

11. ONDAS DE AMPLITUD FINITA

Antes de encarar el estudio de los efectos no lineales que ocurren cuando las ondas en un fluido tienen una amplitud que no es infinitesimal, conviene presentar algunas consideraciones que ayudarán al lector a encuadrar adecuadamente el tema dentro de un panorama general y ordenar las ideas que se han introducido en los Capítulos anteriores al tratar algunos ejemplos de ondas lineales.

No existe, en realidad, una definición única del concepto de *onda*. Se pueden dar varias definiciones restrictivas, pero para abarcar todo el rango de los fenómenos ondulatorios es mejor guiarse por la noción intuitiva que una onda es cualquier *señal reconocible* que se transfiere de un lugar a otro del medio, de forma que se pueda identificar una *velocidad de propagación*. La señal puede ser cualquier característica de la perturbación, por ejemplo el máximo, o una variación abrupta de cierta magnitud, con tal que dicha característica se pueda reconocer claramente y que su posición se pueda determinar en distintos momentos. La señal se puede distorsionar y su magnitud y su velocidad de propagación pueden cambiar, siempre y cuando siga siendo reconocible. Esta noción puede parecer algo ambigua, pero es perfectamente adecuada y todo intento de ser más precisos es demasiado restrictivo, pues en diferentes clases de ondas las características más importantes son distintas.

Conviene distinguir dos clases principales de ondas. La primera se formula matemáticamente en términos de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas, y por ese motivo estas ondas se denominan *hiperbólicas*. La segunda clase es más difícil de caracterizar, pero puesto que en problemas lineales comprende los casos más simples de ondas dispersivas, vamos a llamar ondas *dispersivas* las que pertenecen a este conjunto.

Ondas hiperbólicas

Como prototipo de esta clase se suele citar la ecuación lineal de ondas¹, que en una dimensión se escribe en la forma

$$\varphi_{tt} - c_0^2 \varphi_{xx} = 0 \quad (11.1)$$

En realidad la ecuación de primer orden

$$\varphi_t + c_0 \varphi_x = 0 \quad (11.2)$$

es más sencilla todavía. Recordemos, de paso, que en el capítulo anterior vimos que la (11.1) se puede factorizar como

$$(\partial_t + c_0 \partial_x)(\partial_t - c_0 \partial_x) \varphi \equiv \partial_{\xi_+} \partial_{\xi_-} \varphi = 0 \quad (11.3)$$

con $\xi_+ = x - c_0 t$, $\xi_- = x + c_0 t$, de modo que la solución general de (11.1) es

$$\varphi = \varphi_+(\xi_+) + \varphi_-(\xi_-) = \varphi_+(x - c_0 t) + \varphi_-(x + c_0 t) \quad (11.4)$$

donde φ_+, φ_- son funciones arbitrarias, respectivamente soluciones de la (11.2) y de

¹ Con los subscriptos t y x indicamos las derivadas parciales respecto del tiempo y de la coordenada x .

$$\varphi_t - c_0 \varphi_x = 0 \quad (11.5)$$

Por lo tanto las propiedades de las soluciones de la (11.1) son equivalentes a las de las soluciones del sistema (11.2), (11.5).

Este tipo de ecuaciones aparece en Acústica, como vimos en el Capítulo anterior, y también en Elasticidad y en Electromagnetismo y sus propiedades básicas así como sus soluciones se investigaron primero en esas áreas de la Física Clásica. Pero la ec. (11.1), o la (11.2), no nos cuentan *toda* la historia del fenómeno. En efecto, como vimos en el Capítulo anterior, incluso despreciando los efectos de la viscosidad y de la conducción del calor, las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido compresible son *no lineales*, y para llegar a la ecuación (11.1) tuvimos que linearizarlas, conservando sólo términos de primer orden en las perturbaciones.

Ondas hiperbólicas no lineales

Una vez resuelto el problema lineal con las adecuadas condiciones iniciales y de contorno (como hicimos en el Capítulo 10), es natural plantear algunas preguntas acerca de la relación entre esa solución y las ecuaciones no lineales originales. Por ejemplo: incluso para perturbaciones pequeñas, ¿cuán preciso es el resultado de la teoría lineal? ¿qué características cualitativas importantes se han perdido debido a la aproximación lineal?, y si las perturbaciones no son pequeñas y por lo tanto no es lícito linearizar las ecuaciones básicas, como ocurre en el caso de explosiones o de perturbaciones provocadas por aviones y misiles supersónicos, ¿qué se puede obtener directamente a partir de las ecuaciones no lineales? y en tal caso ¿cuáles son las modificaciones que provienen de la viscosidad y de la conducción térmica?

La búsqueda de respuestas a estos interrogantes en la dinámica de gases llevó a desarrollar la mayoría de las ideas fundamentales acerca de las *ondas hiperbólicas no lineales*. En este contexto, el fenómeno *nuevo* más relevante que surge de la teoría no lineal es la *onda de choque*. Una onda de choque en un gas consiste de una *variación brusca* de presión, densidad y velocidad, que tiene lugar sobre una escala de distancia que está determinada por procesos como la viscosidad, la conducción del calor y otros más, *que hemos ignorado* al escribir las ecuaciones que describen el grueso del flujo. Como ejemplos de ondas de choque en gases podemos citar la onda expansiva producida por una *explosión* y el *estampido sónico* que se escucha cuando pasa un avión supersónico.

La teoría matemática de las ecuaciones hiperbólicas no lineales que vamos a introducir aquí permite predecir estos fenómenos, pero su comprensión completa y detallada requiere analizar los efectos de la viscosidad, la conducción térmica y ciertos aspectos de la Teoría Cinética (algunos de los cuales aún hoy son materia de investigación) cuyo estudio excede el ámbito de estas notas.

Aunque las ideas básicas acerca de la propagación no lineal de ondas se desarrollaron en el contexto de la dinámica de gases, esas mismas nociones se aplican a *cualquier* sistema gobernado por ecuaciones hiperbólicas no lineales. Además, si bien el problema clásico de la dinámica de gases (en su forma linearizada) lleva a la ecuación de segundo orden (11.1), hay otros ejemplos de ondas que conducen directamente a la ecuación de *primer orden* más simple (11.2). Entre ellos se cuentan las *ondas de creciente* en ríos y canales, las *ondas en glaciares*, las *ondas en el flujo de tráfico* en una carretera y ciertos fenómenos de propagación ondulatoria en reacciones químicas. Al igual que en el problema clásico, la formulación *completa* del problema lleva en estos casos a ecuaciones *no lineales*, cuya versión más sencilla es

$$\varphi_t + c(\varphi)\varphi_x = 0 \quad (11.6)$$

en la cual la velocidad de propagación $c(\varphi)$ depende del valor local de la perturbación φ . El estudio de esta ecuación, cuyo aspecto simple esconde una gran riqueza de fenómenos, nos permitirá introducir los conceptos fundamentales de las ondas hiperbólicas no lineales. Preferimos comenzar con problemas del tipo (11.6) antes que seguir el desarrollo histórico de esos conceptos, porque son más sencillos del punto de vista matemático que la dinámica de gases y entonces las ideas fundamentales surgen con más claridad. Además estos problemas son interesantes por sí mismos y por sus aplicaciones. Como veremos, la principal característica no lineal es la *ruptura de las ondas* y la formación de *ondas de choque*. La teoría matemática se basa en el *método de las características*, y en el *tratamiento especial* que hay que dar a las ondas de choque.

Ondas dispersivas

La noción de *onda dispersiva* (como las olas sobre la superficie en el agua, o las ondas internas en fluidos estratificados) no se basa en el carácter de la ecuación, sino en la naturaleza de la *solución*. Un *sistema dispersivo lineal* es un sistema cualquiera que admite soluciones elementales de la forma

$$\varphi = a \cos(kx - \omega t) \quad (11.7)$$

donde la frecuencia

$$\omega = \Omega(k) \quad (11.8)$$

es una función real $\Omega(k)$ del número de onda k , cuya forma está determinada por las propiedades del sistema. La velocidad de fase es $u_f = \Omega(k)/k$, y se dice que las ondas son dispersivas cuando u_f no es constante sino que depende de k . Conviene cambiar ligeramente esta definición y decir que la onda (11.6) es dispersiva si $\Omega'(k)$ no es constante²: esto es, si $\Omega''(k) \neq 0$.

Se puede observar que la (11.7) es una solución de la ecuación hiperbólica (11.2) con $\omega = c_0 k$ (o de la (11.1) con $\omega = \pm c_0 k$), pero este caso se excluye de entre las ondas dispersivas pues no cumple la condición $\Omega''(k) \neq 0$. Existen, sin embargo, casos genuinos de ecuaciones hiperbólicas que tienen soluciones de la forma (11.7) con relaciones de dispersión $\omega = \Omega(k)$ no triviales, esto es, que dan lugar a ondas hiperbólicas y dispersivas al mismo tiempo. Pero ese comportamiento dual está limitado a pocos casos, y no debemos permitir que oscurezca las diferencias generales entre ambas clases de ondas. En efecto, es frecuente el mal entendido según el cual onda es sinónimo de ecuaciones hiperbólicas, y que por lo tanto la (11.7) no es más que un modo poco sofisticado de tratar la misma cosa. Más bien es cierto lo contrario, puesto que aunque la clase de las ondas hiperbólicas es rica y variada, la mayoría de los fenómenos ondulatorios pertenece a la clase dispersiva no hiperbólica. El ejemplo más familiar de ondas, el de las olas en el océano, es un caso dispersivo, gobernado por la ecuación de Laplace, con una curiosa condición de contorno en la superficie libre.

² Con primas, dobles primas, ... etc. indicamos la derivada primera, segunda, ... etc. de una función con respecto de su argumento.

Es importante tener presente que lo que caracteriza un problema de ondas dispersivas es la relación de dispersión (11.8). Cómo se origina esta relación a partir del particular sistema de ecuaciones que gobierna el problema es de importancia secundaria en el presente contexto.

En los problemas lineales del Capítulo 9 obtuvimos soluciones más generales que la (11.7) por medio de superposiciones como las integrales de Fourier. En esa oportunidad vimos que el concepto fundamental que surge de analizar el comportamiento de estos paquetes o grupos de ondas es el de la *velocidad de grupo*

$$C(k) = \frac{d\Omega}{dk} \quad (11.9)$$

Es la velocidad de grupo (y no la velocidad de fase) la que juega el rol dominante en la propagación de las ondas dispersivas.

Vista su gran importancia, y con miras al estudio de medios no uniformes y de las ondas no lineales, conviene dar una definición de la velocidad de grupo que no dependa del análisis de Fourier (que está restringido a la propagación lineal en un medio uniforme). Esto se puede hacer intuitivamente³. Supongamos, en efecto, que una onda no uniforme está descripta aproximadamente por

$$\varphi = a(x,t) \cos[\theta(x,t)] \quad (11.10)$$

En un tren de ondas uniforme se tiene

$$a = \text{cte.}, \quad \theta = kx - \omega t, \quad \omega = \Omega(k) \quad (11.11)$$

Por analogía, en el caso más general (11.10) definiremos un número de onda *local* $k(x,t)$ y una frecuencia *local* $\omega(x,t)$ por medio de

$$k(x,t) = \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \omega(x,t) = -\frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (11.12)$$

Supongamos ahora que $k(x,t)$ y $\omega(x,t)$ están relacionados por la relación de dispersión (11.8). Claramente, θ satisface entonces la ecuación

$$k \frac{\partial \theta}{\partial t} + \Omega\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = 0 \quad (11.13)$$

cuya solución determina las propiedades cinemáticas del tren de ondas. Por lo tanto, las (11.12) junto con la relación de dispersión determinan el problema.

Conviene eliminar θ entre las (11.12), para obtener

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (11.14)$$

Usando entonces la relación de dispersión (11.8) en la (11.14) obtenemos

³ el lector puede encontrar la justificación rigurosa en el texto de Whitham.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{d\Omega}{dk} \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial t} + C(k) \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \quad (11.15)$$

Se puede observar que la (11.15) es precisamente la más simple ecuación hiperbólica no lineal (11.6). Por lo tanto la (11.15) se puede interpretar como una ecuación de ondas para la propagación de k con la velocidad $C(k)$. De esta manera sutil los fenómenos de la propagación hiperbólica se esconden en las ondas dispersivas, hecho que se puede aprovechar para aplicar los métodos que desarrollamos para las ondas hiperbólicas a los problemas de las ondas dispersivas.

Ondas dispersivas no lineales

El concepto de velocidad de grupo es la herramienta fundamental para deducir las principales características de las ondas dispersivas lineales, como vimos en el Capítulo 9 por medio de varios ejemplos. Sin embargo, para atacar problemas no lineales es necesario un enfoque más poderoso, que consiste en el uso de principios variacionales. Los principios variacionales constituyen la herramienta correcta para atacar los problemas de ondas dispersivas, tanto lineales como no lineales. Nosotros no vamos a tratar este tema, y remitimos al lector interesado al excelente texto de Whitham. Nos limitaremos aquí a esbozar las ideas fundamentales acerca de las ondas dispersivas no lineales que se originaron en el estudio de las olas en el agua.

El primer resultado importante, obtenido por Stokes en 1847 para las ondas de gravedad en aguas profundas, se basa en escribir el desplazamiento vertical ξ de una onda de amplitud finita como una serie de potencias de la amplitud a de la forma

$$\xi = f(\theta) = a(\cos \theta + \frac{1}{2}ka \cos 2\theta + \frac{3}{8}k^2a^2 \cos 3\theta + \dots) \quad , \quad \theta = kx - \omega t \quad (11.16)$$

donde

$$\omega^2 = gk(1 + k^2a^2 + \dots) \quad (11.17)$$

El resultado que obtuvimos en el Capítulo 9 para el caso lineal no es más que el primer término de la serie (11.16), y la relación de dispersión correspondiente es nuestra antigua conocida

$$\omega^2 = gk \quad (11.18)$$

que se obtiene de la (11.17) en el límite $a \rightarrow 0$.

Las (11.16) y (11.17) ponen de manifiesto dos resultados básicos. Primero, que existen soluciones que consisten de trenes de onda *periódicos*, en las cuales las variables dependientes son funciones de una fase $\theta = kx - \omega t$, pero ahora *las ondas ya no son sinusoidales*: en efecto la (11.16) es la serie de Fourier que representa la función $f(\theta)$. Segundo, que ahora *en la relación de dispersión interviene la amplitud*. Esta es una característica cualitativa *nueva*, que muestra que los efectos no lineales no se limitan a ser pequeñas correcciones.

Tiempo después, en 1895, Korteweg y de Vries encontraron que las ondas de gran longitud de onda en aguas cuya profundidad h_0 no es muy grande se pueden describir con buena aproximación (como mostraremos más adelante) por medio de la ecuación no lineal

$$\xi_t + c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\xi}{h_0} \right) \xi_x + \frac{1}{6} c_0 h_0^2 \xi_{xxx} = 0 \quad , \quad c_0 = \sqrt{gh_0} \quad (11.19)$$

Si la amplitud es infinitesimal podemos linearizar esta ecuación despreciando el término $(3/2)c_0\xi\xi_x$. La ecuación que resulta tiene soluciones del tipo

$$\xi = a \cos(kx - \omega t) \quad \text{con} \quad \omega = c_0 k (1 - h_0^2 k^2 / 6) \quad (11.20)$$

que son simplemente las ondas de gravedad puras que estudiamos en el Capítulo 9, cuando se toma en cuenta la primera corrección por efecto de la profundidad finita.

Cuando la amplitud es *finita*, la (11.19) tiene soluciones periódicas de la forma

$$\xi = f(\theta) \quad \text{con} \quad \theta = kx - \omega t \quad (11.21)$$

que se denominan *ondas cnoidales* porque se expresan en términos de la *función elíptica Jacobiana* $\text{cn}(u)$ ($u \propto \theta$). Este resultado refuerza las conclusiones generales de Stokes ya citadas, pues demuestra explícitamente la existencia de trenes de onda periódicos; además $f(\theta)$ contiene una amplitud arbitraria a y la solución implica una relación de dispersión de la forma $\omega = \Omega(k, a)$ en la cual interviene la amplitud de la onda. De esta forma se encuentra nuevamente que el efecto no lineal más llamativo es que la relación de dispersión involucra la amplitud.

Pero hay otro resultado importante que se obtiene de la (11.18). En el límite en que la longitud de onda de la perturbación (es decir, el período espacial de f) se hace infinita, se encuentra la solución especial

$$\xi = a \text{sech}^2[(3a/4h_0^3)^{1/2}(x - ct)] \quad , \quad c = c_0(1 + a/2h_0) \quad (11.22)$$

que describe una onda que consiste de una *única cresta*, que se propaga *sin cambio de forma* con una velocidad que depende de la *amplitud*. La segunda de las (11.22), que expresa c en términos de la amplitud, es lo que queda de la relación de dispersión en el límite no periódico.

Esta solución es la *onda solitaria*, que fue descubierta casualmente por Scott Russell en 1844 mientras observaba una embarcación que se desplazaba velozmente en un estrecho canal; de repente la embarcación se detuvo y Scott Russell notó que a partir de la agitación de las aguas causada por la detención, se produjo “una gran elevación solitaria, un suave, redondeado y bien definido amontonamiento de agua que continuó su curso por el canal, aparentemente sin cambio de forma ni disminución de velocidad” por una considerable distancia⁴.

Las ondas solitarias tienen varias propiedades sorprendentes. Entre ellas se cuenta que estas ondas conservan su individualidad cuando interactúan, y eventualmente emergen de la región de interacción con su forma y velocidad original (de un modo análogo a como se muestra en la Fig. 10.3 para las ondas de amplitud infinitesimal)

La ecuación de Korteweg-de Vries es el prototipo más sencillo que combina la no linealidad con la dispersión. La onda solitaria es un fenómeno estrictamente *dispersivo y no lineal*, en el cual la tendencia de la onda a empinarse y romper debido al término no lineal de la (11.19) se compensa con el efecto de la dispersión, para producir como efecto la propagación sin cambio de forma.

Las soluciones del tipo de Stokes (11.16) y del tipo (11.21) y (11.22) son la contrapartida no lineal de las soluciones lineales elementales del tipo (11.7), pero ahora ya no se puede proceder por síntesis de Fourier como en el caso lineal. Cabe observar, sin embargo, que muchos resultados importantes de la teoría lineal para trenes de onda no uniformes del tipo (11.10) se pueden

⁴ Intrigado por el curioso fenómeno, Scott Russell montó a caballo y siguió a la onda solitaria por más de una milla.

expresar en términos de la velocidad de grupo. Puesto que esos resultados no dependen de manera esencial del análisis de Fourier, se puede desarrollar una teoría de las *velocidades de grupo no lineales*. Nosotros no entraremos en estos temas, pero cabe mencionar que el hecho que la relación de dispersión depende de la amplitud de la onda introduce ciertos fenómenos nuevos, entre los cuales se cuenta que hay *más de una* velocidad de grupo. Esto se relaciona con el hecho que un tren de onda no uniforme acaba eventualmente por *fragmentarse* al cabo de cierto tiempo, un resultado éste muy novedoso, e inesperado a partir de la teoría lineal. El lector interesado puede consultar el texto de Whitham, donde estos temas se tratan con cierto detalle.

La onda de creciente como ejemplo de onda hiperbólica no lineal

Vamos a iniciar nuestro estudio de las ondas hiperbólicas no lineales a partir de la ecuación de primer orden (11.6). Para ver como se llega a esa ecuación vamos a considerar un problema concreto: las ondas de creciente en un río o un canal.

La ecuación de conservación y las ondas cinemáticas

Sea x la coordenada a lo largo del curso de agua, orientada en el sentido de la corriente (Fig. 11.1), y sea $s(x,t)$ la sección transversal⁵ del mismo en el instante t . Si indicamos con $q(x,t)$ el caudal volumétrico que fluye a través de s , la conservación de la masa requiere que

$$\frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_1} s(x,t) dx = q(x_2,t) - q(x_1,t) \quad (11.23)$$

que se expresa en forma diferencial como

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (11.24)$$

Ahora bien, la experiencia indica que *existe una relación* entre la sección s y el caudal q que fluye a través de ella. Mediante observaciones sistemáticas del nivel del río y la velocidad de la corriente en diferentes posiciones a lo largo de su curso es posible establecer empíricamente dicha relación, que tiene la forma

$$q = Q(s, x) \quad (11.25)$$

Si combinamos la (11.25) con la (11.24) podemos obtener una ecuación que describe en forma aproximada a flujos no estacionarios que varían lentamente. Esta ecuación es

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = - \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (11.26)$$

En general, la (11.25) es muy complicada, y por lo tanto el problema se tiene que resolver numéricamente. Sin embargo, como aquí no estamos interesados en describir con exactitud el comportamiento de un determinado curso de agua, sino en entender la física que está a la base del fenómeno, postularemos alguna fórmula sencilla para dicha relación. Claramente, los resultados

⁵ Indicamos con s el área de la sección, medida desde el lecho hasta la superficie del agua. Se entiende que el valor de s depende del tiempo, puesto que el nivel del agua varía con el tiempo.

que obtengamos de esta manera son tan sólo una aproximación muy grosera, y sólo podemos esperar obtener una descripción cualitativa y cuanto mucho estimaciones de orden de magnitud para las velocidades de propagación, los perfiles de las ondas, etc..

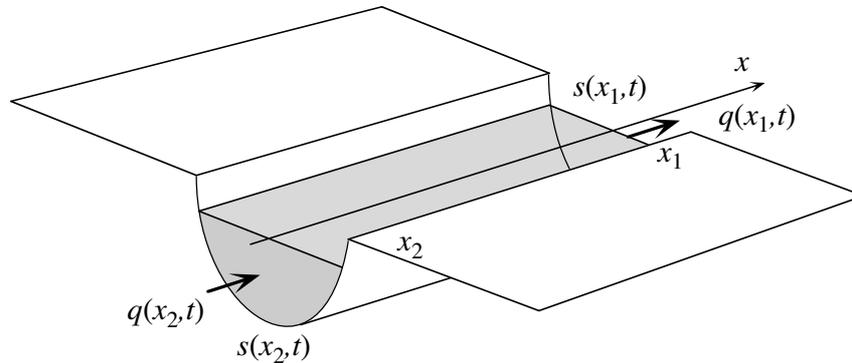


Fig. 11.1. Geometría de un curso de agua para el estudio de las ondas cinemáticas de creciete.

Por el momento no haremos ninguna hipótesis concreta acerca de la forma de Q , salvo suponer que no depende de x :

$$q = Q(s) \quad (11.27)$$

La (11.26) se reduce entonces a

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial t} + c(s) \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad (11.28)$$

que es una ecuación de la forma (11.6) con

$$c(s) = \frac{dQ}{ds} \quad (11.29)$$

El problema descrito por la ecuación de conservación (11.24) y la relación (11.27), o en forma equivalente por la ecuación de ondas no lineal (11.28) es típico de varias situaciones que comprenden (además de la que estamos considerando) el flujo de glaciares, la evolución de la densidad del tráfico en una carretera, la propagación de ciertas reacciones químicas y también la propagación del número de onda para ondas dispersivas (ec. (11.15)). Puesto que todos estos problemas dependen básicamente de una ecuación de conservación del tipo (11.24), las ondas que resultan se denominan *ondas cinemáticas*. El motivo de esta denominación es destacar el contraste con las familiares ondas acústicas y elásticas, que dependen fundamentalmente de la *dinámica* del fenómeno.

El método de las características

La solución de la (11.28) se puede obtener con el método de las características. La idea básica parte de considerar la función $s(x,t)$ en el plano (x,t) , y observar que la expresión

$$\frac{\partial s}{\partial t} + c(s) \frac{\partial s}{\partial x} \quad (11.30)$$

se puede interpretar como la *derivada total* de s a lo largo de la curva definida por

$$\frac{dx}{dt} = c(s) \quad (11.31)$$

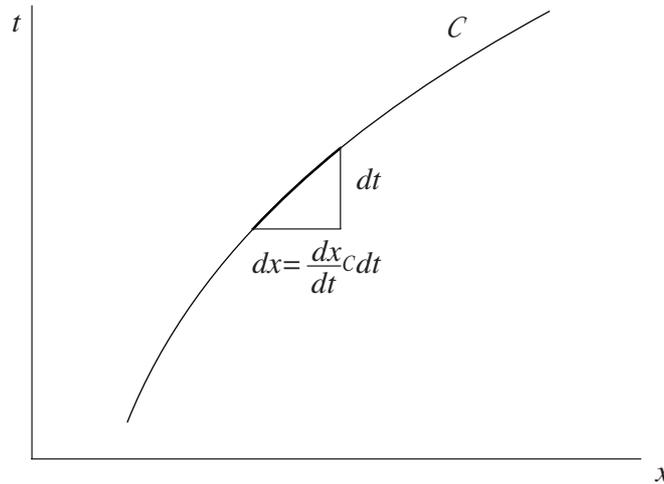


Fig. 11.2. Derivada total de una función a lo largo de una curva $x = x_C(t)$.

En efecto (ver Fig. 11.2), a lo largo de cualquier curva C del plano (x, t) dada por

$$x = x_C(t) \quad (11.32)$$

tendremos que

$$s(x, t)_C = s(x_C(t), t) \quad (11.33)$$

es una función de t , y por lo tanto

$$\left(\frac{ds(x, t)}{dt} \right)_C = \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{dx_C}{dt} \frac{\partial s}{\partial x} \quad (11.34)$$

Consideremos entonces la curva C definida por la (11.31) (por supuesto aún no podemos determinar explícitamente dicha curva, dado que en la (11.31) interviene el valor de s sobre C , que todavía no conocemos). En virtud de la (11.28), sobre C se cumple que

$$\frac{\partial s}{\partial t} + c(s) \frac{\partial s}{\partial x} = \left(\frac{ds}{dt} \right)_C = 0 \quad (11.35)$$

lo que implica que s , y entonces $c(s)$, se mantienen *constantes* a lo largo de C . Por lo tanto resulta que C es una *recta* de pendiente $c(s)$ en el plano (x, t) . Vemos entonces que:

La solución general de la (11.28) se obtiene construyendo en el plano (x,t) una familia de rectas, sobre cada una de las cuales s tiene un valor constante y cuya pendiente $c(s)$ está determinada por dicho valor de s .

Consideremos, por ejemplo, el siguiente problema de valores iniciales:

$$s = f(x) \quad , \quad t = 0 \quad , \quad -\infty < x < +\infty \quad (11.36)$$

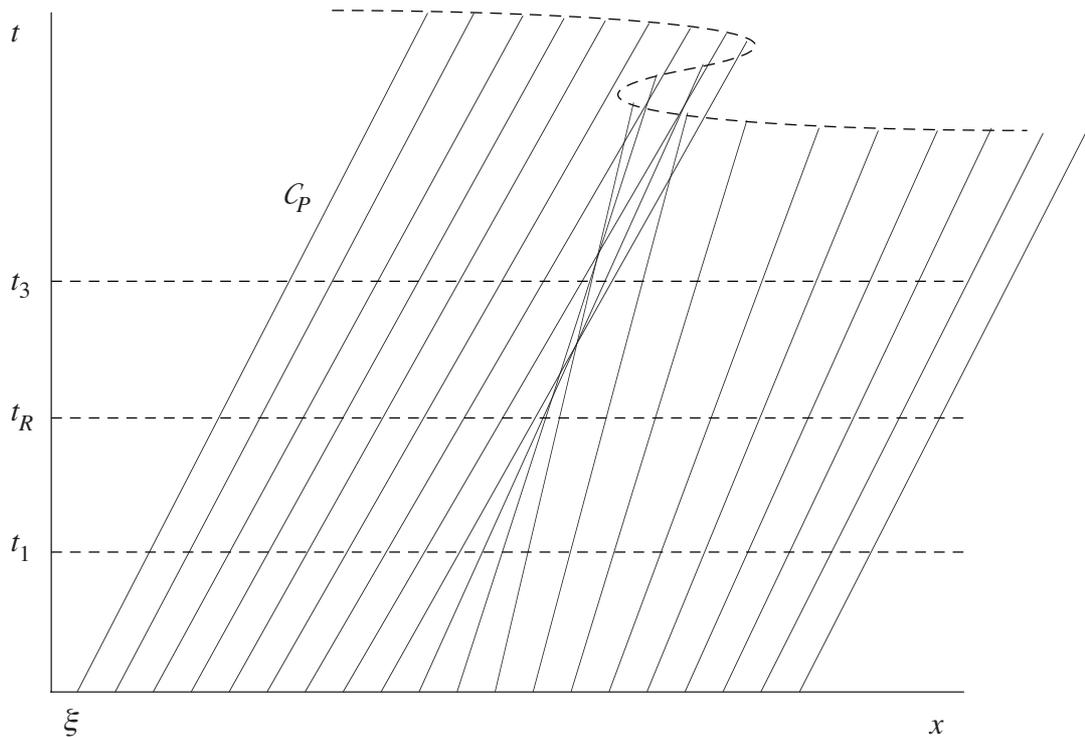


Fig. 11.3. Solución de un problema de valores iniciales con el método de las características. La característica C_P que cruza el eje x en $x = \xi$ tiene una pendiente dada por $c = c_P = c(s_P)$ y transporta el valor de $s = s_P = f(\xi)$. Variando ξ a lo largo del eje x podemos así construir el conjunto de características que determina la solución. La dependencia de c en s produce la típica *distorsión no lineal* de la onda a medida que se propaga. En toda parte *compresiva* de la onda, donde c es una función *decreciente* de x , la onda “rompe” dando lugar a una solución *trivaluada* para $s(x,t)$. La región multivaluada se puede imaginar como un *pliegue* en el plano (x,t) , formado por tres capas con diferentes valores de s en cada capa. La línea de trazos ayuda a visualizar el pliegue. Por el contrario las características divergen en las partes *expansivas* de la onda, donde $c(s)$ aumenta con ξ .

En la Fig. 11.3 hemos representado el plano (x,t) . La condición (11.36) corresponde a asignar el valor de s sobre el eje x . Consideremos un punto cualquiera P sobre el eje x , dado por $x = \xi$. Puesto que en P conocemos $s_P = f(\xi)$ y $c_P = c(s_P) = c(f(\xi)) = F(\xi)$, podemos trazar la recta C_P que pasa por ese punto, cuya ecuación es

$$x = \xi + F(\xi)t \quad (11.37)$$

Sobre C_P tendremos que

$$s(x, t) = s(\xi + F(\xi)t, t) = f(\xi) \quad (11.38)$$

De esta forma, variando ξ a lo largo del eje x podemos construir la familia completa de rectas. A este punto, podemos invertir el proceso, y considerar que la (11.37) determina implícitamente ξ en función de x y t , de modo que

$$\xi = \Xi(x, t) \quad (11.39)$$

Si ahora sustituimos ξ en la (11.38) obtenemos la solución como

$$s(x, t) = f(\Xi(x, t)) \quad (11.40)$$

Es fácil verificar que la (11.40) es efectivamente la solución que buscamos. En efecto

$$s_t = f' \Xi_t \quad , \quad s_x = f' \Xi_x \quad (11.41)$$

y de la (11.37) obtenemos

$$0 = F + (1 + F't)\Xi_t \quad , \quad 1 = (1 + F't)\Xi_x \quad (11.42)$$

Por lo tanto

$$s_t = -\frac{f'F}{1 + F't} \quad , \quad s_x = \frac{f'}{1 + F't} \quad (11.43)$$

y recordando que $F(\xi) = c(s)$ vemos que se cumple la (11.28). La condición inicial se cumple puesto que $\xi = x$ cuando $t = 0$.

Las curvas que usamos para construir la solución son las *curvas características* de nuestro problema. Curvas características análogas juegan un rol fundamental en todos los problemas que dependen de ecuaciones diferenciales hiperbólicas. Sin embargo, en general no es cierto que la solución se mantiene constante a lo largo de las características, y tampoco es cierto que las características sean rectas.

Recordemos que la noción básica de onda es que alguna propiedad reconocible de la perturbación se propaga con una velocidad finita. Para las ondas hiperbólicas, las características corresponden a este concepto. Cada característica en el plano (x, t) representa una porción elemental de onda que se mueve en el espacio x , y el comportamiento de la solución sobre la característica corresponde a la noción que esa porción elemental de onda transporta información. En ese sentido podemos interpretar las (11.31) y (11.35) diciendo que

Distintos valores de s se propagan con la velocidad $c(s)$.

En efecto, nuestra construcción de la solución $s(x, t)$ es equivalente a *trasladar* cada valor del perfil inicial $s(x, 0) = f(x)$ a una distancia $c(s)t$ en la dirección x positiva. Se debe observar que esta distancia es *diferente* para distintos valores de s . Esto se muestra en la Fig. 11.4, para el caso en que $c'(s) > 0$. Los correspondientes valores del tiempo se indican en la Fig. 11.3. La dependencia de c en s produce la típica *distorsión no lineal* de la onda a medida que se propaga. Cuando $c'(s) > 0$ los valores mayores de s se propagan más velozmente que los valores menores. Si $c'(s) < 0$ ocurre al revés: los valores mayores de s se propagan más lentamente que los

menores, y la distorsión tiene la tendencia contraria a la que se muestra en la Fig. 11.4. Para el caso lineal, c es constante y el perfil se traslada sin cambio de forma a la distancia ct .

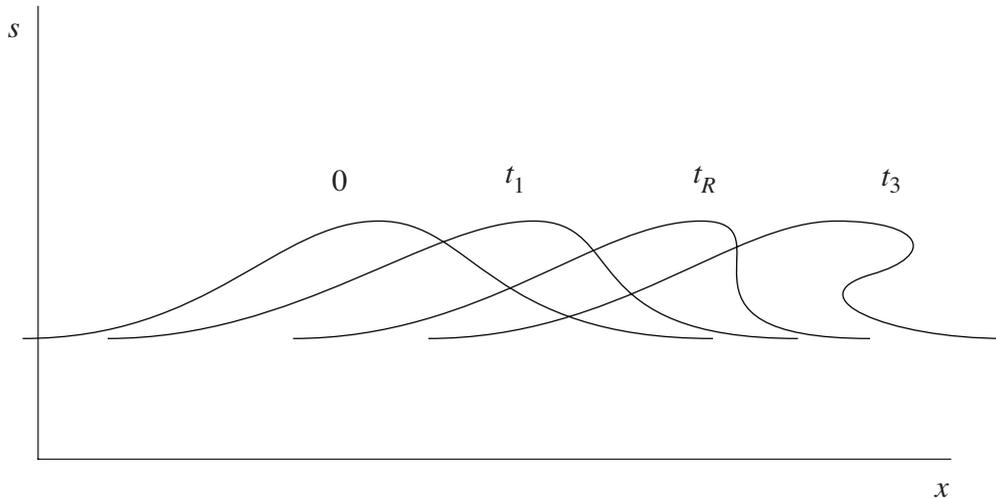


Fig. 11.4. Distorsión y ruptura de una onda hiperbólica no lineal para el caso $c'(s) > 0$. Los correspondientes valores del tiempo se indican en la Fig. 11.3. La dependencia de c en s produce la típica *distorsión no lineal* de la onda debido a que los valores mayores de s se propagan más velozmente que los valores menores. Si $c'(s) < 0$ ocurre al revés: los valores mayores de s se propagan más lentamente que los menores, y la distorsión tiene la tendencia contraria a la que se muestra en la figura. Toda parte *compresiva* de la onda (donde c es una función *decreciente* de x) tarde o temprano “rompe” dando lugar a una solución *trivaluada* para $s(x,t)$. La ruptura comienza a ocurrir en el instante $t = t_R$ indicado, cuando el perfil de s adquiere una pendiente infinita.

En nuestro problema hay una *única* familia de características. Esto se debe a que la ecuación (11.28) es del primer orden. Cuando el problema involucra una ecuación hiperbólica del segundo orden del tipo (11.1) hay *dos* familias de características, como ocurre en la dinámica de gases para flujos homoentrópicos. En general, una ecuación hiperbólica de orden n tiene n familias de características, y por cada punto $P(x,t)$ pasan n características, una de cada familia. Sobre cada una de ellas se mantiene constante una particular combinación (propia de la familia) de las variables dependientes del problema, que se denomina *invariante de Riemann*. De esta forma, a partir de los invariantes asociados con las características que llegan a $P(x,t)$ se pueden calcular los valores de las variables dependientes en dicho punto. Por otra parte las pendientes de las características en $P(x,t)$ son funciones (diferentes para cada familia) de los n invariantes de Riemann que fueron transportados hasta ese punto por las características que llegan al mismo. Esto permite generalizar para las ecuaciones de orden superior el método que hemos expuesto para el caso de una ecuación hiperbólica del primer orden. Claramente, el problema se vuelve más complicado, pero en esencia equivale al que estamos considerando.

Ruptura de la onda y soluciones multivaluadas

Observando la Fig. 11.4, se nota que todavía falta algo en nuestra teoría. En efecto toda parte *compresiva* de la onda, es decir toda parte donde c es una función *decreciente* de x , tarde o temprano da lugar a una solución *trivaluada* para $s(x,t)$. Se dice entonces que la onda “rompe”. La

ruptura comienza a ocurrir en el instante $t = t_R$ indicado en la Fig. 11.3, cuando el perfil de s adquiere una pendiente infinita en un punto. Nuestra solución (11.43) confirma este hecho y nos permite determinar t_R . En efecto, sobre toda característica para la cual $F'(x) < 0$, s_x y s_t divergen en el instante

$$t = -\frac{1}{F'(\xi)} \quad (11.44)$$

Por lo tanto la ruptura ocurre primero sobre la característica $\xi = \xi_R$ para la cual $F'(\xi) < 0$ y $|F'(\xi)|$ es un máximo. La primera ruptura ocurre cuando

$$t = t_R \equiv -\frac{1}{F'(\xi_R)} \quad (11.45)$$

Esta evolución se puede seguir en el plano (x, t) . La parte de la onda en la cual $F'(x) < 0$ es aquella donde las características son *convergentes*. Puesto que las características son rectas, eventualmente se cruzan y se superponen dando lugar a una región donde la solución es *multi-valuada*, como se ve en la Fig. 11.3. Esta región se puede imaginar como un *pliegue* en el plano (x, t) , formado por tres capas con diferentes valores de s en cada capa. El contorno de esa región es una *envolvente* de las características. Podemos obtener la envolvente recordando que la familia de características (11.37) depende del parámetro ξ . La condición que dos características próximas correspondientes a ξ y $\xi + \delta\xi$ se crucen en el punto (x, t) es que se cumplan simultáneamente

$$x = \xi + F(\xi)t \quad \text{y} \quad x = \xi + \delta\xi + F(\xi + \delta\xi)t \quad (11.46)$$

Tomando el límite $\delta\xi \rightarrow 0$ en la (11.46) obtenemos

$$x = \xi + F(\xi)t \quad , \quad 0 = 1 + F'(\xi)t \quad (11.47)$$

que es la ecuación de la envolvente en forma implícita. La segunda de las (11.47) muestra que la envolvente se forma para $t > 0$ a partir de aquellas características para las cuales $F'(\xi) < 0$. El mínimo valor de t sobre la envolvente se tiene para aquél valor de ξ para el cual $-F'(\xi)$ es máximo. Este es precisamente el primer momento de ruptura de acuerdo con la (11.45). Si $F''(\xi)$ es continuo la envoltura tiene una cúspide en $t = t_R$, $x = x_R$ como se ve en la Fig. 11.3.

Se tiene un caso extremo de ruptura cuando la distribución inicial es discontinua, por ejemplo si

$$f(x) = \begin{cases} s_1 & , \quad x > 0 \\ s_2 & , \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{con} \quad F(x) = \begin{cases} c_1 = c(s_1) & , \quad x > 0 \\ c_2 = c(s_2) & , \quad x < 0 \end{cases} \quad (11.48)$$

con $c_2 > c_1$. En este caso (ver Fig. 11.5) la ruptura ocurre de inmediato. La región multivaluada comienza en el origen y está limitada por las características $x = c_1 t$ y $x = c_2 t$. El contorno de esta región no es una envolvente con una cúspide, puesto que F y sus derivadas no son continuas.

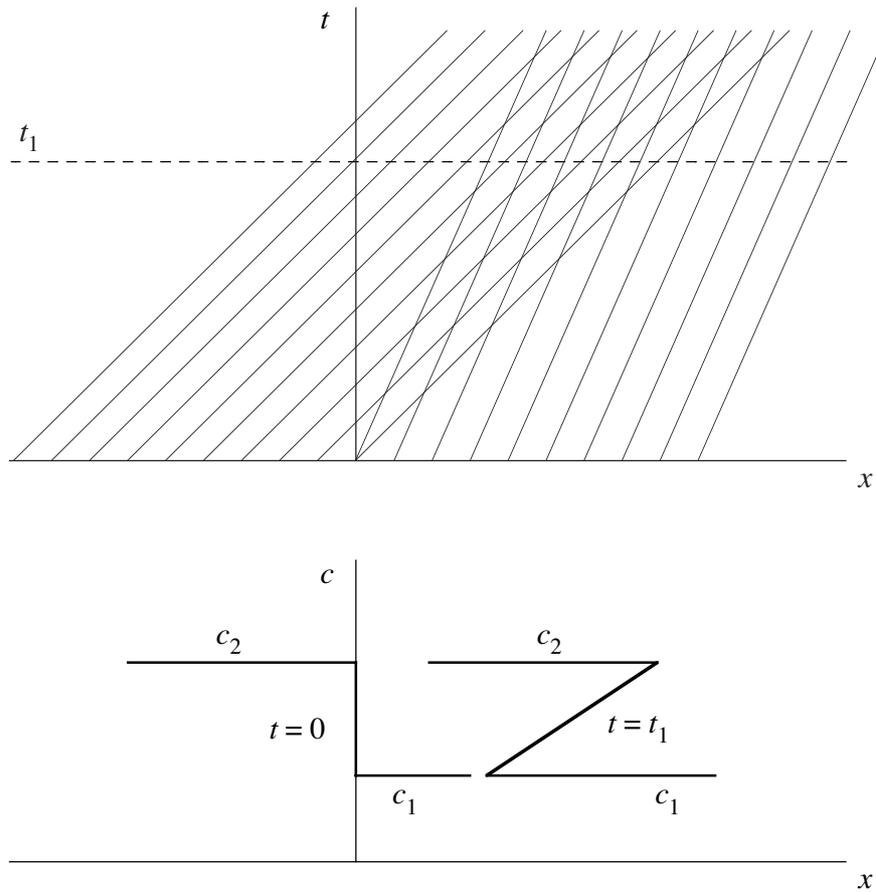


Fig. 11.5. Solución multivaluada para una distribución inicial discontinua. En la parte superior de la figura se muestran las características. En la parte inferior se muestra $c(x)$ para el instante inicial y para un tiempo posterior. Se puede apreciar que la onda rompe de inmediato.

Por otra parte si $c_2 < c_1$ la discontinuidad inicial es expansiva y la solución es continua y univaluada. La podemos obtener de las (11.37) y (11.38), a partir de un caso en que todos los valores de F entre c_1 y c_2 corresponden a características que cruzan el eje x en un pequeño intervalo $\delta\xi$ alrededor del origen, y tomando el límite $\delta\xi \rightarrow 0$. De esta forma obtenemos un abanico de características en el plano (x, t) como se ve en la Fig. 11.6. Las características del abanico tienen todas el mismo ξ pero diferente pendiente F . La función F es una función escalón, pero usamos todos los valores de F entre c_1 y c_2 (el tramo vertical del escalón) y hacemos que todos ellos correspondan a $\xi = 0$. En el abanico la solución es, entonces,

$$c = F \quad , \quad x = Ft \quad , \quad c_2 < F < c_1 \tag{11.49}$$

Eliminando F entre estas ecuaciones se obtiene una simple solución explícita para c :

$$c = \frac{x}{t} \quad , \quad c_2 < \frac{x}{t} < c_1 \tag{11.50}$$

La solución completa para c es entonces

$$c = \begin{cases} c_1 & , \quad c_1 < \frac{x}{t} \\ \frac{x}{t} & , \quad c_2 < \frac{x}{t} < c_1 \\ c_2 & , \quad \frac{x}{t} < c_2 \end{cases} \quad (11.51)$$

A partir de la (11.51) se puede entonces *invertir* la relación $c = c(s)$ para encontrar s .

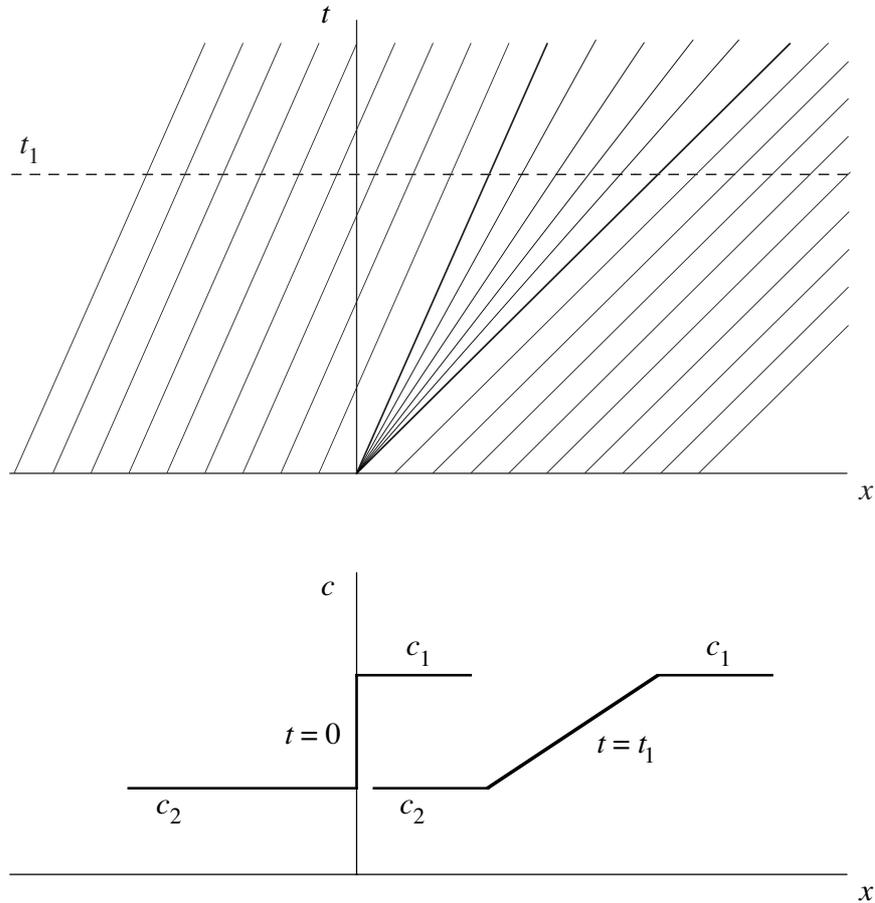


Fig. 11.6. Onda expansiva centrada: una distribución inicial discontinua pero expansiva da lugar a una solución univaluada.

Inadmisibilidad de las soluciones multivaluadas

En la mayoría de los problemas físicos en que se aplica esta teoría, s es una magnitud inherentemente univaluada⁶. Por lo tanto, cuando ocurre la ruptura de la onda no cabe otra conclusión que admitir que *la ecuación (11.28) no describe adecuadamente la física del problema*⁷. Esto sucede porque *ha dejado de valer* alguna hipótesis, o alguna aproximación que usamos en el planteo del problema para llegar a la ecuación (11.28). En principio, la forma de resolver la difi-

⁶ En el caso que estamos considerando s es la sección transversal del curso de agua y claramente no es aceptable que sea una función multivaluada de x .

⁷ Incluso en el caso de las olas en el agua, para las cuales una solución multivaluada para la altura de la superficie libre no es absurda, se encuentra que la (11.28) no es adecuada como descripción del proceso.

cultad es revisar la física del problema, para encontrar lo que no está funcionando bien y formular una teoría mejor. Este es seguramente un camino correcto, pero no es el *único* posible. Veremos en efecto que las soluciones univaluadas de la (11.28) se pueden seguir usando, si admitimos la posibilidad de tener *soluciones discontinuas*. De esta forma podemos construir una solución univaluada con una única discontinuidad, que evita el tramo multivaluado de la solución continua⁸. Pero más allá del artificio matemático gracias al cual se logra construir la solución, es importante recordar que el origen del defecto de la solución continua es una falla en la física de la ecuación (11.28). Ambos aspectos se deben tener en cuenta, pues resulta que hay varias familias de soluciones discontinuas, todas satisfactorias del punto de vista matemático, pero sólo una de ellas es físicamente aceptable. Está claro entonces que no podemos avanzar más sin considerar un problema físico concreto.

Estos problemas se estudiaron primero en la dinámica de gases. Cuando se ignoran la viscosidad y la conducción del calor, las ecuaciones no lineales de la dinámica de gases tienen soluciones que rompen, así como ocurre con las ondas cinemáticas. Pero cuando los gradientes se hacen abruptos, justo antes de la ruptura de la onda, la viscosidad y la conducción del calor ya no se pueden despreciar. Estos efectos se pueden tratar con una teoría más precisa, y de acuerdo con esta teoría mejor la onda no rompe y en cambio aparece una región delgada, llamada *frente de choque* u *onda de choque*, donde las variables que describen el flujo sufren variaciones rápidas. Dentro de la onda de choque la viscosidad y la conducción del calor tienen importancia crucial, pero fuera de ella se puede seguir ignorando esos efectos. Por lo tanto, en la teoría no viscosa “ampliada” podemos *idealizar* la región del choque (ignorando su espesor y su estructura interna) y tratarla como una *discontinuidad*. Procediendo de esta manera es suficiente, para complementar la teoría no viscosa, agregar ciertas “condiciones de choque” que establecen relaciones entre los valores de las variables del flujo de ambos lados de la “discontinuidad”. Más adelante vamos a estudiar estas cuestiones. Sin embargo la dinámica de gases no es el caso más simple y por eso preferimos desarrollar estas ideas en el contexto del problema de primer orden que estamos considerando aquí.

Condiciones de choque para las ondas cinemáticas

De acuerdo con nuestra discusión anterior, cuando ocurre la ruptura de la onda sabemos que hay una *falla* en la relación (11.25), esto es, en nuestra hipótesis

$$q = Q(s, x) \quad (11.52)$$

Una forma de salvar la dificultad consiste, como dijimos, en aceptar la posibilidad de tener soluciones discontinuas. Si adoptamos este enfoque, está claro que s y q no son diferenciables en todas partes, y por lo tanto en la discontinuidad no se puede aplicar la (11.24)

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (11.53)$$

⁸ Del punto de vista matemático esto requiere ampliar el concepto de solución pues como en una discontinuidad no existen las derivadas de s , en sentido estricto no se puede hablar de “soluciones” discontinuas. Esto se puede hacer por medio del concepto de “solución débil”.

pero siempre y cuando valga la hipótesis del continuo, *sigue siendo válida* la ec. (11.23) que expresa la conservación de la masa

$$\frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_1} s(x,t) dx = q(x_2,t) - q(x_1,t) \quad (11.54)$$

La condición de choque

Observemos, antes que nada, que mientras las discontinuidades de s y q sean *finitas*, del punto de vista matemático no hay inconvenientes con la ec. (11.54), puesto que todas las expresiones que figuran en ella siguen teniendo sentido. Veamos entonces qué *restricciones* impone la ley de conservación (11.54) sobre una eventual discontinuidad.

Para ver esto, supongamos tener una discontinuidad en

$$x = x_d(t) \quad (11.55)$$

Elegimos entonces x_1 y x_2 tales que

$$x_2 < x_d(t) < x_1 \quad (11.56)$$

Supongamos, además, que s , q y sus derivadas primeras son acotadas y continuas en los intervalos $x_2 \leq x < x_d(t)$ y $x_d(t) < x \leq x_1$, y que tienen límites finitos s^- , q^- y s^+ , q^+ para $x \rightarrow x_d^-$ (por debajo) y $x \rightarrow x_d^+$ (por arriba), respectivamente. Con estas hipótesis la (11.54) se puede escribir como

$$\begin{aligned} q(x_2,t) - q(x_1,t) &= \frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_d(t)} s(x,t) dx + \frac{d}{dt} \int_{x_d(t)}^{x_1} s(x,t) dx \\ &= s(x_d^-,t) \dot{x}_d(t) - s(x_d^+,t) \dot{x}_d(t) + \int_{x_2}^{x_d(t)} s_t(x,t) dx + \int_{x_d(t)}^{x_1} s_t(x,t) dx \end{aligned} \quad (11.57)$$

donde $\dot{x}_d \equiv dx_d/dt$. Ahora tomamos los límites $x_2 \rightarrow x_d^-$ y $x_1 \rightarrow x_d^+$ en la (11.57). Puesto que s_t es acotada en cada uno de los intervalos de integración, las integrales se anulan en el límite y queda

$$q(x_d^-,t) - q(x_d^+,t) = \{s(x_d^-,t) - s(x_d^+,t)\} \dot{x}_d(t) \quad (11.58)$$

Habitualmente los valores de las cantidades delante y detrás de la discontinuidad se suelen indicar con los subscripts 1, 2, respectivamente, y la velocidad del frente de choque se designa con $U \equiv \dot{x}_d$. Con esta notación, la (11.58) se escribe

$$q_2 - q_1 = U(s_2 - s_1) \quad (11.59)$$

Otra notación que se usa frecuentemente es indicar el salto de una cantidad A cualquiera en la discontinuidad como $[A] \equiv A_2 - A_1$. De esta forma la (11.59) se expresa como

$$-U[s] + [q] = 0 \quad (11.60)$$

Si comparamos esta expresión con la ecuación diferencial (11.53) vemos que existe la siguiente correspondencia

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -U[\] \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} \leftrightarrow [\] \quad (11.61)$$

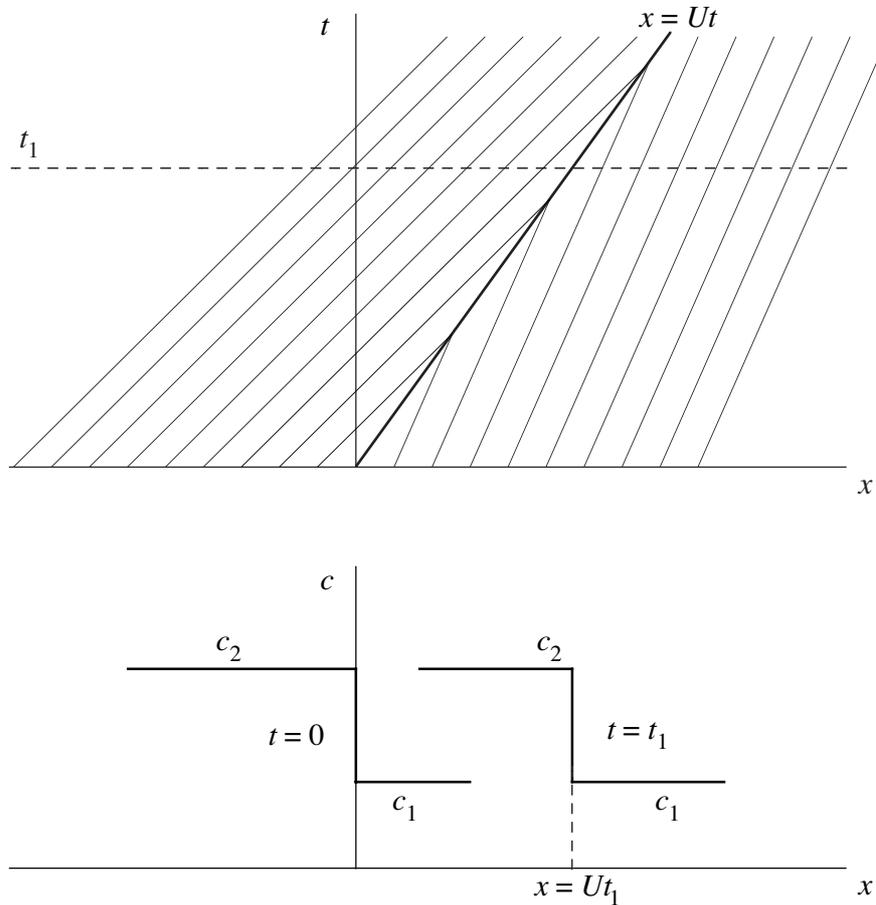


Fig. 11.7. Solución discontinua univaluada obtenida introduciendo un frente de choque en la solución multivaluada de la Fig. 11.5.

Construcción de soluciones discontinuas

En vista de estos resultados podemos extender nuestras soluciones incluyendo eventuales discontinuidades. Claramente, en toda parte continua de la solución, se satisface la (11.53) y sigue valiendo la (11.52); por lo tanto de uno y otro lado del frente de choque tendremos $q_2 = Q(s_2)$ y $q_1 = Q(s_1)$, y la condición (11.59) nos da

$$U = \frac{Q(s_2) - Q(s_1)}{s_2 - s_1} \quad (11.62)$$

Queda todavía el problema de cómo introducir discontinuidades en la solución (11.37)-(11.38) de modo tal que se cumpla la (11.62) y que se evite que la solución sea multivaluada.

Veamos como se resuelve el caso de la distribución inicial discontinua (11.48), en el cual

$$\left. \begin{array}{l} s = s_1 \quad , \quad c = c(s_1) = c_1 \quad , \quad x > 0 \\ s = s_2 \quad , \quad c = c(s_2) = c_2 \quad , \quad x < 0 \end{array} \right\} t = 0 \quad (11.63)$$

con $c_2 > c_1$. La solución con ruptura está representada en la Fig. 11.5. Ahora podemos construir una solución univaluada para este problema, que consiste simplemente en un frente de choque que se mueve con la velocidad (11.62). Esta solución es

$$\begin{array}{l} s = s_1 \quad , \quad x > Ut \\ s = s_2 \quad , \quad x < Ut \end{array} \quad (11.64)$$

y está representada en la Fig. 11.7.

En muchos textos se usa esta solución particular para deducir la condición de choque (11.59). Para esto basta considerar la solución en el referencial del frente de choque (Fig. 11.8). En ese referencial el flujo que entra a la discontinuidad es $q_2 - Us_2$ y el que sale es $q_1 - Us_1$. La ley de conservación requiere que sean iguales y por lo tanto se llega a la (11.59).

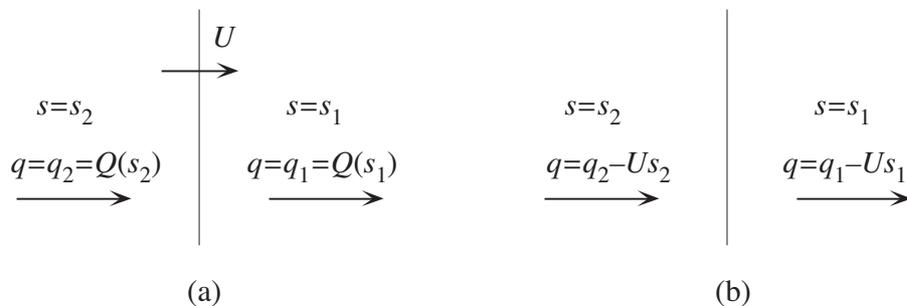


Fig. 11.8. Las magnitudes del flujo en el referencial del observador (a), y en el referencial del frente de choque (b).

Volviendo ahora al caso general, el problema analítico de introducir un frente de choque que satisfice la (11.62) en la solución continua

$$s = f(\xi) \quad , \quad x = \xi + F(\xi)t \quad (11.65)$$

se debe resolver teniendo en cuenta que tanto la solución discontinua s_d como la solución multivaluada s_m satisfacen la ley de conservación (11.54). Por consiguiente, para todo par de puntos (x_1, x_2) para los cuales ambas soluciones coinciden, se debe cumplir

$$\int_{x_2}^{x_1} s_d(x, t) dx = \int_{x_2}^{x_1} s_m(x, t) dx \quad (11.66)$$

La condición (11.66) fija la posición correcta de la discontinuidad. Como se indica en la Fig. 11.9, la discontinuidad debe cortar la solución multivaluada de modo tal que queden descartados dos lóbulos de igual área. Esta es la forma general de determinar la discontinuidad. Sin embargo, el cálculo puede resultar complicado. Nosotros no vamos a entrar en detalles, y recomendamos al lector interesado consultar la referencia ya citada (Whitham).

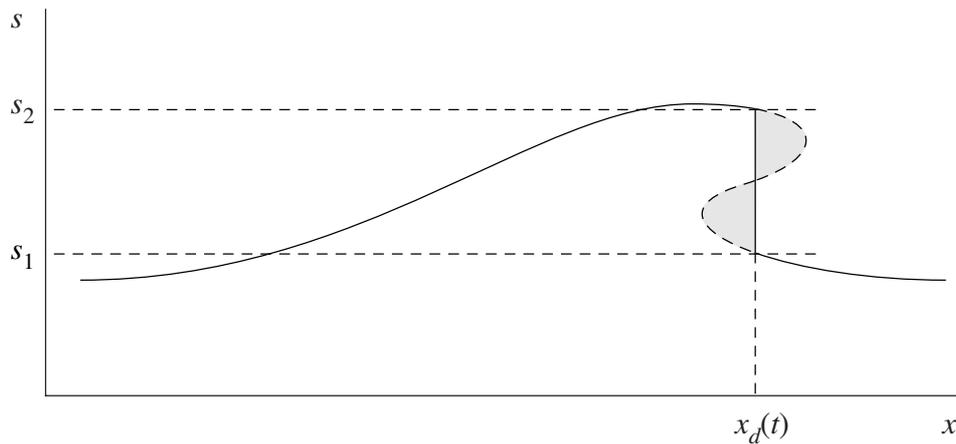


Fig. 11.9. La posición correcta del frente de choque es aquella para la cual son iguales las áreas de los dos lóbulos que quedan descartados en la solución continua multivaluada.

La condición de ruptura

Una solución continua rompe, y entonces es necesario introducir un frente de choque, *si, y solo si* la velocidad de propagación *disminuye* a medida que x crece. Por lo tanto, cuando se incluye el frente de choque, se debe cumplir que

$$c_2 > U > c_1 \quad (11.67)$$

Aquí todas las velocidades se consideran positivas cuando tienen la dirección de las x crecientes, y el subíndice 1 se refiere al valor de c justo *delante* del frente de choque (es decir, para $x > x_d$) mientras que 2 se refiere al valor de c justo *detrás* del mismo. Por lo tanto el pasaje de un frente de choque produce un *aumento* de c . Visto desde adelante el frente se mueve con una velocidad *supercrítica*, es decir *mayor* que la velocidad de la onda en esa región, y el frente de choque se lleva por delante a las características de la región $x > x_d$. Por el contrario visto desde atrás el frente se mueve con una velocidad *subcrítica*, menor que la velocidad de la onda, y entonces es alcanzado por las características de la región $x < x_d$ como se ve en la Fig. 11.7.

Cabe observar que la condición de choque (11.59) *no prohíbe* la existencia de discontinuidades con $c_2 < c_1$. Sin embargo, a partir de una solución continua no se puede *nunca* formar un frente de choque con $c_2 < c_1$ y por lo tanto ese tipo de discontinuidad no se requiere y no se considera. Otra forma de ver esta cuestión parte de preguntarse si acaso es posible, mediante algún artificio, producir una onda que tenga una discontinuidad con $c_2 < c_1$. Pero ya vimos que una condición inicial de este tipo tiene una solución continua perfectamente satisfactoria (Fig. 11.6) que consiste en un abanico de características divergentes. Esta solución muestra que una discontinuidad con $c_2 < c_1$ es *inestable*, pues *desaparece* espontáneamente de inmediato, dando lugar a una onda sin discontinuidad.

El argumento anterior sobre la imposibilidad de formación y el argumento de la inestabilidad de las discontinuidades con $c_2 < c_1$ son complementarios. Aquí no seguiremos examinando el tema de la inestabilidad puesto que el argumento sobre la imposibilidad de formación es convincente y exento de ambigüedades. Sin embargo, en ciertos casos de ecuaciones de orden superior es más difícil estudiar la formación de frentes de choque. En esos casos el análisis de la estabilidad

permite determinar más fácilmente cuándo una discontinuidad que satisface las condiciones de choque es realmente posible.

En la dinámica de gases, la desigualdad que corresponde a la (11.67) equivale a la condición que la entropía del gas *aumenta* cuando el gas atraviesa el frente de choque. Del punto de vista histórico, la condición sobre la entropía fue el primer argumento a favor de la *irreversibilidad* de las ondas de choque (esto es, que la transición producida por una onda de choque va en un sólo sentido). Sin embargo, las condiciones del tipo (11.67) son más generales.

Un punto de vista alternativo a estos criterios es requerir que una discontinuidad, para ser aceptable como frente de choque, tenga una estructura consistente cuando se la describe mediante ecuaciones más precisas. Este punto de vista es más satisfactorio, pues se basa sobre una descripción más realística del fenómeno. Sin embargo este planteo puede llevar a dificultades de cálculo prohibitivas.

Estructura del frente de choque para las ondas de creciente

Antes de proseguir con el tema de cómo introducir las discontinuidades cuando hay ruptura de ondas, conviene examinar el punto de vista complementario, esto es, que la ecuación diferencial (11.53) sigue siendo válida, pero que la relación (11.52) es incorrecta.

Hasta aquí no especificamos la relación $q = Q(s)$; por lo tanto nuestro tratamiento es general, y vale para cualquier tipo de ondas cinemáticas con tal de interpretar adecuadamente el significado de s y q . Pero ahora, inevitablemente, tenemos que entrar en los particulares de esta relación.

Teoría cinemática de las ondas de creciente: modelos simples para la relación entre la sección y el caudal

Dejando de lado las determinaciones empíricas basadas en la observación del comportamiento del curso de agua, vamos a comentar algunos modelos teóricos sencillos a partir de los cuales se puede establecer una relación entre s y q en forma cerrada.

Como primera y grosera aproximación, esta relación se suele obtener haciendo un balance entre la fuerza de *fricción* en el lecho del río o canal y la fuerza de *gravedad* que causa el escurrimiento de las aguas (Fig. 11.10). Es razonable en estos casos suponer que en cada posición x , la fuerza de fricción es proporcional al cuadrado⁹ de la *velocidad media*, definida como

$$v = \frac{q}{s} \quad (11.68)$$

y que también es proporcional al *perímetro mojado* P de la sección s . Si designamos con C_f al coeficiente de fricción (o de arrastre), la fuerza de arrastre por unidad de longitud del curso de agua es entonces

$$F_f = \rho C_f P v^2 \quad (11.69)$$

donde ρ es la densidad del agua. Por otra parte, si α es la pendiente del curso de agua, la fuerza por unidad de longitud debida a la gravedad es

$$F_g = \rho g_x \quad (11.70)$$

⁹ En los casos de interés práctico, se trata de flujos con alto número de Reynolds.

donde $g_x \equiv g \sin \alpha$. Por lo tanto, el balance entre (11.69) y (11.70) permite obtener

$$v = \sqrt{\frac{s g_x}{P C_f}} \quad (11.71)$$

y entonces

$$q = Q(s) = sv = \sqrt{\frac{s^3 g_x}{P C_f}} \quad (11.72)$$

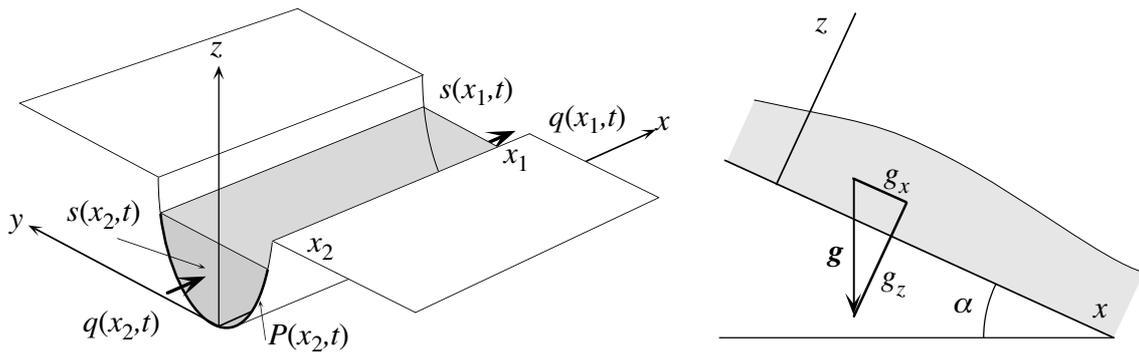


Fig. 11.10. Geometría y sistema de coordenadas empleados en la teoría de las ondas de creciente.

Ahora, el perímetro mojado P depende de s , y también C_f puede depender de s . La relación entre P y s depende de la topografía del lecho del río. Si el ancho del río es mucho mayor que la profundidad, P varía muy poco con la profundidad, y se puede considerar constante. Si también C_f y α se suponen constantes, la (11.72) da la relación

$$v \propto s^{1/2} \quad , \quad q \propto s^{3/2} \quad (11.73)$$

que se conoce como *ley de Chezy*. En este caso, la velocidad de propagación de las ondas de creciente es

$$c(s) = \frac{dQ}{ds} = \frac{d}{ds}(sv) = v + s \frac{dv}{ds} = \frac{3}{2}v \quad (11.74)$$

Más en general, P y C_f dependen de s . Si se supone que estas dependencias siguen leyes de potencias, se obtienen relaciones del tipo

$$v \propto s^n \quad , \quad q \propto s^{1+n} \quad (11.75)$$

Por ejemplo, si la sección transversal del curso de agua es triangular, resulta $P \propto s^{1/2}$, lo cual lleva a $n = 1/4$ en las (11.75). La ley de Manning (según la cual $C_f \propto s^{-1/3}$) lleva a $n = 2/3$ para un río ancho y $n = 5/12$ para un curso de agua de sección triangular. Para todas las leyes de potencias del tipo (11.75) resulta

$$c(s) = (1+n)v \propto s^n \quad (11.76)$$

Como es de esperar, las ondas de creciente se propagan más rápido que el flujo, pero en general su velocidad de propagación no es mucho mayor que la velocidad de la corriente.

Se debe notar que en un río, Q depende de x , puesto que la geometría del cauce, la pendiente y el coeficiente de fricción cambian de un lugar a otro. Por lo tanto, si introducimos la relación entre q y s en la ecuación de conservación (11.24) se obtiene una ecuación de la forma

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad (11.77)$$

En general el cálculo de la propagación de las ondas de creciente no se puede llevar a cabo de forma sencilla. Pero en aquellos casos¹⁰ en que Q no depende de x , la (11.77) se reduce a

$$\frac{\partial s}{\partial t} + c(s) \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad (11.78)$$

y podemos calcular la solución con el método de las características como hicimos antes, introduciendo cuando sea necesario frentes de choque que satisfacen la relación (11.59):

$$U = \frac{q_2 - q_1}{s_2 - s_1} \quad (11.79)$$

Corresponde notar que para las leyes de potencias que hemos considerado (y también de acuerdo con la observación) $c(s)$ es una función *creciente* de s . Por lo tanto, las ondas asociadas con un aumento del nivel del curso de agua rompen hacia adelante, y los frentes de choque implican un aumento del nivel de las aguas, pues $s_2 > s_1$.

Efectos de orden superior: la teoría hidráulica para aguas poco profundas

La teoría cinemática que desarrollamos hasta ahora presenta un serio inconveniente, pues predice que una creciente termina fatalmente con la ruptura de la onda. Si esto fuese cierto, y se produjera una discontinuidad, significaría que toda creciente acabaría convirtiéndose en un aluvión. Afortunadamente para nosotros no ocurre tal cosa salvo en situaciones muy especiales.

Es evidente por lo tanto que la relación $q = Q(s)$ se debe reconsiderar. Lo que sucede es que en un flujo no estacionario, las fuerzas debidas a la fricción y a la gravedad no se equilibran exactamente y su diferencia conduce a la aceleración del fluido, que despreciamos en nuestro tratamiento. Además, no tomamos en cuenta la diferencia entre las pendientes de la superficie libre y del cauce del río, que produce un efecto importante cuando el frente de la onda se empina.

Para ver como se puede mejorar la teoría tomando en cuenta estos efectos y sin complicar demasiado los cálculos, nos limitaremos a una geometría sencilla. Por lo tanto consideraremos el flujo en un canal de sección rectangular cuyo ancho es b y cuya pendiente α es constante y supondremos que $C_f = \text{cte.}$. Si la profundidad de la corriente es h , y $h \ll b$, entonces el perímetro mojado está dado por $P \approx b = \text{cte.}$. Además, vamos a usar como variables la profundidad $h (= s/b)$ y la velocidad media $v = q/s (= q/hb)$, en lugar de s y q . Por último vamos a suponer que la coordenada y (transversal a la dirección de la corriente) es ignorable, y que la coordenada z es perpendicular al lecho del canal (Fig. 11.10).

¹⁰ Por ejemplo en un canal recto de perfil uniforme y pendiente constante.

Conviene expresar las ecuaciones en forma conservativa pues así será más fácil deducir las condiciones apropiadas para una discontinuidad, cuando sea necesario. La conservación de la masa por unidad de ancho del canal se expresa entonces como

$$\frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_1} h dx + [hv]_{x_2}^{x_1} = 0 \quad (11.80)$$

En cuanto a la ecuación que expresa la conservación de la cantidad de movimiento por unidad de ancho del canal, usando la *aproximación hidráulica* (que consiste en despreciar la componente z de la velocidad, esto se aclarará más adelante) la podemos escribir como

$$\frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_1} hv dx + [hv^2]_{x_2}^{x_1} + \left[\frac{1}{2} g_z h^2 \right]_{x_2}^{x_1} = \int_{x_2}^{x_1} g_x h dx - \int_{x_2}^{x_1} C_f v^2 dx \quad (11.81)$$

donde $g_z \equiv g \cos \alpha$ y hemos cancelado los factores comunes ρ y b . De izquierda a derecha, los términos de la (11.81) son: (1) la tasa de variación de la cantidad de movimiento del fluido contenido en el tramo $x_2 < x < x_1$, (2) el transporte neto de cantidad de movimiento a través de las secciones x_1 y x_2 , (3) la diferencia entre la presión que se ejerce sobre las secciones x_1 y x_2 debido a la diferencia de la profundidad de la corriente, (4) la componente del peso del fluido en la dirección x , y (5) la fuerza de fricción que ejerce el lecho del canal.

Conviene hacer un breve comentario sobre la aproximación hidráulica. En la teoría hidráulica se usa como variable la *velocidad media* v , obtenida como

$$v(x, t) = \frac{1}{h} \int_0^h u_x(x, z, t) dz \quad (11.82)$$

y se desprecia la aceleración del fluido en la dirección z . Esto último implica que la presión es puramente hidrostática, de modo que

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g_z \quad (11.83)$$

Por lo tanto, integrando la (11.83) resulta

$$p - p_0 = -(z - h)\rho g_z \quad (11.84)$$

donde p_0 es la presión atmosférica. La fuerza que se ejerce sobre una sección transversal del canal debido a la presión es entonces

$$b \int_0^h (p - p_0) dz = -b \rho g_z \int_0^h (z - h) dz = \frac{1}{2} b h^2 \rho g_z \quad (11.85)$$

de modo que finalmente obtenemos el tercer término de la (11.81).

Las ecuaciones (11.80) y (11.81) son las dos condiciones de conservación que necesitamos. Si suponemos que h y v son diferenciables, podemos tomar el límite $x_2 \rightarrow x_1 = x$ y obtener un sistema de ecuaciones diferenciales parciales para h y v :

$$\begin{aligned} h_t + (hv)_x &= 0 \\ (hv)_t + \left(hv^2 + \frac{1}{2}g_z h^2\right)_x &= g_x h - C_f v^2 \end{aligned} \quad (11.86)$$

Podemos usar la primera de estas ecuaciones para reemplazar h_t en la segunda y simplificarla un poco; así obtenemos finalmente nuestro sistema en la forma

$$\begin{aligned} h_t + (hv)_x &= 0 \\ v_t + vv_x + g_z h_x &= g_x - C_f \frac{v^2}{h} \end{aligned} \quad (11.87)$$

La aproximación de ondas cinemáticas se obtiene a partir de este sistema despreciando el primer miembro de la segunda ecuación. Se obtiene así

$$h_t + (hv)_x = 0 \quad , \quad v = \sqrt{h \frac{g_x}{C_f}} \quad (11.88)$$

que equivale a nuestro anterior sistema, como el lector puede fácilmente verificar.

En esta teoría cinemática, la condición de choque (11.79) se expresa como

$$U = \frac{v_2 h_2 - v_1 h_1}{h_2 - h_1} \quad (11.89)$$

Estabilidad

Vamos a considerar ahora el efecto de los términos adicionales de las (11.87). Para comenzar, consideremos primero la forma linearizada de este sistema de ecuaciones, para pequeñas perturbaciones alrededor de un estado estacionario en el cual

$$h = h_0 \quad , \quad v = v_0 \quad \text{con} \quad v_0 = \sqrt{h_0 \frac{g_x}{C_f}} \quad (11.90)$$

Si suponemos que

$$v = v_0 + V \quad , \quad h = h_0 + H \quad (11.91)$$

donde V y H son pequeñas perturbaciones, y sustituimos en las (11.87) obtenemos, linearizando:

$$\begin{aligned} H_t + H_x v_0 + h_0 V_x &= 0 \\ V_t + v_0 V_x + g_z H_x + g_x \left(2 \frac{V}{v_0} - \frac{H}{h_0}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (11.92)$$

Si eliminamos V derivando la segunda ecuación respecto de x y usando la primera, obtenemos

$$\frac{2g_x}{v_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) H = g_z h_0 H_{xx} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 H \quad (11.93)$$

con $c_0 = 3v_0/2$ como corresponde a un canal ancho de perfil rectangular (ley de Chezy). Es fácil verificar que si h_0 es pequeño en comparación con la escala espacial L de las variaciones de H , más precisamente, si se cumplen las condiciones

$$h_0/L \ll g_x/g_z = \tan \alpha \quad \text{y} \quad h_0/L \ll C_f \quad (11.94)$$

el miembro derecho de la (11.93) se puede despreciar, y tenemos la aproximación lineal de la onda cinemática: $H = f(x - c_0 t)$.

El término proporcional a g_z del miembro derecho es un término de tipo difusivo que describe el efecto de la componente z de la gravedad, que tiende a aplanar el perfil de la onda. El efecto del segundo término es más complicado de interpretar, pero podemos obtener una primera idea si suponemos que se cumplen las (11.94) de modo que el miembro derecho de la (11.93) es una pequeña corrección. Al orden más bajo de aproximación, $H = f(x - c_0 t)$ y entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} \approx -c_0 \frac{\partial}{\partial x} \quad (11.95)$$

Usando esta aproximación en el miembro derecho de la (11.93), la ecuación se reduce a

$$\frac{2g_x}{v_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) H = \{c_{g0}^2 - (v_0 - c_0)^2\} H_{xx} \quad (11.96)$$

donde $c_{g0} = (g_y h_0)^{1/2}$ es la velocidad de propagación de las ondas de gravedad de pequeña amplitud (en aguas poco profundas, como corresponde a la aproximación hidráulica). Entonces si

$$c_{g0}^2 > (v_0 - c_0)^2 \quad (11.97)$$

el miembro derecho es *positivo* y por lo tanto hay un efecto de *difusión que tiende a impedir el empinamiento*, y por consiguiente la ruptura, de la onda. Si en cambio

$$c_{g0}^2 < (v_0 - c_0)^2 \quad (11.98)$$

el miembro derecho es negativo y la solución es inestable.

El criterio de estabilidad se puede verificar directamente de la ec. (11.93) mediante el habitual análisis de modos normales, buscando soluciones de la (11.96) de la forma

$$H \propto e^{ikx - i\omega t} \quad (11.99)$$

Sustituyendo en la (11.96) se obtiene la relación de dispersión

$$\frac{2g_x}{v_0} (\omega - c_0 k) = -ic_{g0}^2 k^2 + i(\omega - v_0 k)^2 \quad (11.100)$$

a partir de la cual se determina $\omega = \Omega(k)$. La (11.100) tiene dos raíces ω_1, ω_2 , y las soluciones elementales (11.99) son estables si la parte imaginaria de ambas raíces es negativa. Es fácil verificar, aunque algo laborioso, que la condición para que esto ocurra es precisamente la (11.97).

Esto confirma el resultado de nuestro procedimiento aproximado y lo extiende a todas las longitudes de onda.

Ondas de orden superior

Es importante observar que todo el miembro derecho de la (11.93) se puede escribir en la forma de un operador de ondas, como queda en evidencia si escribimos esa ecuación en la forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_+ \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_- \frac{\partial}{\partial x}\right)H + \frac{2g_x}{v_0}\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right)H = 0 \quad (11.101)$$

donde hemos introducido las cantidades:

$$c_+ = v_0 + c_{g0} \quad , \quad c_- = v_0 - c_{g0} \quad (11.102)$$

que son las velocidades de las ondas de gravedad de aguas poco profundas (de amplitud infinitesimal) que se propagan a favor y en contra de la corriente, respectivamente. Cabe esperar por lo tanto que estas ondas jueguen también algún rol en el problema. No es éste el momento para profundizar esta cuestión, pero podemos hacer una observación importante, que permite interpretar la condición de estabilidad (11.97). Se puede demostrar (ver Whitham) que las velocidades de propagación que aparecen asociadas con las derivadas de mayor orden, son *siempre* las que determinan las señales más rápidas y más lentas. Por lo tanto, en nuestro caso, la señal hidráulica más rápida viaja con la velocidad c_+ y la más lenta con la velocidad c_- . Está claro entonces que la aproximación cinemática

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x}\right)H = 0 \quad (11.103)$$

tiene sentido solamente si

$$c_- < c_0 < c_+ \quad (11.104)$$

Pero es fácil ver que esta condición es precisamente la condición de estabilidad (11.97). Por lo tanto, el flujo es estable si se cumple la (11.104) y entonces cuando se cumplen las condiciones (11.94) es razonable aproximar la (11.93) mediante la (11.103).

Usando las expresiones de c_+ , c_- y c_0 podemos escribir la condición de estabilidad en la forma

$$v_0 < 2c_{g0} \quad (11.105)$$

o bien, recordando la (11.90), e introduciendo el parámetro $\kappa = \tan \alpha / C_f$, en la forma

$$\frac{g_x}{g_z C_f} = \frac{\tan \alpha}{C_f} = \kappa < 4 \quad (11.106)$$

Para ríos y canales v_0 es generalmente mucho menor que c_{g0} , de modo que $\kappa < 4$, pero en los vertederos de diques y otros conductos artificiales los valores críticos se exceden holgadamente. El flujo que resulta en estos casos no es necesariamente caótico y carente de estructura. Bajo circunstancias favorables toma la forma de *ondas rodillo* ("roll waves"), como se muestra en la Fig.

11.11, con una estructura periódica de saltos discontinuos separados por perfiles suaves. Este fenómeno se conoce hace mucho tiempo, pero recién en 1949 Dressler mostró como se pueden construir soluciones no lineales adecuadas de las (11.87) con oportunas condiciones en las discontinuidades, que describan el patrón de las ondas rodillo.

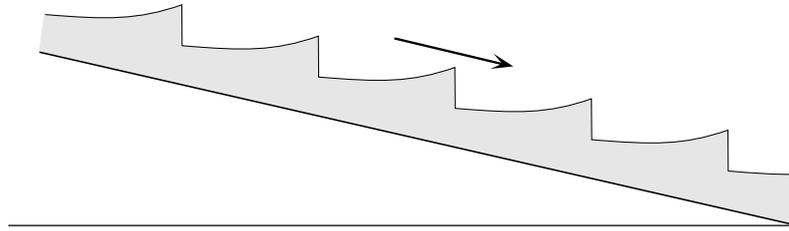


Fig. 11.11. Ondas rodillo en un canal con $\kappa > 4$.

Estructura del frente de choque cinemático: la onda monoclonal de creciente

La estructura de los frentes de choque que surgen en la teoría cinemática de las ondas de creciente (ecs. (11.88) y (11.89)) es particularmente importante, puesto que *el espesor¹¹ del frente puede llegar a ser de decenas de km*. La podemos obtener buscando soluciones del tipo onda viajera de las ecuaciones de la teoría hidráulica, esto es, soluciones cuyo perfil se propaga sin cambio de forma.

Por lo tanto, buscaremos soluciones de las (11.87) de la forma:

$$h = h(X) \quad , \quad v = v(X) \quad , \quad X = x - Ut \quad (11.107)$$

con

$$h(-\infty) = h_2 \quad , \quad v(-\infty) = v_2 \quad \text{y} \quad h(+\infty) = h_1 \quad , \quad v(+\infty) = v_1 \quad (11.108)$$

y

$$h'(-\infty) = 0 \quad , \quad v'(-\infty) = 0 \quad , \quad h'(+\infty) = 0 \quad , \quad v'(+\infty) = 0 \quad (11.109)$$

donde las “primas” indican derivadas respecto de X . Sustituyendo las (11.107) en las (11.87) se obtiene

$$\begin{aligned} (v - U)h' + hv' &= 0 \\ (v - U)v' + g_z h' &= g_x - C_f \frac{v^2}{h} \end{aligned} \quad (11.110)$$

La ecuación de continuidad se integra de inmediato. El resultado es

$$(U - v)h = B \quad , \quad B = \text{cte.} \quad (11.111)$$

y los flujos uniformes en $X = \pm\infty$ satisfacen

¹¹ En este aspecto nuestro problema difiere de lo que ocurre en los gases, en los cuales el espesor del frente de choque es siempre pequeño (del orden del camino libre medio de las moléculas).

$$\begin{aligned} v_1^2 &= \frac{g_x}{C_f} h_1 & , & & v_2^2 &= \frac{g_x}{C_f} h_2 \\ (U - v_1)h_1 &= B & , & & (U - v_2)h_2 &= B \end{aligned} \quad (11.112)$$

Conviene expresar B y U en términos de h_1 y h_2 . De las (11.112) resulta

$$B = \frac{v_2 - v_1}{h_2 - h_1} h_2 h_1 = \sqrt{\frac{g_x}{C_f}} \frac{h_2 h_1}{h_2^{1/2} + h_1^{1/2}} \quad , \quad U = \frac{v_2 h_2 - v_1 h_1}{h_2 - h_1} = \sqrt{\frac{g_x}{C_f}} \frac{h_2^{3/2} - h_1^{3/2}}{h_2 - h_1} \quad (11.113)$$

La última de estas ecuaciones coincide con la condición de choque (11.89) de las ondas cinemáticas. Esto es lo usual en este tipo de problemas, y esperamos que la solución de las (11.110)-(11.111) nos de la estructura del frente de choque cinemático.

Usando la (11.111) podemos eliminar v en la segunda de las (11.110) y obtener una ecuación para la sola h :

$$\frac{dh}{dX} = - \frac{C_f (B - hU)^2 - g_x h^3}{g_z h^3 - B^2} \quad (11.114)$$

No es difícil verificar que esta ecuación se puede escribir como

$$\frac{dh}{dX} = - \tan \alpha \frac{(h_2 - h)(h - h_1)(h - h_0)}{h^3 - h_0 h_1 h_2 \kappa} \quad , \quad h_0 = \frac{h_1 h_2}{(h_1^{1/2} + h_2^{1/2})^2} \quad (11.115)$$

Ahora bien, puesto que $h_1 < h < h_2$ y que $h_0 < h_1, h_2$, nuestra solución nunca pasa por $h = h_0$ y el *numerador* de dh/dX es siempre positivo. Por lo tanto, el comportamiento de la solución depende crucialmente del denominador $h^3 - h_0 h_1 h_2 \kappa$ y su eventual cambio de signo.

Usando la (11.111) se puede escribir el denominador de la (11.115) como

$$h^3 - h_0 h_1 h_2 \kappa = (h^2 / g_z) [g_z h - (U - v)^2] \quad (11.116)$$

Puesto que $B > 0$ por la (11.113), resulta que $U > v$, y a mayor razón $U > v - (g_z h)^{1/2}$. Por lo tanto el denominador es positivo si

$$U < v + \sqrt{g_z h} \quad (11.117)$$

y negativo en el caso contrario¹². Cuando $h_2 \rightarrow h_1$, vemos de la (11.113) que

$$U = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g_x}{C_f}} h_1^{1/2} = \frac{3}{2} v_1 \quad (11.118)$$

Por lo tanto, en el caso estable, cuando

$$\frac{3}{2} v_1 < U < v_1 + c_{g1} \quad (11.119)$$

¹² Obsérvese que la condición que el denominador sea positivo es una generalización de la condición de estabilidad (11.98) que obtuvimos a partir de la forma linealizada de las (11.87).

(donde $c_{g1} = (g_z h_1)^{1/2}$) el denominador no cambia de signo al variar h de h_1 a h_2 , y dh/dX es siempre negativo. La (11.119) muestra que el frente de choque cinemático se mueve *más rápidamente* que la onda de orden más bajo en el flujo *delante* del frente (la onda cinemática, cuya velocidad es $3v_1/2$) pero *más lentamente* que las ondas de orden superior.

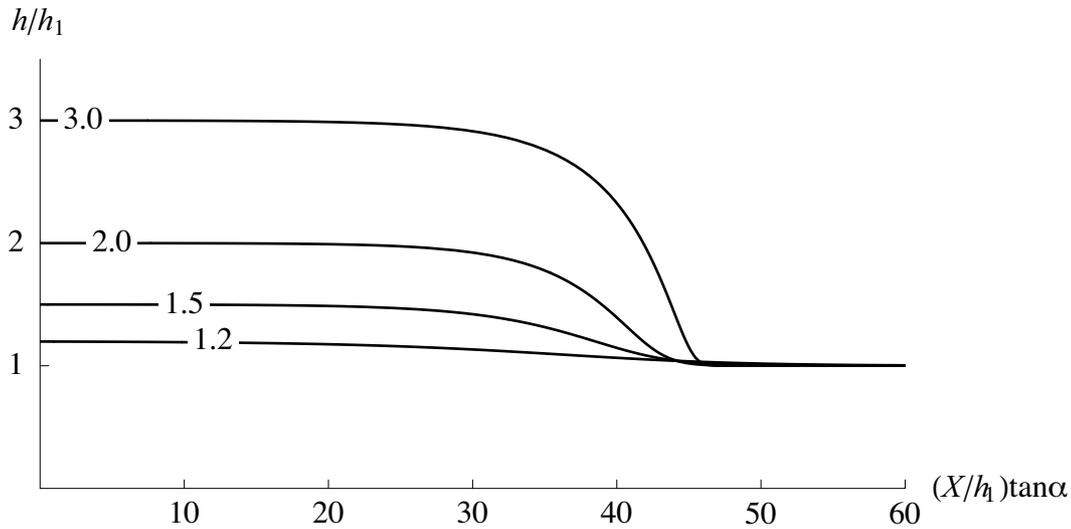


Fig. 11.12. Ondas monoclinales de creciente. Los perfiles se calcularon para $\kappa = 0.5$ y para los valores de h_2/h_1 que se indican en las respectivas curvas.

Cuando se cumple la (11.119) podemos integrar la (11.115) partiendo desde $X = -\infty$ donde $h = h_2$ hasta x , y así construir la función $h(X)$. De esta manera¹³ se obtienen perfiles suaves como se muestra en la Fig. 11.12. Estas soluciones se denominan *ondas monoclinales*. Se puede ver que si κ es pequeño (como sucede en un río de llanura debido a la escasa pendiente) y h_2/h_1 no es demasiado grande, la región de transición donde ocurre la variación de h (el “espesor” del frente de choque) puede ser de varias decenas de km. Perfiles suaves como los de la Fig. 11.12 se obtienen para todo el rango de velocidades (11.119) del frente de choque.

De las (11.112) y (11.113) es fácil ver que para el rango de velocidades (11.119) se cumple

$$1 < \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{1/2} < G(\kappa) \equiv \frac{1 + [1 + 4\kappa^{1/2}]^{1/2}}{2\kappa^{1/2}} \quad (11.120)$$

Esta fórmula permite calcular el rango de valores de κ para los cuales se puede tener una onda de creciente monoclinal. Es fácil ver que G es una función decreciente de κ , y menor que la unidad para $\kappa > 4$. Por lo tanto para un curso de agua para el cual $\kappa > 4$ no existen soluciones de este tipo. El hecho que $h_2 > h_1$ para la onda monoclinal está de acuerdo con la tendencia a la ruptura de las ondas cinemáticas, pues $c'(h) > 0$ para las ondas de creciente.

¹³ En la práctica conviene obtener $X(h)$ integrando dX/dh , que se expresa en términos de h y de las constantes del problema, y luego invertir gráficamente el resultado. Es posible dar la expresión de $X(h)$ en forma cerrada, pero la fórmula, que involucra varias funciones logarítmicas, es muy complicada y poco transparente, por eso no la reproducimos aquí.

Soluciones discontinuas en la teoría de aguas poco profundas: las condiciones de salto hidráulico

Cuando

$$v_1 + c_{g1} < U < v_2 + c_{g2} \tag{11.121}$$

se viola la condición (11.120). Esto ocurre cuando $h_2/h_1 > G(\kappa)^2$. En estos casos el denominador de la (11.115) cambia de signo para algún valor de h entre h_2 y h_1 . Debido a esto la curva integral $h(X)$ vuelve sobre sí misma (Fig. 11.13) y no se puede obtener un perfil continuo univaluado.

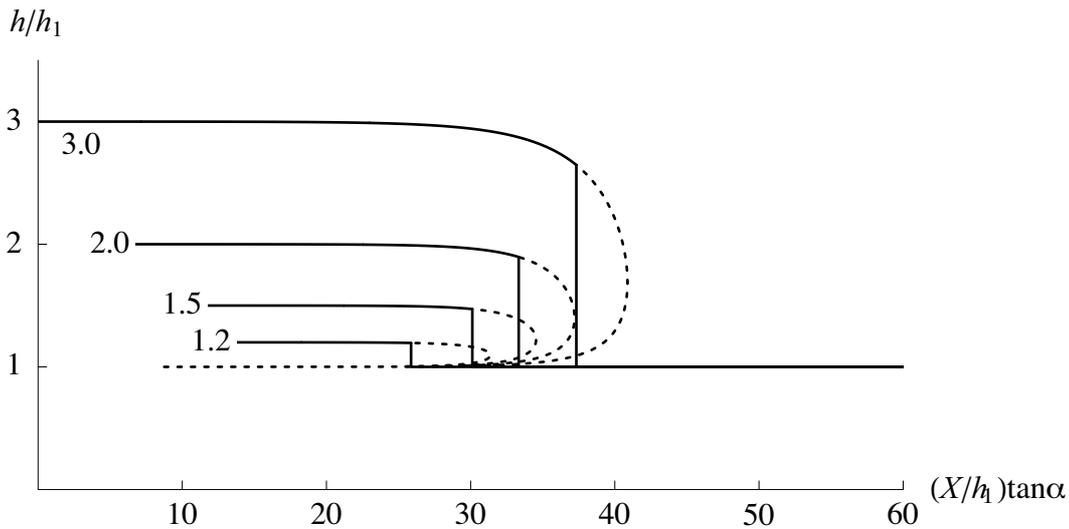


Fig. 11.13. Cuando $h_2/h_1 > G(\kappa)^2$ no se pueden obtener soluciones del tipo monoclinas como las de la Fig. 11.12, pues la curva integral $h(X)$ vuelve sobre sí misma dando lugar a soluciones multivaluadas. En estos casos las soluciones son *discontinuas* (representadas por las líneas llenas) y presentan saltos hidráulicos. Los cálculos se hicieron para $\kappa = 4$ y los valores de h_2/h_1 indicados sobre las respectivas curvas.

Claramente la dificultad proviene de que la teoría hidráulica (ecs. (11.87)) es *aún insuficiente* y se deberían aportar *ulteriores mejoras* a la misma, introduciendo nuevos efectos, de orden superior a los que incluimos en las (11.87). Sin embargo cuando aparecen dificultades de esta índole, en la mayoría de los problemas de estructura de un frente de choque es usual introducir una adecuada discontinuidad, para evitar así las complicaciones que trae aparejado formular una teoría mejor. Es razonable proceder así, *siempre y cuando la discontinuidad* que se va a introducir *se obtenga a partir de una forma integrada válida de las ecuaciones básicas*. Eso es lo que ocurre en nuestro caso, y ahora se aprecia la utilidad de escribir las ecuaciones básicas en forma conservativa, pues las (11.80) y (11.81) siguen valiendo aunque la solución sea discontinua. Siguiendo el mismo procedimiento que usamos para deducir la condición de choque para las ondas cinemáticas, si la discontinuidad ocurre para $x = x_d(t)$, podemos deducir a partir de las (11.80) y (11.81) las condiciones

$$\begin{aligned} -u_d[h] + [hv] &= 0 \\ -u_d[hv] + \left[hv^2 + \frac{1}{2} g_z h^2 \right] &= 0 \end{aligned} \tag{11.122}$$

donde $u_d = \dot{x}_d$ es la velocidad de la discontinuidad. Se debe notar que la contribución del miembro derecho de la (11.81) se anula en el límite $x_2, x_1 \rightarrow x_d$. Las condiciones (11.122) acompañan a las ecuaciones (11.87), del mismo modo que para las ondas cinemáticas la (11.89) acompaña a las (11.88)¹⁴.

La discontinuidad descrita por las (11.122) es en realidad lo que en la teoría de olas en aguas poco profundas se denomina *salto hidráulico*. La rompiente de las olas en la playa y el resalto circular que se observa cuando el chorro del grifo cae en la bacha de fondo plano de la cocina son ejemplos de saltos hidráulicos. Conviene elaborar las condiciones (11.122) para llevarlas a una forma más cómoda para el uso. Para eso las escribimos en la forma

$$\begin{aligned} (v_+ - u_d)h_+ &= (v_- - u_d)h_- \\ (v_+ - u_d)h_+v_+ + \frac{1}{2}g_z h_+^2 &= (v_- - u_d)h_-v_- + \frac{1}{2}g_z h_-^2 \end{aligned} \quad (11.123)$$

donde los subcriptos + y - indican las cantidades delante ($x = x_d^+$) y detrás ($x = x_d^-$) de la discontinuidad, respectivamente. Usando la primera de ellas para eliminar v_+ y v_- en la segunda, esta última se puede escribir como

$$\left(\frac{h_-}{h_+}\right)^3 - (1 + 2F_+^2)\left(\frac{h_-}{h_+}\right) + 2F_+^2 = 0 \quad (11.124)$$

donde introdujimos el *número de Froude* del flujo *delante* de la discontinuidad (en el referencial del frente de choque), definido por

$$F_+ \equiv \frac{v_+ - u_d}{c_{g+}}, \quad c_{g+} = \sqrt{g_z h_+} \quad (11.125)$$

Resolviendo la (11.124) se obtiene

$$\frac{h_-}{h_+} = \frac{\sqrt{1 + 8F_+^2} - 1}{2} \quad (11.126)$$

y la primera condición queda

$$\frac{v_+ - u_d}{v_- - u_d} = \frac{\sqrt{1 + 8F_+^2} - 1}{2} \quad (11.127)$$

En general, el número de Froude de un flujo cuya velocidad es v se define como

$$F \equiv \frac{v}{c_g} \quad (11.128)$$

¹⁴ Es importante tener cuidado de asociar correctamente las ecuaciones y las correspondientes condiciones de choque en cada nivel de la descripción. Al cambiar el nivel de la descripción cambia el número de ecuaciones y de condiciones de choque.

donde c_g es el valor local de la velocidad de las ondas de gravedad de pequeña amplitud en la aproximación de aguas poco profundas. Cuando $F < 1$, la velocidad del flujo es menor que la velocidad de las ondas de gravedad, por lo tanto éstas pueden remontar la corriente; en este caso se dice que el flujo es *subcrítico*. Cuando $F > 1$, la velocidad del flujo es mayor que la velocidad de las ondas de gravedad, por lo tanto éstas no pueden remontar la corriente, y se dice que el flujo es *supercrítico*.

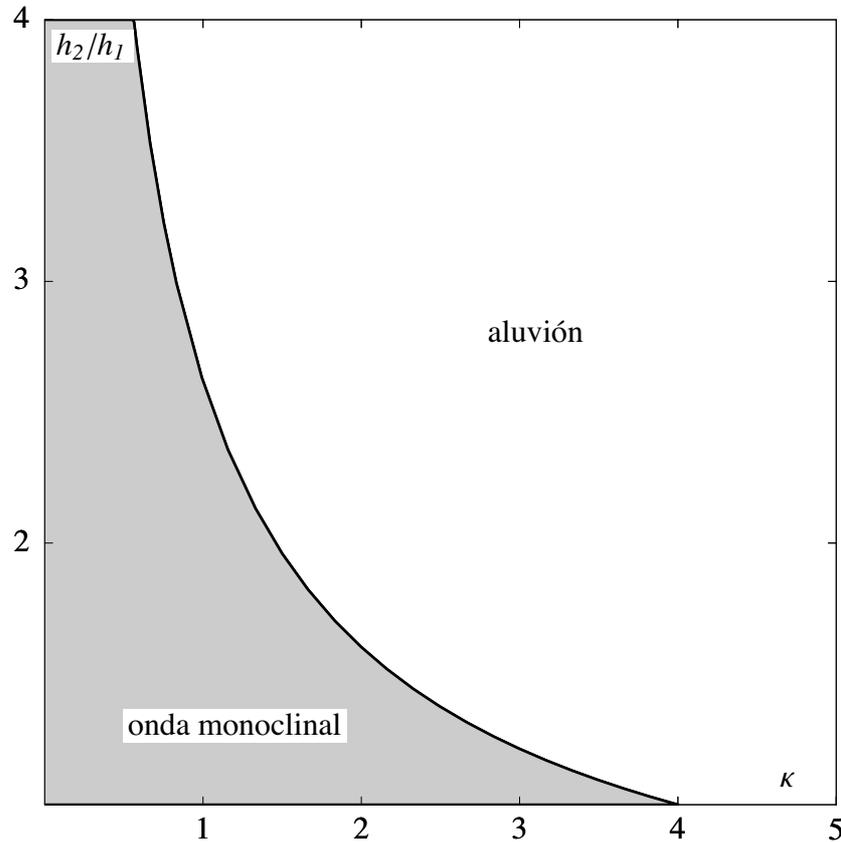


Fig. 11.14. Representación gráfica de la condición $h_2/h_1 < G(\kappa)^2$. Cuando esta condición se cumple (zona gris del diagrama) la onda de creciente es del tipo monoclinal (como las que se muestran en la fig. 11.12). Cuando la condición no se cumple la onda de creciente es un aluvión (como los que se muestran en la Fig. 11.13), que se presenta como un salto hidráulico que llega sin ser precedido por ninguna señal hidráulica.

Soluciones discontinuas de orden superior para crecientes: aluviones

Volviendo al presente contexto, el problema es introducir una discontinuidad que satisface las (11.122) en nuestro perfil viajero, solución de las (11.110). Claramente, la velocidad de la discontinuidad debe ser también U . En vista de la (11.111), cualquier discontinuidad entre las ramas del perfil cumple automáticamente con la primera de las condiciones (11.122), *incluyendo* las líneas $h = h_1$ y $h = h_2$ (que son también soluciones de la (11.115)). La segunda condición determina la posición de la discontinuidad. Ahora bien, si nos ubicamos en el sistema de referencia de la discontinuidad, la velocidad del flujo delante de la misma es $v_+ - U$, y se tiene $F_+ > 1$, luego este flujo es supercrítico. Por lo tanto las ondas de gravedad no pueden remontar la corriente, y en consecuencia ninguna señal hidráulica que de aviso de la presencia de la discon-

tinuidad se transmite hacia adelante de la misma. Luego es razonable suponer que la solución *delante del salto hidráulico* sea simplemente

$$h = h_1 \quad , \quad x > x_d \quad (11.129)$$

Luego, la (11.126) nos dice que

$$h_- = h_1 \frac{\sqrt{1 + 8F_1^2} - 1}{2} \quad , \quad F_1 \equiv \frac{v_1 - U}{c_{g1}} \quad (11.130)$$

Este valor de h_- se encuentra sobre la rama superior de la curva integral $h(X)$, antes del punto en que vuelve sobre sí misma (ver Fig. 11.13), y es fácil verificar que es menor que h_2 , siempre y cuando $h_2/h_1 > G(\kappa)^2$.

Conclusiones

Podemos finalmente concluir que la discontinuidad original de la teoría cinemática (basada en las ecs. (11.88) y (11.89)) se resuelve mediante la teoría hidráulica más detallada (ecs. (11.87)) en el perfil suave de la *onda monoclonal*, siempre y cuando se cumpla la condición (11.119) (o, en forma equivalente, que $h_2/h_1 < G(\kappa)^2$ o que $F_1 < 1$). Cuando no se cumple esa condición (o sea si $h_2/h_1 > G(\kappa)^2$ y entonces $F_1 > 1$) queda parte de la discontinuidad, en forma de un salto hidráulico, y la solución representa un *aluvión* (Fig. 11.14).

La ecuación de Korteweg-de Vries para las ondas dispersivas no lineales en un canal

Las principales características de las ondas dispersivas no lineales se pueden obtener estudiando las soluciones de la ecuación de Korteweg-de Vries (11.19), que describe aproximadamente la propagación de perturbaciones de amplitud finita, pero no muy grande, en aguas de profundidad h_0 , también no demasiado grande. Como paso previo a ese estudio vamos a deducir la ec. (11.19), para que el lector aprecie las aproximaciones de la teoría y sus límites de validez.

Consideremos un canal horizontal que contiene agua, cuya profundidad en reposo es h_0 (Fig. 11.15). Sean x y z la coordenadas a lo largo del canal y vertical, respectivamente; $z = 0$ corresponde al fondo del canal. Veamos si podemos encontrar perturbaciones de amplitud finita de la superficie que se propagan sin cambio de forma, como la onda solitaria que observó Scott Russell. Supondremos que la perturbación no depende de la coordenada transversal al canal. Por lo tanto, buscaremos soluciones de la forma

$$h(x,t) = h_0 + \zeta(x,t) \quad \text{con} \quad \zeta = a\varphi(x-ct) \quad , \quad a, c = \text{cte.} \quad (11.131)$$

Para fijar ideas vamos a suponer que $c > 0$, de modo que la onda se propaga hacia la derecha. Estudiaremos el movimiento del agua desde el referencial ($x' = x - ct$, z) que se mueve con la velocidad de la onda. En ese referencial, el perfil de la onda solitaria es constante en el tiempo, y está dado por

$$h(x') \quad \text{con} \quad h(|x'| \rightarrow \infty) = h_0 \quad (11.132)$$

En el referencial móvil tenemos un flujo *estacionario*, cuya velocidad es $-ce_x$ lejos de donde está localizada la perturbación. Vamos a suponer que el flujo es incompresible y no viscoso, y que la presión sobre la superficie libre es constante. Estas hipótesis son suficientes para determinar completamente el flujo, como mostraremos ahora.

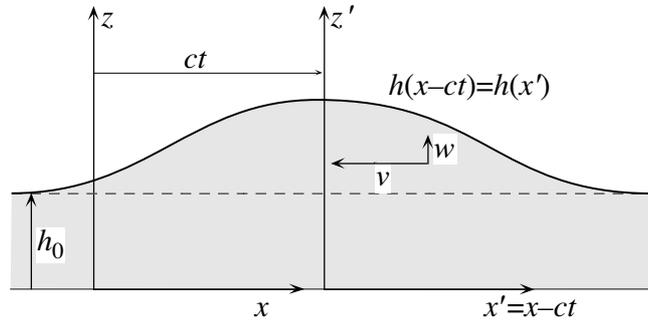


Fig. 11.15. Onda solitaria en un canal, vista desde el referencial fijo y el referencial de la onda.

Sean $v(x', z)$ y $w(x', z)$ las componentes horizontal y vertical de la velocidad, respectivamente. La condición de incompresibilidad se escribe entonces como

$$\frac{\partial v}{\partial x'} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (11.133)$$

Puesto que no hay viscosidad el flujo debe ser irrotacional, por lo tanto

$$\frac{\partial w}{\partial x'} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (11.134)$$

Además, se debe cumplir que

$$v(|x'| \rightarrow \infty, z) = -c \quad , \quad w(|x'| \rightarrow \infty, z) = 0 \quad , \quad w(x', 0) = 0 \quad (11.135)$$

Las condiciones cinemáticas (11.133)-(11.135) determinan completamente el campo de velocidad en función del perfil $h(x')$ de la perturbación. En efecto, la solución de (11.133) y (11.134) con las condiciones de contorno (11.135) se puede obtener en forma iterativa en términos de $h(x')$ y sus derivadas h', h'', \dots respecto de x' . Para hacerlo, observamos que si el agua no es muy profunda y si h no difiere demasiado de h_0 , la componente horizontal de la velocidad vale aproximadamente

$$v \approx v_0 = -\frac{ch_0}{h(x')} \quad (11.136)$$

si usamos esta aproximación en la (11.134) resulta $\partial w / \partial x' = 0$, y puesto que por la (11.135) w es nula en el infinito se deduce que en primera aproximación

$$w \approx 0 \quad (11.137)$$

Usando este resultado, obtenemos de la (11.133) que:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial v}{\partial x'} \approx -\frac{\partial}{\partial x'} \left(-\frac{ch_0}{h} \right) = -\frac{ch_0 h'}{h^2} \quad (11.138)$$

por lo tanto, en segunda aproximación

$$w \approx w_1 = -\frac{ch_0 h' z}{h^2} \quad (11.139)$$

puesto que $w(x', 0) = 0$. Usando ahora la (11.139) en la (11.134) se obtiene

$$\frac{\partial v}{\partial z} \approx \frac{\partial}{\partial x'} \left(-\frac{ch_0 h' z}{h^2} \right) = -ch_0 z \left(\frac{h''}{h^2} - 2\frac{h'}{h^3} \right) \quad (11.140)$$

Integrando esta expresión resulta

$$v \approx v_0 + v_1 = -\frac{ch_0}{h} - \frac{ch_0 z^2}{2} \left(\frac{h''}{h^2} - 2\frac{h'}{h^3} \right) - ch_0 K(x') \quad (11.141)$$

La función $K(x')$ se determina requiriendo que

$$\begin{aligned} -ch_0 &= \int_0^{h(x')} v(x', z) dz = -ch_0 \int_0^{h(x')} \left(\frac{1}{h} + \frac{z^2}{2} \left(\frac{h''}{h^2} - 2\frac{h'}{h^3} \right) + K \right) dz \\ &= -ch_0 \left[1 + \frac{h^3}{6} \left(\frac{h''}{h^2} - 2\frac{h'}{h^3} \right) + Kh \right] \end{aligned} \quad (11.142)$$

Por lo tanto

$$K = -\frac{h^2}{6} \left(\frac{h''}{h^2} - 2\frac{h'}{h^3} \right) \quad (11.143)$$

y se obtiene finalmente

$$v \approx v_0 + v_1 = -ch_0 \left[\frac{1}{h} + \frac{1}{2} \left(\frac{h''}{h^2} - 2\frac{h'}{h^3} \right) \left(z^2 - \frac{1}{3} h^2 \right) \right] \quad (11.144)$$

Si continuáramos el proceso de iteración, obtendríamos expresiones de u y w en forma de series cuyos términos son funciones de h , h' , h'' , h''' , ..., etc.. Sin embargo, las aproximaciones (11.139) y (11.144) son suficientes para obtener la ecuación de Korteweg-de Vries.

Una vez que se ha tomado en cuenta la cinemática y se han determinado u y w , podemos introducir la dinámica y así obtener la ecuación diferencial para h . Para este fin usamos el teorema de Bernoulli, que para un flujo estacionario e irrotacional establece que

$$\Phi(x', z) = \frac{1}{2}(v^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gz = \text{cte.} \quad (11.145)$$

Puesto que la presión es constante sobre la superficie libre $z = h$, tenemos que

$$\frac{d}{dx'} \Phi[x', h(x')] = v \frac{dv}{dx'} + w \frac{dw}{dx'} + gh' = 0 \quad (11.146)$$

donde u , w y sus derivadas se deben evaluar en x' , $h(x')$.

Ahora vamos a investigar la magnitud de los diferentes términos que figuran en la (11.146). Para este propósito conviene escribir

$$h = h_0(1 + \varepsilon) \quad , \quad \varepsilon = \varepsilon(x') \quad (11.147)$$

e introducir la variable adimensional ξ definida por

$$\xi' = x' / \ell \quad (11.148)$$

donde la escala ℓ es la longitud horizontal característica de la perturbación. Entonces

$$h' = h_0 \varepsilon' = \alpha \frac{d\varepsilon}{d\xi'} \quad , \quad \alpha = \frac{h_0}{\ell} \quad (11.149)$$

y para perturbaciones suficientemente suaves se tiene que

$$O(\varepsilon) = O\left(\frac{d\varepsilon}{d\xi'}\right) = O\left(\frac{d^2\varepsilon}{d\xi'^2}\right) = \dots \quad (11.150)$$

Vamos a suponer que α y ε son cantidades pequeñas en comparación con la unidad. Entonces, usando las (11.147)-(11.150) podemos escribir la (11.139) y la (11.144) como

$$\begin{aligned} w &= -c\alpha \frac{d\varepsilon}{d\xi'} + \dots \\ v &= -c \left[1 - \varepsilon + \frac{1}{3}\alpha^2 \frac{d^2\varepsilon}{d\xi'^2} \right] + \dots \end{aligned} \quad (11.151)$$

donde los ... indican términos de orden superior en α y ε . Diferenciando $w(x', h)$ y $u(x', h)$ dados por (11.139) y (11.144) respecto de x' , y usando las (11.147)-(11.150) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx'} &= -\frac{c}{\ell} \alpha \frac{d^2\varepsilon}{d\xi'^2} + \dots \\ \frac{dv}{dx'} &= -\frac{c}{\ell} \left[-\frac{d\varepsilon}{d\xi'} (1 - 2\varepsilon) + \frac{1}{3}\alpha^2 \frac{d^3\varepsilon}{d\xi'^3} \right] + \dots \end{aligned} \quad (11.152)$$

Finalmente, sustituyendo las (11.151) y (11.152) en la (11.146) y usando la (11.149) resulta

$$0 = \left(\frac{gh_0}{c^2} - 1 \right) \frac{d\varepsilon}{d\xi'} + 3\varepsilon \frac{d\varepsilon}{d\xi'} + \frac{1}{3}\alpha^2 \frac{d^3\varepsilon}{d\xi'^3} + \dots \quad (11.153)$$

Se puede observar que para deducir los términos de la (11.153) hasta el orden de $\alpha^2\varepsilon$ es suficiente conocer las aproximaciones de orden cero de v y de w y dw/dx' (estas dos últimas son nulas), pero las aproximaciones siguientes ($v_0 + v_1$ y w_1) se necesitan para calcular dv/dx' al orden $\alpha^2\varepsilon$. Se puede también verificar fácilmente que las aproximaciones involucradas en

nuestra deducción de la (11.153), o sea $w = w_1$, $v = v_0 + v_1$, satisfacen a la (11.133) hasta términos del orden de $\alpha\varepsilon^2$, mientras que la (11.134) se satisface en forma exacta.

Asimismo, es oportuno señalar que si la perturbación es periódica en x' , o sea, consiste de una sucesión de crestas y valles, la deducción se puede llevar adelante del mismo modo. En este caso podemos suponer que h_0 es la altura del agua en la posición del fondo de los valles. Hay una sutileza en esto, porque las condiciones (11.133) y (11.134) determinan v a menos de una constante aditiva, pues la condición que el fluido al infinito está en reposo, que permite completar la determinación de v , no se cumple cuando la perturbación es periódica. Sin embargo, en este caso es razonable suponer que $v_0 = -ch_m/h$, donde h_m tiene un valor intermedio entre h_0 y la altura de las crestas, y por lo tanto $h_m/h_0 = 1 + \varepsilon_m$ donde ε_m es una constante del orden de ε . Entonces podemos repetir el procedimiento anterior desde la (11.136) hasta la (11.153), y la única diferencia que resulta es un término adicional de la forma (cte.) $\times d\varepsilon/d\xi'$, con (cte.) = $O(\varepsilon_m)$. Por consiguiente podemos usar la ec. (11.153), con tal de reemplazar ε por $\varepsilon' = \varepsilon + (\text{cte.})$. En conclusión, la ec (11.153) vale también para perturbaciones periódicas, pero en ese caso ε se conoce a menos de una constante aditiva. Veremos más adelante cómo se determina esa constante.

Usando la (11.150) es fácil ver que las razones entre los tres términos de la (11.153) son del orden de

$$(gh_0/c^2 - 1) : \varepsilon : \alpha^2 \quad (11.154)$$

Claramente, cuando tanto ε como α tienden a 0, o sea cuando la amplitud de la perturbación es infinitesimal respecto de la profundidad y la profundidad es infinitesimal en comparación con ℓ , la solución no trivial de la (11.153) es

$$\varepsilon(\xi') \text{ cualquiera} \quad , \quad c^2 = c_0^2 \equiv gh_0 \quad (11.155)$$

Este resultado expresa el hecho ya conocido (ver Capítulo 9) que las perturbaciones infinitesimales en aguas poco profundas se propagan sin dispersión con la velocidad c_0 .

Más en general, si ε y α son finitos pero ambos pequeños, la diferencia $c_0^2 - c^2$ debe ser también una cantidad pequeña, del orden de ε o de α^2 . Entonces podemos escribir

$$(gh_0/c^2 - 1) = (c_0^2 - c^2)/c^2 = 2(1 - c/c_0) + \dots \quad (11.156)$$

Introduciendo esta expresión en la (11.153) y despreciando términos de orden superior resulta

$$\left(1 - \frac{c}{c_0} + \frac{3}{2}\varepsilon\right) \frac{d\varepsilon}{d\xi'} + \frac{1}{6}\alpha^2 \frac{d^3\varepsilon}{d\xi'^3} = 0 \quad (11.157)$$

Esta es la ecuación de Korteweg-de Vries, escrita en el referencial de la onda. En el referencial fijo la (11.157) toma la forma

$$\frac{c}{c_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon\right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + \frac{1}{6}\alpha^2 \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial \xi^3} = 0 \quad (11.158)$$

con

$$\xi = x/\ell \quad , \quad \tau = ct/\ell \quad (11.159)$$

La (11.158) es la forma que aparece generalmente en la literatura. Volviendo ahora a las variables con dimensiones, la (11.158) se escribe como

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\xi}{h_0} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{6} c_0 h_0^2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} = 0 \quad , \quad \xi = h - h_0 \quad (11.160)$$

que coincide con la ec. (11.19), ya mencionada al comienzo de esta Capítulo.

Para entender el significado de los distintos términos de la (11.158) podemos observar que si ξ es infinitesimal, los términos significativos de la (11.160) dan

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{6} c_0 h_0^2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} = 0 \quad (11.161)$$

Esta ecuación admite soluciones de la forma

$$\xi = A \cos[k(x - ct)] \quad , \quad A, k = \text{cte.} \quad (11.162)$$

con

$$c = c_0 \left(1 - \frac{1}{6} k^2 h_0^2 \right) \quad (11.163)$$

La ec. (11.163) expresa la primera corrección dispersiva para ondas de amplitud infinitesimal, cuando h_0 no es despreciable frente a la longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$, como el lector puede verificar fácilmente a partir de la relación de dispersión (9.45). Por lo tanto, el término

$$\frac{1}{6} \alpha^2 \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial \xi^3} \quad (11.164)$$

de la (11.158) describe los efectos dispersivos al orden más bajo en α .

Si en cambio α es despreciable, esto es, si h_0 es despreciable frente a la escala horizontal ℓ de la perturbación, la (11.160) se reduce a

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\xi}{h_0} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad (11.165)$$

que es una ecuación hiperbólica no lineal del tipo (11.6) en la cual la velocidad de propagación es

$$c(\xi) = c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\xi}{h_0} \right) \quad (11.166)$$

Por lo tanto el término

$$\frac{3}{2} \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \quad (11.167)$$

de la (11.158) describe al orden más bajo en ε los efectos no lineales que conducen a distorsión y la ruptura de la onda. Vemos pues que la ecuación de Korteweg-de Vries describe los efectos combinados de la dispersión y la no linealidad al orden más bajo significativo. Si se deseara, se podrían obtener ecuaciones más exactas continuando el proceso de iteración para obtener mejores aproximaciones de v y w , y en consecuencia introduciendo términos de orden superior en la (11.158).

Soluciones periódicas y aperiódicas de la ecuación de Korteweg-de Vries

Vamos a partir de la ecuación de Korteweg-de Vries escrita en el referencial de la onda

$$\left(1 - \frac{c}{c_0} + \frac{3}{2} \frac{\xi}{h_0}\right) \frac{d\xi}{dx'} + \frac{1}{6} h_0^2 \frac{d^3\xi}{dx'^3} = 0 \quad (11.168)$$

que es la (11.157) escrita en términos de las variables con dimensiones. Podemos obtener de inmediato una primera integral de la (11.168) como

$$\frac{2}{3} h_0^2 \frac{d^2\xi}{dx'^2} = A + 4 \left(\frac{c}{c_0} - 1\right) \xi - 3 \frac{1}{h_0} \xi^2, \quad A = \text{cte.} \quad (11.169)$$

El miembro derecho de la (11.169) se puede escribir como $-dV/d\xi$ si definimos

$$V(\xi) = B - A\xi - 2 \left(\frac{c}{c_0} - 1\right) \xi^2 + \frac{1}{h_0} \xi^3, \quad B = \text{cte.} \quad (11.170)$$

de modo que la (11.169) toma la forma

$$\frac{2}{3} h_0^2 \frac{d^2\xi}{dx'^2} = -\frac{dV}{d\xi} \quad (11.171)$$

Se puede observar que esta ecuación es *formalmente equivalente* a la ecuación que describe el movimiento unidimensional de una partícula bajo la acción de una fuerza que deriva de una energía potencial V , si interpretamos ξ como la “coordenada” de la partícula, x' como el “tiempo” y $2h_0^2/3$ como la “masa” de la partícula:

$$\xi \leftrightarrow X, \quad x' \leftrightarrow T, \quad \frac{2}{3} h_0^2 \leftrightarrow M \quad (11.172)$$

de modo que se puede establecer la correspondencia

$$\frac{2}{3} h_0^2 \frac{d^2\xi}{dx'^2} = -\frac{dV}{d\xi} \Leftrightarrow M \frac{d^2X}{dT^2} = -\frac{dV}{dX} \quad (11.173)$$

Prosiguiendo con esta analogía podemos establecer la correspondencia

$$\frac{1}{3} h_0^2 \left(\frac{d\xi}{dx'}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} M \left(\frac{dX}{dT}\right)^2 = K \quad (11.174)$$

donde K es la energía cinética del movimiento equivalente.

Puesto que en el movimiento equivalente se conserva la energía mecánica $E = K + V$, es evidente que la (11.171) tiene una integral primera, que usando las correspondencias (11.172)-(11.174) podemos expresar como

$$K + V = E \Leftrightarrow \frac{1}{3}h_0^2\left(\frac{d\xi}{dx'}\right)^2 + B - A\xi - 2\left(\frac{c}{c_0} - 1\right)\xi^2 + \frac{1}{h_0}\xi^3 = E, \quad E = \text{cte.} \quad (11.175)$$

Como la constante B es arbitraria, podemos poner $E = 0$ sin pérdida de generalidad, de modo que

$$\frac{1}{3}h_0^2\left(\frac{d\xi}{dx'}\right)^2 + B - A\xi - 2\left(\frac{c}{c_0} - 1\right)\xi^2 + \frac{1}{h_0}\xi^3 = 0 \quad (11.176)$$

En la Fig. 11.16 hemos representado $V(\xi)$. Puesto que ξ debe ser acotado, las tres raíces ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 de $V(\xi) = 0$ deben ser reales. Es evidente también que las variaciones de ξ deben estar comprendidas entre los puntos de retorno ξ_2 y ξ_3 :

$$\xi_2 \leq \xi \leq \xi_3 \quad (11.177)$$

Es obvio que podemos siempre redefinir ξ (o, lo que es lo mismo, h_0) de modo que $\xi_2 = 0$. Esto equivale a poner $B = 0$ en la (11.176). Entonces queda

$$\frac{1}{3}h_0^2\left(\frac{d\xi}{dx'}\right)^2 = \xi \left[A + 2\left(\frac{c}{c_0} - 1\right)\xi - \frac{1}{h_0}\xi^2 \right] = \frac{1}{h_0}\xi(\xi - \xi_3)(\xi_1 - \xi) \quad (11.178)$$

que podemos escribir en la forma

$$\frac{1}{3}h_0^3\left(\frac{d\xi}{dx'}\right)^2 = \xi(\xi - a)(a - b - \xi) \quad (11.179)$$

donde

$$\begin{aligned} \xi_3 &= a = h_0 \left[c/c_0 - 1 + \sqrt{(c/c_0 - 1)^2 + A/h_0} \right] \\ \xi_1 &= a - b = h_0 \left[c/c_0 - 1 - \sqrt{(c/c_0 - 1)^2 + A/h_0} \right] \end{aligned} \quad (11.180)$$

Remitiéndonos a la Fig. 11.16, el movimiento unidimensional equivalente es una oscilación $X(T)$ entre los puntos de retorno $X_2 = 0$ y $X_3 = \xi_3$. Esto quiere decir que a medida que x' varía, ξ oscila entre 0 y a . Luego a es el doble de la amplitud de la oscilación. La velocidad c de la perturbación se puede obtener de las (11.180) en términos de a y b :

$$c = c_0 \left(1 + \frac{2a - b}{2h_0} \right) \quad (11.181)$$

Si $a \rightarrow 0$ esta ecuación nos da $c = c_0(1 - b/2h_0)$; comparando este resultado con la relación de dispersión (11.163) de las ondas de amplitud infinitesimal, encontramos que

$$b = \frac{1}{3} k^2 h_0^2 \quad (11.182)$$

y en este caso c no depende de la amplitud de la perturbación. Por lo tanto podemos interpretar que b describe los efectos dispersivos sobre c .

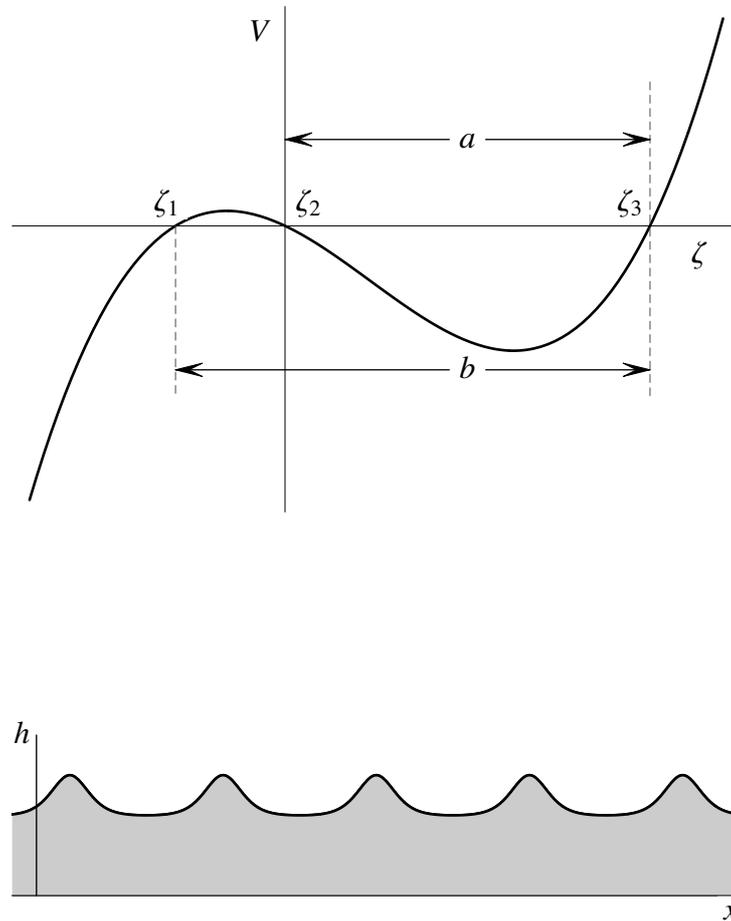


Fig. 11.16. Soluciones periódicas de la ecuación de Korteweg-de Vries: las ondas cnoidales.

En general, sin embargo, cuando la amplitud es finita, la relación de dispersión está dada por la (11.181) y la velocidad de la onda *depende de la amplitud*. Esas ondas consisten de oscilaciones periódicas de $\zeta(x)$. Su expresión explícita se obtiene integrando la (11.179) y es

$$\zeta = a \operatorname{cn}^2[(3a/4h_0^3)^{1/2}(x - ct) | a/b] \quad (11.183)$$

donde $\operatorname{cn}(u | m)$ es la *función elíptica de Jacobi* cn , de argumento u y parámetro m ($0 \leq m \leq 1$). Las ondas dadas por la (11.183) son las *ondas cnoidales*, así llamadas porque se expresan en términos de la función cn . El período espacial de las oscilaciones, o sea su longitud de onda, se obtiene de la (11.177) como

$$\lambda = \frac{2h_0^{3/2}}{\sqrt{3}} \int_0^a \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta - a)(a - b - \zeta)}} = \frac{4h_0^{3/2}}{\sqrt{3b}} K(a/b) \quad (11.184)$$

donde $K(m = a/b)$ es la *integral elíptica completa de primera especie*. Se puede ver que $K(0) = \pi/2$ y que $K(m)$ es una función creciente de m que tiende a infinito cuando $m \rightarrow 1$ (ver Fig. 11.15). En el límite $a \rightarrow 0$ las ondas cnoidales coinciden con las ondas armónicas dispersivas de amplitud infinitesimal. Para a/b pequeño, su perfil es semejante al de una onda sinusoidal, pero a medida que a crece las crestas tienden a estrecharse y los valles a ensancharse, y la longitud de onda aumenta.

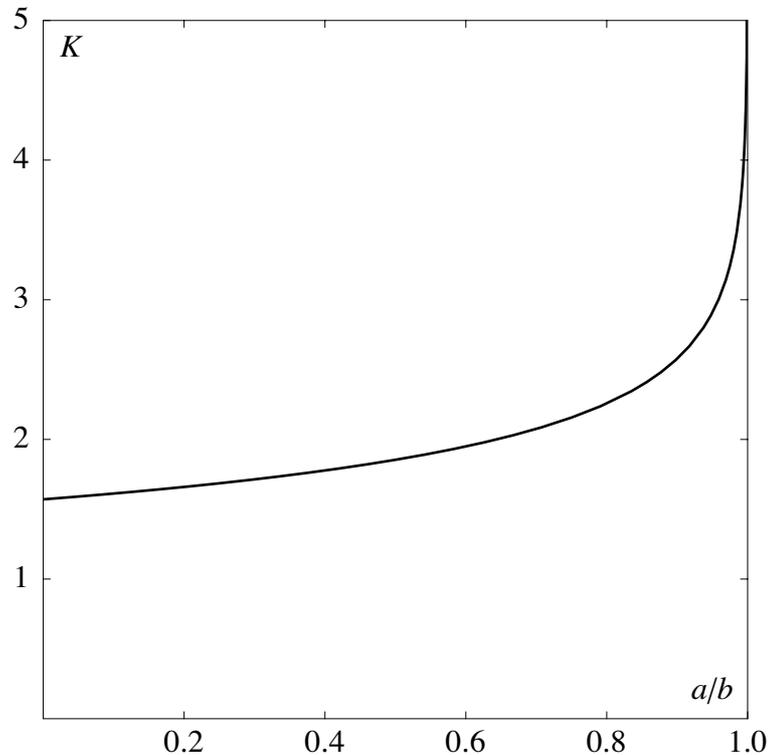


Fig. 11.17. Comportamiento de la integral elíptica completa de primera especie $K(a/b)$, que es proporcional a la longitud de onda de las ondas cnoidales. Se puede ver que en el límite $m \rightarrow 1$ se tiene una solución aperiódica (la onda solitaria).

En el límite $a = b$ (cuando $A = 0$) el movimiento unidimensional equivalente es *aperiódico* (ver la Fig. 11.18), pues $dX/dT \rightarrow 0$ cuando $X \rightarrow 0$. La ec. (11.179) se reduce entonces a

$$\frac{1}{3}h_0^3 \left(\frac{d\xi}{dx'} \right)^2 = \xi^2(a - \xi) \quad (11.185)$$

y su solución es una perturbación con una única cresta (Fig.11.18). Está claro de la (11.185) que ξ aumenta desde 0 para $x = -\infty$ hasta el máximo $\xi = a$ y luego decrece nuevamente a 0 para $x = +\infty$. Esta solución es la *onda solitaria* de Scott Russell. Su velocidad de propagación se obtiene de la (11.181) y vale

$$c = c_s \equiv c_0 \left(1 + \frac{a}{2h_0} \right) \quad (11.186)$$

Como se puede apreciar, c depende de la amplitud.

El perfil de la onda solitaria se obtiene integrando la (11.185), o también tomando el límite $a \rightarrow b$ en la (11.183). Es fácil verificar por sustitución directa que la solución de la (11.185) es

$$h = h_0 \{1 + a \operatorname{sech}^2[(3a/4h_0^3)^{1/2}(x - ct)]\} \quad (11.187)$$

A partir de esta expresión se puede obtener el campo de velocidad (v, w) usando las (11.144) y (11.139).

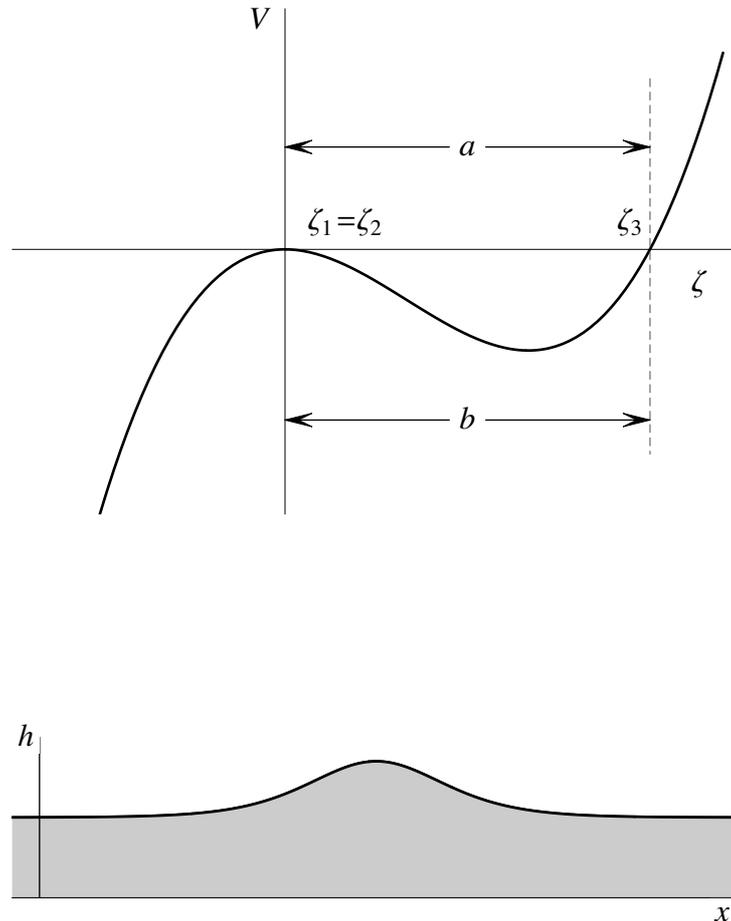


Fig. 11.18. Solución aperiódica de la ecuación de Korteweg-de Vries: la onda solitaria.

Se puede observar que las ondas cnoidales y la onda solitaria son soluciones de la ecuación de Korteweg-de Vries para todo valor de a y b , sólo restringidos por la condición

$$0 \leq a \leq b \quad (11.188)$$

Sin embargo, debemos recordar que la ecuación (11.160) vale solamente para a y b pequeños. En la práctica, cuando a es grande, la onda solitaria tiende a formar un pico agudo en el punto de máxima altura. Las observaciones indican que esto ocurre cuando $a \approx 0.7h_0$.

La onda solitaria es un fenómeno estrictamente no lineal en el cual se combinan los efectos de la no linealidad y de la dispersión. La tendencia no lineal al empinamiento del perfil de la onda compensa la tendencia al achatamiento debida a la dispersión, de modo tal que la forma de la onda no cambia.

Las ondas solitarias tienen varias propiedades curiosas, que no queremos dejar de comentar aunque en estas notas no podemos entrar en detalles. Ya mencionamos al comienzo de este Capítulo

una de ellas: que estas ondas conservan su individualidad cuando interactúan, y eventualmente emergen de la región de interacción conservando su forma y velocidad original. El hecho que la velocidad de propagación de la onda solitaria depende de la amplitud está relacionado con un resultado de la teoría de las *velocidades de grupo*, según el cual en un tren de ondas no lineales hay *más de una* velocidad de grupo. Esto tiene como consecuencia que una perturbación inicial arbitraria, consistente en un tren de ondas no uniforme, acaba eventualmente por *fragmentarse* al cabo de cierto tiempo, dando lugar a cierto número de *ondas solitarias*.

Conclusiones

En este Capítulo hemos presentado las nociones básicas de la propagación de ondas no lineales, tomando como ejemplos concretos las ondas de creciente para las ondas hiperbólicas no lineales y las soluciones de la ecuación de Korteweg-de Vries (las ondas cnoidales y la onda solitaria) para las ondas dispersivas no lineales. De esta forma hemos introducido las ideas fundamentales del método de las características, la ruptura de ondas y la formación y estructura de los frentes de choque para las primeras. Para las ondas dispersivas no lineales hemos mostrado que existen perturbaciones que se propagan sin cambio de forma, debido a que los efectos dispersivos y no lineales se compensan. Vimos que los efectos de la no linealidad se traducen en que la relación de dispersión depende de la amplitud de la perturbación, y que se forman así estructuras bien definidas (las ondas solitarias) que se propagan con una velocidad que depende de su amplitud. Los casos considerados fueron elegidos por ser los más simples en sus respectivas clases, pero las características que acabamos de mencionar son muy generales, y se encuentran en todo tipo de ondas no lineales, por lo tanto su interés trasciende del contexto particular en las hemos estado discutiendo.