arbitrario (Fig. 1.4). En un dado instante  $t$ , la fuerza de superficie ejercida sobre dicha porción por el fluido ubicado debajo de  $A$  es

$$d\mathbf{F}_A = -\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{r}_A, t) dS \quad (1.5)$$

La fuerza ejercida sobre esa misma porción por el fluido ubicado encima de  $B$  es

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_B &= \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{r}_B, t) dS \\ &= \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{r}_A + dr_n \mathbf{n}, t) dS \\ &= \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{r}_A, t) dS + dr_n dS [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t)]_{r_A} \\ &= -d\mathbf{F}_A + dr_n dS [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t)]_{r_A} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Luego la resultante es

$$d\mathbf{F} = d\mathbf{F}_B + d\mathbf{F}_A = dr_n dS [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{r}, t)]_{r_A} \quad (1.7)$$

Por lo tanto vemos que  $d\mathbf{F} = O(dr_n)$ .

En resumen, los esfuerzos ejercidos por el fluido externo sobre el fluido de la parcela que estamos considerando a través de las caras planas y paralelas son iguales y opuestos a menos de términos del orden de  $dr_n$ . Esto es una consecuencia del principio de acción y reacción y de la continuidad que hemos supuesto para  $\boldsymbol{\Sigma}$ , y no tiene nada que ver con la naturaleza física de las fuerzas de superficie.

De resultas de esto, la fuerza resultante sobre la parcela resulta proporcional a la derivada espacial de  $\boldsymbol{\Sigma}$  a lo largo de la dirección normal a las caras y es del orden de la distancia entre las caras. Nótese que la masa de la parcela es

$$dm = \rho dr_n dS \quad (1.8)$$

Comparando (1.7) y (1.8) vemos que la aceleración es independiente tanto de  $dS$  como de  $dr_n$ , como era de esperar si vale la Hipótesis del Continuo.

### ***El tensor de los esfuerzos***

El ejemplo precedente muestra que la Hipótesis del Continuo implica que las componentes de los esfuerzos están sometidas a ciertas restricciones. Para investigar en qué consisten esas restricciones, consideremos un elemento de volumen  $\delta V$  centrado alrededor de un punto cualquiera  $P$  cuya posición es  $\mathbf{r}$ . Supongamos, por simplicidad, que  $\delta V$  está limitado por superficies planas, pero por lo demás, que su forma y su tamaño son arbitrarios.

Claramente, la razón entre la resultante de las fuerzas de superficie que actúan sobre  $\delta V$  y la masa contenida en  $\delta V$  debe ser la misma, en módulo y dirección, *cualquiera sea la forma y el tamaño* de  $\delta V$ : de lo contrario, la hipótesis del Continuo no valdría para la aceleración<sup>9</sup>. Este hecho no implica únicamente relaciones entre los esfuerzos asociados con dos caras paralelas cer-

<sup>9</sup> Cabe suponer, asimismo, que otras restricciones pueden surgir de considerar otras magnitudes.



canas (como las que ya vimos), sino también relaciones entre los esfuerzos asociados con elementos de superficie apoyados sobre el mismo punto P, pero con *diferentes orientaciones*.

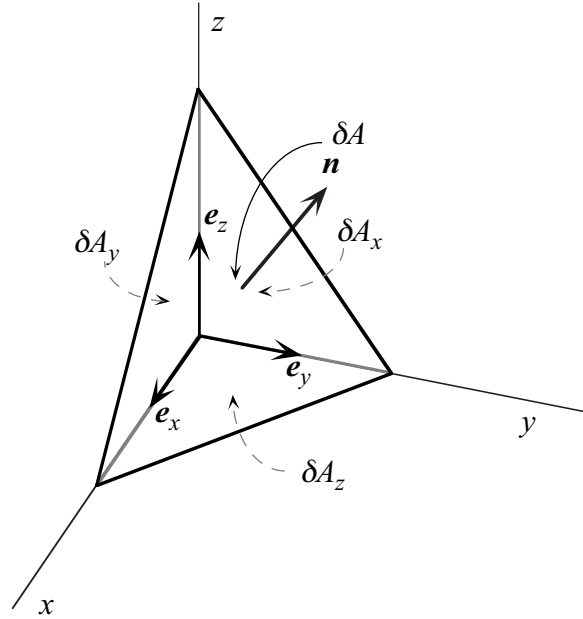


Fig. 1.5. Elemento de fluido en forma de tetraedro. La consideración de la relación entre los esfuerzos sobre las diferentes caras del tetraedro, en el límite en que el tetraedro es infinitesimal, lleva a la definición del tensor de los esfuerzos.

En efecto, mostraremos ahora que el esfuerzo  $\Sigma(\mathbf{n})$  asociado con un elemento de superficie cuya normal  $\mathbf{n}$  es arbitraria, se puede expresar en términos de los esfuerzos  $\Sigma(\mathbf{e}_x)$ ,  $\Sigma(\mathbf{e}_y)$ ,  $\Sigma(\mathbf{e}_z)$  asociados con elementos de superficie mutuamente ortogonales, caracterizados por las normales  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$ . Para ver esto, consideremos las fuerzas de superficie que actúan (en un instante  $t$  dado) sobre el fluido contenido en un elemento de volumen en forma de tetraedro, con tres caras ortogonales entre sí, de áreas  $\delta A_x$ ,  $\delta A_y$ ,  $\delta A_z$  y cuyas normales hacia afuera son, respectivamente,  $-\mathbf{e}_x$ ,  $-\mathbf{e}_y$ ,  $-\mathbf{e}_z$ , y cuya cuarta cara tiene un área  $\delta A$  y normal exterior  $\mathbf{n}$  (ver Fig. 1.5).

Tenemos, por geometría, que

$$\delta A_x = \delta A \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} \quad , \quad \delta A_y = \delta A \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} \quad , \quad \delta A_z = \delta A \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n} \quad (1.9)$$

Por otra parte, la resultante de las fuerzas de superficie es

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{R} &= \Sigma(\mathbf{n}) \delta A + \Sigma(-\mathbf{e}_x) \delta A_x + \Sigma(-\mathbf{e}_y) \delta A_y + \Sigma(-\mathbf{e}_z) \delta A_z \\ &= \delta A \left[ \Sigma(\mathbf{n}) - \Sigma(\mathbf{e}_x) \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} - \Sigma(\mathbf{e}_y) \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} - \Sigma(\mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n} \right] \end{aligned} \quad (1.10)$$

donde hemos usado (1.4) y (1.9). Finalmente, la masa del elemento de volumen considerado es

$$\delta M = \rho \delta V = \frac{1}{3} \delta A \delta h \quad (1.11)$$

siendo  $\delta h$  la distancia desde la cara de área  $\delta A$  y el vértice opuesto.

Ahora bien, la aceleración del elemento de fluido, dada por

$$\mathbf{a} = \frac{\delta R}{M} = \frac{3}{\delta h} \left[ \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}) - \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{e}_x) \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{e}_y) \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n} \right] \quad (1.12)$$

debe ser independiente del tamaño del elemento de volumen, esto es, debe ser independiente de  $\delta h$ . Por lo tanto, la cantidad entre corchetes en (1.12) debe tender a cero como  $\delta h$  cuando  $\delta h \rightarrow 0$ . En ese límite, las cuatro caras del tetraedro están apoyadas en P, y todos los esfuerzos están calculados en ese punto, esto es, en  $\mathbf{r}$ . Tenemos entonces que para todo punto del fluido vale la relación

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{e}_x) \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{e}_y) \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n} \quad (1.13)$$

En términos de componentes cartesianas, la (1.13) se expresa como

$$\begin{aligned} \Sigma_x(\mathbf{n}) &= \Sigma_x(\mathbf{e}_x) n_x + \Sigma_x(\mathbf{e}_y) n_y + \Sigma_x(\mathbf{e}_z) n_z \\ \Sigma_y(\mathbf{n}) &= \Sigma_y(\mathbf{e}_x) n_x + \Sigma_y(\mathbf{e}_y) n_y + \Sigma_y(\mathbf{e}_z) n_z \\ \Sigma_z(\mathbf{n}) &= \Sigma_z(\mathbf{e}_x) n_x + \Sigma_z(\mathbf{e}_y) n_y + \Sigma_z(\mathbf{e}_z) n_z \end{aligned} \quad (1.14)$$

Si llamamos

$$\sigma_{ij} = \Sigma_i(\mathbf{e}_j) \quad , \quad i, j = x, y, z \quad (1.15)$$

las (1.14) se pueden escribir como

$$\Sigma_i(\mathbf{n}) = \sigma_{ij} n_j \quad (1.16)$$

Ahora bien, puesto que  $\boldsymbol{\Sigma}$  y  $\mathbf{n}$  son vectores físicos (es decir, entes intrínsecos, que no dependen del sistema de coordenadas elegido para representarlos mediante componentes), las nuevas cantidades  $\sigma_{ij}$  deben representar en conjunto a otro ente intrínseco, que es un *tensor* de rango 2, que denominaremos *tensor de los esfuerzos*.

De acuerdo con la (1.15), la componente  $\sigma_{ij}$  del tensor de los esfuerzos es igual a la componente  $i$  de la fuerza por unidad de superficie ejercida a través de una superficie plana perpendicular al eje  $j$ , por el fluido situado hacia el lado *positivo* del eje sobre el fluido situado hacia el lado *negativo* del mismo.

Observemos que, en notación vectorial, el *flujo* por unidad de superficie de un vector  $\mathbf{a}$  a través de un elemento de superficie plana caracterizado por una normal  $\mathbf{n}$  se define como

$$\phi = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \quad (1.17)$$

Naturalmente, en este caso  $\phi$  es un escalar. Entonces, generalizando este concepto, de acuerdo con la (1.16) la magnitud  $\boldsymbol{\Sigma}$  se puede considerar como el *flujo* por unidad de superficie del tensor de los esfuerzos a través de un elemento de superficie plano de normal  $\mathbf{n}$ , sólo que ahora este flujo no es un escalar, sino un vector, justamente el vector  $\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n})$ . Esto se expresa en notación tensorial compacta como

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (1.18)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de los esfuerzos. Además de ser sumamente compacta, la (1.18) tiene la ventaja de ser una expresión que no depende de ningún sistema de coordenadas.

### **Resultante de las fuerzas de superficie sobre un elemento de volumen**

Consideremos ahora un elemento de volumen limitado por tres pares de caras perpendiculares entre sí, orientadas según los ejes de un sistema de referencia ortogonal (ver Fig. 1.6).

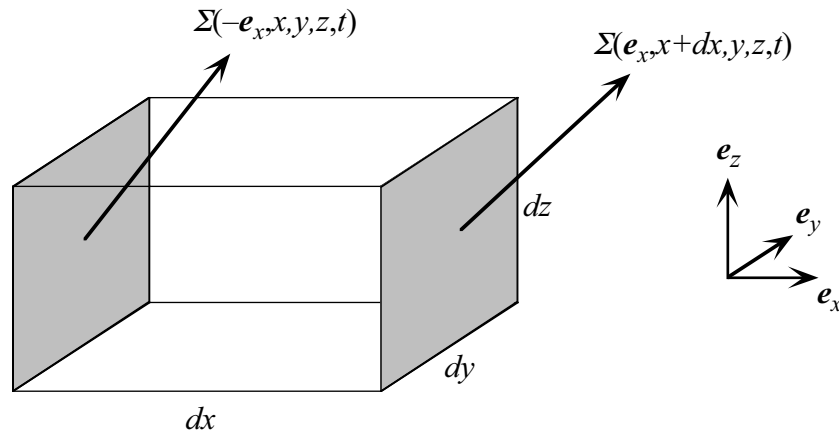


Fig. 1.6. La resultante de las fuerzas de superficie que actúan sobre un elemento de fluido depende de la variación espacial del tensor de los esfuerzos.

A partir del resultado ya obtenido para el caso del elemento limitado por caras paralelas, se obtiene fácilmente

$$d\mathbf{F} = dx dy dz \left( \frac{\partial}{\partial x} \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{e}_x) + \frac{\partial}{\partial y} \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{e}_y) + \frac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{e}_z) \right) \quad (1.19)$$

que usando la (1.15) se puede escribir en la forma

$$dF_i = dV \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.20)$$

La resultante es entonces proporcional al volumen, cualquiera sea la forma del paralelepípedo. Es tedioso, pero no difícil en principio, mostrar que el resultado (1.20) vale también para un elemento de volumen de forma general, y que también vale si efectuamos rotaciones arbitrarias del sistema de coordenadas.

Es instructivo volver a la analogía del párrafo precedente. Habíamos mostrado que la fuerza sobre un elemento plano de superficie es igual al flujo del tensor de los esfuerzos a través de ese elemento. Consistentemente con esto, la fuerza total ejercida sobre un cierto volumen es la integral del flujo extendida sobre la superficie que limita dicho volumen. Extendiendo ahora la analogía, el vector cuyas componentes son  $\partial \sigma_{ij} / \partial x_j$  se puede considerar como la *divergencia* del tensor  $\boldsymbol{\sigma}$ , sólo que la divergencia de un tensor de rango 2 es un vector, y no un escalar (como es la divergencia de un vector, o tensor de rango 1). De acuerdo con esto, podemos escribir la (1.20) en la forma compacta

$$d\mathbf{F} = dV \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1.21)$$

Para un volumen finito  $V$ , tendremos

$$\mathbf{F} = \int_V d\mathbf{F} = \int_V dV \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1.22)$$

Por otra parte, de la (1.18) obtenemos que

$$\mathbf{F} = \int_S dS \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (1.23)$$

donde  $S$  es la superficie que limita a  $V$ .

El resultado (1.22) se podría haber obtenido a partir del teorema de la divergencia para tensores de rango 2: la integral del flujo de un tensor de rango 2 sobre una superficie cerrada es igual a la divergencia del tensor integrada sobre el volumen limitado por dicha superficie. Sólo que ahora tanto el flujo como la divergencia de  $\boldsymbol{\sigma}$  son vectores (tensores de rango 1), y no escalares, como en el caso del teorema de la divergencia para vectores.

Vemos así cómo el tema cierra: la necesidad que las magnitudes mecánicas macroscópicas cumplan con la Hipótesis del Continuo conduce a que la resultante de las fuerzas de superficie sobre un elemento de volumen, debe ser proporcional al volumen encerrado, y no al área de la superficie que lo limita. Esta exigencia, sumada al carácter intrínseco de la relación que debe existir entre la fuerza ejercida a través de un elemento plano de superficie y la normal a ésta, implica que la entidad matemática adecuada para representar las fuerzas de superficie es el flujo de un tensor de rango 2: el tensor de los esfuerzos, algunas de cuyas propiedades pasaremos a investigar ahora.

### ***Simetría del tensor de los esfuerzos***

Consideremos un elemento de volumen  $V$  de sección cilíndrica con eje paralelo al eje  $z$  y centrado en el punto  $O$  (ver Fig. 1.7). Calcularemos la cupla  $\tau_z$  respecto del eje  $z$  de las fuerzas de superficie ejercidas por el fluido externo al elemento sobre el interno. Consideraremos positivo el sentido antihorario, y al elemento de volumen lo suficientemente pequeño como para poder considerar uniformes en él a todas las componentes del tensor de los esfuerzos.

Comencemos por calcular la fuerza ejercida por el fluido externo a través de un elemento de superficie  $dl dz$ . Será suficiente calcular las componentes  $x$  e  $y$  de dicha fuerza, puesto que la componente  $z$  no contribuye a la cupla que nos interesa. Tenemos que

$$dF_x = dz dl (\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y) \quad , \quad dF_y = dz dl (\sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y) \quad (1.24)$$

puesto que  $n_z = 0$ .

Naturalmente,  $d\mathbf{F}$  no tiene porqué ser paralelo a  $\mathbf{n}$  (que coincide con el versor radial  $\mathbf{e}_r$ ), cuyas componentes son, respectivamente  $n_x = \cos\theta$  y  $n_y = \sin\theta$ .

La cupla  $d\tau_z$  respecto del eje  $z$  debida a  $d\mathbf{F}$  es

$$d\tau_z = dr (\mathbf{e}_r \times d\mathbf{F})_z = dr (n_x dF_y - n_y dF_x) \quad (1.25)$$

Reemplazando (1.24) en (1.25) y usando  $dl = dr d\theta$  obtenemos

$$\begin{aligned}
d\tau_z &= dr^2 dz d\theta [n_x(\sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y) - n_y(\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y)] \\
&= dr^2 dz d\theta [\sigma_{yx} \cos^2 \theta + (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \theta \cos \theta - \sigma_{xy} \sin^2 \theta]
\end{aligned}
\tag{1.26}$$

expresión que debe ser integrada respecto de  $\theta$  entre 0 y  $2\pi$  para obtener la cupla  $\tau_z$ . Al integrar de esta forma, el término con el producto  $\sin \theta \cos \theta$  es claramente nulo, y queda, entonces

$$\tau_z = \pi dr^2 dz (\sigma_{yx} - \sigma_{xy}) = dV (\sigma_{yx} - \sigma_{xy}) \tag{1.27}$$

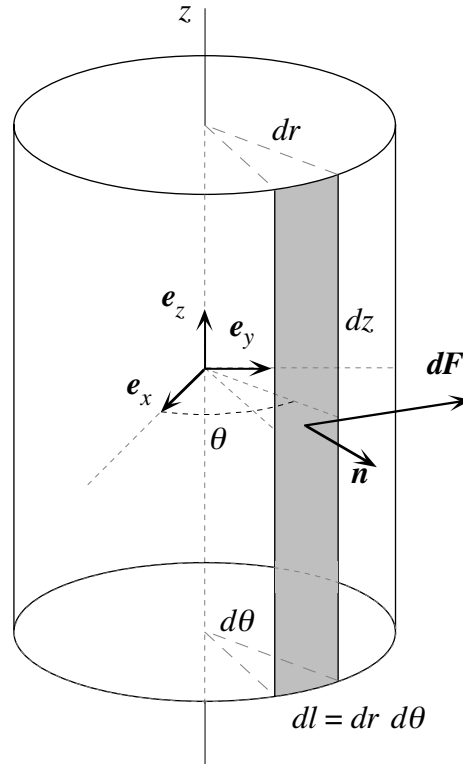


Fig. 1.7. Las fuerzas de superficie producen una cupla que tiende a producir una rotación de un elemento cilíndrico alrededor de su eje. Pero la aceleración angular que resulta depende del radio del cilindro, lo cual contradice la Hipótesis del Continuo. Por lo tanto, en el límite en que el radio tiende a cero, la cupla debe ser nula. Esto lleva a concluir que el tensor de los esfuerzos es simétrico.

Por otra parte, el momento de inercia  $I$  del mismo elemento, supuesta uniforme su densidad  $\rho$ , y por lo tanto su masa dada por  $dM = \rho dV$ , es

$$I = \frac{1}{2} dM dr^2 = \frac{1}{2} \rho dV dr^2 \tag{1.28}$$

De (1.27) y (1.28) resulta que la aceleración angular ( $d\omega/dt = \tau_z/I$ ) escala como  $1/dr^2$ . Por lo tanto depende de  $dr$ , en contradicción con la Hipótesis del Continuo. En consecuencia, se debe cumplir

$$\sigma_{yx} = \sigma_{xy} \tag{1.29}$$

Del mismo modo, considerando cilindros cuyos ejes son paralelos a los ejes  $x$  e  $y$ , se encuentra que  $\sigma_{zy} = \sigma_{yz}$  y  $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ . Por lo tanto, en general, las componentes del tensor de los esfuerzos deben cumplir las relaciones

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1.30)$$

Un tensor de rango 2 que cumple la (1.30) se denomina *simétrico*. Lo que acabamos de demostrar es que  $\boldsymbol{\sigma}$  es necesariamente simétrico, lo cual reduce el número de componentes independientes de nueve a seis (al asignar seis, las tres restantes quedan determinadas por las relaciones (1.30)).

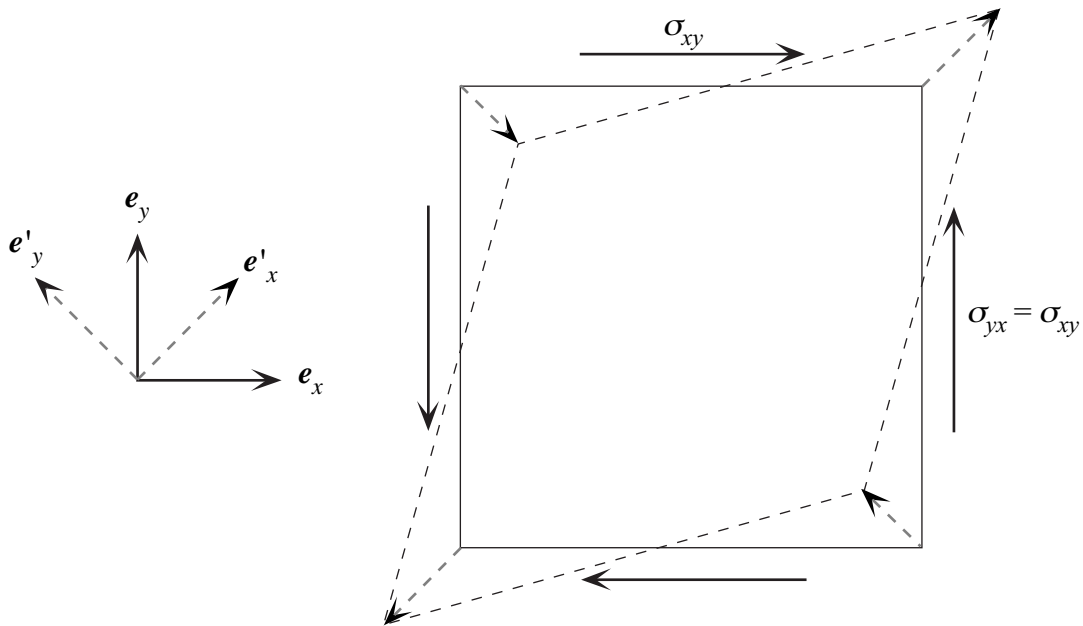


Fig. 1.8. La simetría del tensor de los esfuerzos implica que las fuerzas tangenciales sobre un elemento de sección cuadrada se balancean de modo que tienden a producir una contracción en una dirección y una extensión en la dirección perpendicular a la primera. Esto sugiere que con una adecuada elección de los ejes (*ejes principales*) debe ser posible reducir a forma diagonal la matriz formada por las componentes del tensor de los esfuerzos.

Físicamente, la condición (1.30) implica que las fuerzas tangenciales sobre un elemento de sección cuadrada se deben balancear al primer orden como se indica en esquemáticamente en la Fig. 1.8. Tal combinación de fuerzas tiende a producir la contracción del elemento en una dirección y la expansión en la dirección perpendicular. Nótese que las fuerzas que intervienen en este tipo de *deformación* son del mismo orden de las fuerzas de superficie, y no proporcionales a su variación entre dos superficies paralelas cercanas, como son las que producen el *movimiento* del elemento (resultante dada por  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ ). La figura muestra intuitivamente cómo, limitándonos al plano, será siempre posible elegir un sistema de coordenadas tal que, en el punto P, la fuerza de superficie a través de una superficie perpendicular a  $e'_x$  tenga la dirección  $e'_x$ , etc.; es decir, un sistema en el que las componentes tangenciales de los esfuerzos son nulas en las superficies perpendiculares a los ejes. Esta es una propiedad general de los tensores simétricos de rango 2: tales tensores se pueden siempre reducir a forma diagonal en el entorno de un punto.

### ***Descomposición del tensor de los esfuerzos***

Debido a la simetría del tensor de los esfuerzos se puede siempre determinar, en *cada punto* de un fluido, un sistema de ejes cartesianos  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ , denominados *ejes principales*, tal que en ese sistema  $\boldsymbol{\sigma}$  es diagonal, es decir

$$\sigma_{ij} \neq 0 \quad \text{solo si } j = i \quad (1.31)$$

Naturalmente, en general el sistema de ejes principales es diferente de punto a punto<sup>10</sup>.

En el sistema de ejes principales, las tres componentes del esfuerzo sobre un elemento de superficie de normal  $\mathbf{n} \equiv (n_x, n_y, n_z)$  son  $(\sigma_{xx}n_x, \sigma_{yy}n_y, \sigma_{zz}n_z)$ . El esfuerzo es paralelo a  $\mathbf{n}$  solamente en el caso especial  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$ , es decir cuando las componentes de  $\boldsymbol{\sigma}$  tienen la forma

$$\sigma_{ij} = A\delta_{ij} \quad (1.32)$$

donde  $\delta_{ij}$  (delta de Kronecker) son las componentes cartesianas del tensor isótropo unitario de segundo rango  $\mathbf{I}$ .

Es importante destacar que si  $\boldsymbol{\sigma}$  tiene la particular expresión (1.32) en un cierto punto P para un dado sistema de ejes cartesianos C, entonces la tendrá para cualquier otro sistema C'. Dejando de lado la demostración formal, que se puede dar empleando las fórmulas de transformación para las componentes de tensores de segundo orden, se puede comprender de inmediato que debe ser así. En efecto, si  $\sigma_{ij} = A\delta_{ij}$  en C, está claro que el esfuerzo es puramente normal a través de cualquier superficie, independientemente de su orientación, lo cual ya de por sí asegura que  $\boldsymbol{\sigma}$  es también diagonal en todo otro sistema C'. Pero, además, el módulo del esfuerzo debe tener el mismo valor A cualquiera sea la orientación de la superficie, ya que

$$|\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{n})|^2 = (\sigma_{xx}n_x)^2 + (\sigma_{yy}n_y)^2 + (\sigma_{zz}n_z)^2 = A^2(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = A^2 \quad (1.33)$$

Por otra parte, las componentes de  $\boldsymbol{\Sigma}$  en C' no son otra cosa que los módulos de los esfuerzos (necesariamente normales) a través de superficies perpendiculares a los ejes de C', y por lo tanto ellos también deben valer A. En consecuencia de lo dicho, la (1.32) implica que

$$\boldsymbol{\sigma} = A\mathbf{I} \quad (1.34)$$

y por lo tanto, que el tensor de los esfuerzos es *isótropo*.

Una magnitud muy importante en la descripción del estado de un fluido es el *valor medio* del esfuerzo normal en cada punto. El promedio se entiende sobre todas las posibles orientaciones (o direcciones de la normal) de un elemento de superficie (plano) apoyado en ese punto. Es bastante fácil comprender que este promedio se puede también calcular como el promedio del módulo del esfuerzo normal sobre la superficie de una esfera de radio que tiende a cero, centrada en P. Conviene destacar desde ahora que, si bien este promedio tiene *dimensiones* de esfuerzo, es decir fuerza/superficie, *no es* una fuerza por unidad de superficie, sino evidentemente, una magnitud *escalar*, y como tal no se le puede atribuir dirección<sup>11</sup>.

<sup>10</sup> Por supuesto, a través de un elemento de superficie de orientación arbitraria seguirán existiendo esfuerzos tangenciales.

<sup>11</sup> Justamente, se la define a través de un promedio sobre todas las direcciones.

En el caso especial en que  $\boldsymbol{\sigma}$  es isótropo, es decir tiene la forma (1.34), el valor medio en cuestión es obviamente  $A$ , puesto que éste es el valor del módulo del esfuerzo normal cualquiera sea la orientación de un elemento de superficie. Por otra parte,  $A = T/3$ , donde

$$T = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (1.35)$$

es la *traza* (escalar invariante dado por la suma de los elementos diagonales) del tensor  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Es posible demostrar que incluso cuando  $\boldsymbol{\sigma}$  no es isótropo,  $T/3$  representa el valor medio de la intensidad del esfuerzo normal. La demostración rigurosa es engorrosa (pues involucra una integral sobre el ángulo sólido), pero podemos dar un argumento convincente mucho más sencillo. Sea un elemento de volumen cúbico de lado infinitesimal  $\delta b$ , centrado alrededor del punto P, cuyas caras son perpendiculares a los ejes de un sistema arbitrario C (cuyos ejes no necesariamente coinciden con los ejes principales de  $\boldsymbol{\sigma}$ ). Como las componentes de  $\boldsymbol{\sigma}$  se pueden considerar constantes en el volumen del cubo, los esfuerzos normales sobre las dos caras perpendiculares al eje  $x$  tienen el mismo módulo constante dado por  $\sigma_{xx}$ . Análogamente, los esfuerzos normales a través de las caras perpendiculares a los ejes  $y, z$ , tienen módulos constantes dados por  $\sigma_{yy}$  y  $\sigma_{zz}$ , respectivamente. Entonces el valor medio del módulo del esfuerzo normal sobre la superficie de este particular cubo es<sup>12</sup>:

$$\frac{2\sigma_{xx}\delta b^2 + 2\sigma_{yy}\delta b^2 + 2\sigma_{zz}\delta b^2}{6\delta b^2} = \frac{1}{3}T \quad (1.36)$$

Supongamos ahora rotar nuestro elemento, de modo que sus caras dejen de ser perpendiculares a los ejes de C; el cálculo del valor medio de la intensidad del esfuerzo normal sobre la superficie del cubo rotado aparenta ser engorroso, pues a primera vista intervienen las componentes no diagonales de  $\boldsymbol{\sigma}$  y los ángulos entre las normales a las caras y los ejes. Sin embargo se llega de inmediato al resultado gracias al siguiente razonamiento: consideremos el sistema  $C'$  cuyos ejes son ortogonales a las caras del cubo en su nueva posición; en este sistema el valor medio del esfuerzo normal sobre la superficie es, obviamente,  $T'/3 = T/3$ , puesto que la traza de un tensor es un escalar y por lo tanto es invariante ante rotaciones. En consecuencia, cualquiera sea la orientación del elemento cúbico en el espacio, el valor medio del esfuerzo normal sobre su superficie total es  $T/3$ . Entonces, al promediar sobre todas estas orientaciones, obtenemos el valor  $T/3$  que se tiene para cada una de ellas, y por la simetría del cubo, este es también el resultado que obtenemos si promediamos sobre todas las orientaciones de cada cara por separado.

Estos resultados sugieren una descomposición invariante de  $\boldsymbol{\sigma}$ , como la suma de un tensor isótropo  $\boldsymbol{\sigma}_I$  y un tensor simétrico de traza nula  $\boldsymbol{\sigma}'$ , es decir

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_I + \boldsymbol{\sigma}' \quad (1.37)$$

con

$$\boldsymbol{\sigma}_I = \frac{1}{3}\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} \quad (1.38)$$

---

<sup>12</sup> No se llega al mismo resultado si el elemento de volumen es un paralelepípedo no cúbico, pues al calcular el promedio no queda asignado el mismo peso a las tres orientaciones ortogonales que intervienen (las que corresponden a las caras más grandes pesan más en el promedio).



Para interpretar más cómodamente la (1.37) podemos escribir sus componentes en el sistema de ejes principales:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T/3 & 0 & 0 \\ 0 & T/3 & 0 \\ 0 & 0 & T/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - T/3 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} - T/3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} - T/3 \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

Supongamos que exista solamente la parte isótropa  $\boldsymbol{\sigma}_I$ . Entonces la intensidad del esfuerzo normal sobre la superficie de una esfera cuyo radio tiende a cero, es uniforme; es decir, por efecto del fluido que la rodea, nuestra esfera tiende a ser comprimida (si  $T > 0$ ) o expandida (si  $T < 0$ ) sin cambio de forma.

Supongamos, en cambio, que existe sólo la parte anisótropa. Puesto que la traza de  $\boldsymbol{\sigma}'$  es nula, el fluido que rodea la esfera actúa sobre algunos sectores tendiendo a comprimirla y sobre otros a expandirla, de forma tal que en promedio la componente normal del esfuerzo es nula. Es decir, la esfera tiende a deformarse sin cambio de volumen (por esto  $\boldsymbol{\sigma}'$  se denomina *desviador*).

En resumen:

El efecto de las fuerzas de superficie sobre un elemento del fluido es, al primer orden, el de comprimirlo (o expandirlo) y deformarlo. La intensidad del primer efecto está dada por la tercera parte de la traza de  $\boldsymbol{\sigma}$ , y la del segundo por la magnitud de las componentes de la parte anisótropa  $\boldsymbol{\sigma}'$ , resultante de restar de  $\boldsymbol{\sigma}$  el tensor de componentes  $(T/3)\delta_{ij}$ . En órdenes más altos, en forma proporcional a las derivadas espaciales de las componentes de  $\boldsymbol{\sigma}$ , las fuerzas superficiales dan lugar a una fuerza neta resultante capaz de desplazar el elemento en cuestión; esta fuerza es proporcional al volumen del elemento, y por lo tanto del mismo orden que las eventuales fuerzas de volumen que pudieran existir.

### ***Presión en un fluido en reposo***

Es un hecho experimental que un fluido confinado por un recipiente de paredes rígidas, tiende al reposo, es decir a una situación donde no hay movimiento de elementos de fluido relativo a otros elementos o a las paredes, y donde tampoco ocurren deformaciones o expansiones o compresiones de dichos elementos

Esto *no implica*, sin embargo, que  $\boldsymbol{\sigma}$  es idénticamente nulo en un fluido en reposo: muchas observaciones indican lo contrario. En efecto, es una experiencia común que si evacuamos una celda situada en la atmósfera en reposo, sus paredes sufren compresiones (claramente visibles si las paredes son elásticas), que incluso pueden llegar a romperlas. Análogamente, la inmersión de un objeto hueco en el agua conduce a compresión de sus paredes y a una tendencia a flotar, que no se pueden atribuir sino al efecto de las fuerzas superficiales ejercidas sobre el objeto por el fluido que lo rodea. También, extendiendo un poco el razonamiento, resulta claro que sobre toda parcela fluida de volumen  $\delta V$  en el seno de un fluido en reposo, debe necesariamente actuar una resultante neta no nula de las fuerzas de superficie ( $= \delta V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ ) que compensa a la fuerza (de volumen) peso ( $= \delta V \rho g$ ).

Estos argumentos, y muchos otros que podríamos agregar y refinar, muestran que sobre cada elemento de volumen en el seno de un fluido en reposo actúan fuerzas de superficie originadas por el fluido que lo rodea, de modo que el valor medio de la componente normal del esfuerzo sobre un elemento de volumen esférico es diferente de cero. Además, estas fuerzas tienen segu-

ramente un carácter puramente compresivo (o expansivo<sup>13</sup>). Puesto que el elemento no cambia de volumen, debe existir algo que se opone a dichos esfuerzos y que está ligado a las propiedades termofísicas del medio (densidad, temperatura, estructura en el caso de los líquidos); se le da el nombre de *presión* y resulta adecuado atribuirle la magnitud<sup>14</sup> del valor medio del esfuerzo normal ejercido por el fluido contenido en el volumen sobre el fluido que lo rodea, esto es:

$$p = -T/3 \quad (1.40)$$

donde  $T$  es la traza de  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Puesto que los elementos de volumen de un fluido en reposo no se deforman, se podría pensar, por analogía, que también debe existir algo que se opone a la deformación. Sin embargo, numerosas experiencias muestran que a diferencia de los sólidos, los fluidos no poseen rigidez (sino sólo resistencia a la *rapidez* de la deformación, como ya dijimos al comienzo). Por lo tanto en los fluidos en reposo la parte anisótropa del tensor de los esfuerzos, que tiende a producir deformaciones, debe ser nula.

En conclusión, en los fluidos en reposo  $\boldsymbol{\sigma}' = 0$  y el tensor de los esfuerzos se reduce a la parte isótropa

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} = -p \mathbf{I} \quad (1.41)$$

cuyas componentes son:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3} T \delta_{ij} = -p \delta_{ij} \quad (1.42)$$

Las dimensiones de la presión son fuerza/superficie, pero al igual que el esfuerzo normal medio, la presión es una magnitud escalar y no se le debe atribuir dirección.

En términos de la presión, la fuerza neta sobre un elemento de volumen, dada por

$$d\mathbf{F} = dV \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1.43)$$

se expresa como

$$dF_i = -dV \frac{\partial(p\delta_{ij})}{\partial x_j} = -dV \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (1.44)$$

es decir

$$d\mathbf{F} = -dV \nabla p \quad (1.45)$$

La (1.45) muestra que la fuerza surge de las *variaciones espaciales* de  $p$ , que determinan tanto su módulo como su dirección.

Del punto de vista físico, es más adecuado considerar a la presión como una magnitud propia del fluido, que caracteriza su estado en cada punto y que está ligada a su densidad, temperatura y

---

<sup>13</sup> A diferencia de los gases, en los cuales estas fuerzas son siempre compresivas, los líquidos pueden estar sometidos a fuerzas expansivas (que corresponden a presión *negativa*).

<sup>14</sup> Debe recordarse que nos estamos refiriendo a fluidos en reposo.

otros parámetros. Nótese que las dimensiones de  $p$  son también las de energía/volumen, es decir se la puede considerar como una *densidad de energía*. Esta manera de considerar a la presión es muy adecuada en el caso importante de los gases perfectos donde como es notorio, la teoría cinética establece una simple proporcionalidad entre  $p$  y la energía interna por unidad de volumen, dada en este caso por la energía cinética media de las moléculas<sup>15</sup>.

Hemos visto que el tensor de los esfuerzos en un fluido en reposo es isótropo. Esta es una propiedad que se puede atribuir al carácter isótropo, o *amorfo*, de los fluidos. En un medio amorfo, donde no existen estructuras estables ni ninguna otra característica que establezca direcciones privilegiadas, el tensor de los esfuerzos no puede ser sino isótropo, a diferencia de lo que ocurre en sólidos con estructura cristalina.

Cabe preguntarse de dónde proviene la parte anisótropa de  $\sigma$  en los fluidos. La respuesta es: del campo de velocidades. El tensor de los esfuerzos en un punto de un fluido depende no sólo del estado termofísico local, sino también del campo de velocidades en el entorno de ese punto (más precisamente, de las derivadas espaciales de este campo). Obviamente, el campo de velocidades introduce direcciones privilegiadas, y por eso la parte anisótropa de  $\sigma$  puede tomar valores no nulos. En los fluidos en reposo no hay campo de velocidades, luego el término anisótropo es nulo.

---

<sup>15</sup> Para ser exactos la energía interna de un gas coincide con la energía cinética de traslación de las moléculas únicamente para un gas perfecto de moléculas puntiformes, esto es, que no poseen grados de libertad internos. En otros casos la relación es más compleja, pues sólo una parte del contenido de energía por unidad de volumen de un fluido se puede identificar con la presión.