

10. ONDAS EN EL SENO DE UN FLUIDO

Las ecuaciones de la dinámica de gases

Ya vimos en el Capítulo 1 que un fluido no opone resistencia a las deformaciones sin cambio de volumen. Por lo tanto, si una perturbación produce deformaciones que no involucran ni compresión ni dilatación, las únicas fuerzas restitutivas que pueden aparecer deben ser de origen externo, o bien fuerzas que se ejercen sobre la superficie libre de un líquido pero no en su seno¹. Este es el caso de las ondas de superficie que estudiamos en el Capítulo 9, en las cuales las fuerzas de restitución se deben a la gravedad y a la tensión superficial.

La situación es distinta cuando se consideran perturbaciones que producen cambios del volumen (o de la densidad) de los elementos del fluido, pues como vimos en el Capítulo 4, en este caso aparecen fuerzas restitutivas cuya magnitud está determinada por el módulo de compresión. Sabemos que el módulo de compresión depende de la ecuación de estado del fluido y del tipo del proceso (p. ej., si se realiza en forma adiabática o de otra forma), y que el módulo de compresión de los gases (en condiciones normales) es mucho menor que el de los líquidos, debido a lo cual los gases se comprimen más fácilmente.

Por consiguiente, para ser concretos vamos a tratar el caso de un gas, aunque el lector debe tener presente que los mismos argumentos se pueden aplicar también a un líquido, con tal de emplear en las ecuaciones el correspondiente módulo de compresión.

Vamos a suponer que el gas es *perfecto*, que no hay fuerzas externas y que en el estado no perturbado la presión p , la densidad ρ , y por lo tanto la temperatura T , son *uniformes* y el gas está en reposo². Supongamos que se perturba este estado de modo tal que la presión vale

$$p' = p + \delta p \quad (10.1)$$

donde δp es una función del espacio y del tiempo, por ahora no especificada. Por efecto de la compresibilidad del medio hay entonces una variación de densidad, que ahora vale $\rho' = \rho + \delta \rho$. Asimismo, en virtud de la ecuación de estado, también cambia la temperatura, de modo que $T' = T + \delta T$. De resultas de esta perturbación el gas no está en más equilibrio, pues hay gradientes de presión que van a provocar la aceleración de las parcelas del fluido, que se pondrán en movimiento con una velocidad $\mathbf{u}' = \delta \mathbf{u}$. El problema a resolver es determinar este movimiento.

Para este fin lo primero que tenemos que hacer es relacionar las variaciones de la densidad con las variaciones de la presión, para lo cual es preciso conocer el módulo de compresión, que depende de cómo se realiza el proceso de cambio de volumen de las parcelas del gas. Dado que la conductividad térmica de los gases es baja, y que (como veremos) las variaciones en cuestión son rápidas, es razonable *ignorar la conducción del calor* y por lo tanto suponer que las perturbaciones son adiabáticas, es decir que

$$p' \rho'^{-\gamma} = p \rho^{-\gamma} = \text{cte.} \quad (10.2)$$

¹ Las fuerzas de origen viscoso no son restitutivas pues no se oponen a la deformación sino a la *velocidad* con la cual ésta tiene lugar.

² No es difícil tratar el caso en que hay fuerzas externas, como la gravedad, pero por ahora no lo vamos a considerar.

donde γ es el coeficiente adiabático del gas, que ya introdujimos en el Capítulo 2. Diferenciando esta ecuación obtenemos:

$$dp' = \frac{\gamma p'}{\rho'} d\rho' = \frac{k'_S}{\rho'} d\rho' \quad (10.3)$$

que vincula las variaciones de presión con las variaciones de densidad. Reconocemos en esta ecuación al módulo de compresión adiabático que definimos en el Capítulo 4. Si queremos tratar el caso de un líquido en vez de un gas podemos seguir usando esta ecuación, y basta reemplazar k'_S por el correspondiente módulo de compresión.

Necesitamos ahora la ecuación del movimiento, para calcular el campo de velocidad producido por la variación de presión (10.3). Por ahora *vamos a ignorar los efectos de la viscosidad*, y por lo tanto usaremos la ecuación de Euler. Puesto que no hay fuerzas externas escribiremos

$$\frac{d\mathbf{u}'}{dt} = -\frac{\nabla p'}{\rho'} \quad (10.4)$$

Para completar el conjunto de ecuaciones que gobiernan el problema falta escribir la ecuación de conservación de la masa, que determina la variación de la densidad a partir del campo de velocidad:

$$\frac{1}{\rho'} \frac{d\rho'}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{u}' \quad (10.5)$$

El sistema de ecuaciones (10.3)-(10.5) junto con las condiciones iniciales, que aún no hemos especificado, determina por completo el problema.

Remarcamos que hasta ahora las únicas aproximaciones que hemos hecho consisten en suponer que el proceso es adiabático, que los efectos de la viscosidad son despreciables y que no hay fuerzas externas. Sin embargo, el problema de resolver nuestras ecuaciones es en general muy *difícil*, dado que se trata de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales y no lineales.

Perturbaciones compresivas de pequeña amplitud

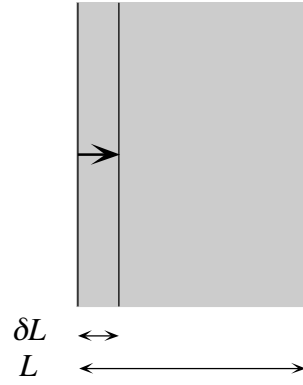
En el estado no perturbado el fluido está en reposo de modo que tendremos

$$p = \text{cte.} \quad , \quad \rho = \text{cte.} \quad , \quad \mathbf{u} = 0 \quad (10.6)$$

Trataremos ahora el caso de *pequeñas perturbaciones* de este estado. Es decir, si consideramos una porción de fluido de dimensión típica L (por ejemplo, una capa plana de espesor L , ver Fig. 10.1), la variación δL debida a la perturbación debe cumplir la condición

$$\delta L \ll L \quad (10.7)$$

Las variaciones de volumen que ocurren debido a la variación δL son también pequeñas, esto es $\delta V \ll V$ y entonces también se cumple que $\delta\rho \ll \rho$ y $\delta p \ll p$. Por lo tanto en la (10.3) podemos introducir δp y $\delta\rho$ en lugar de dp y $d\rho$.

Fig. 10.1. Compresión de una capa de fluido de espesor L .

Usando entonces las (10.1) y (10.6), la (10.3) se escribe

$$\delta p = \frac{\gamma(p + \delta p)}{\rho + \delta \rho} \delta \rho = \frac{\gamma p}{\rho} \left(1 + \frac{\delta p}{p}\right) \left(1 + \frac{\delta \rho}{\rho}\right)^{-1} \delta \rho \quad (10.8)$$

Despreciando $\delta p/p$ y $\delta \rho/\rho$ respecto de la unidad podemos entonces escribir

$$\delta p = c^2 \delta \rho \quad , \quad c = \sqrt{\frac{k_S}{\rho}} \quad , \quad \text{con } k_S = \gamma p \quad \text{para un gas} \quad (10.9)$$

donde hemos introducido la magnitud c , que depende de la naturaleza del medio y de su estado no perturbado; c tiene dimensiones de *velocidad*, y como veremos, juega un rol fundamental en nuestro problema. Corresponde aclarar que la (10.9) vale también para un líquido, con tal de reemplazar k_S por el correspondiente módulo de compresión. Por consiguiente todos los desarrollos que hagamos de ahora en más valen también para los líquidos.

Del mismo modo, despreciando $\delta \rho/\rho$ respecto de la unidad, la ecuación de Euler se escribe

$$\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} + (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} = - \frac{\nabla \delta p}{\rho} \quad (10.10)$$

El primer término del miembro izquierdo de esta ecuación es del orden de $\delta u/T \approx \delta u^2/\delta L$, puesto que T , el tiempo característico del fenómeno, es del orden de $T \approx \delta L/\delta u$. En cambio, el segundo término es del orden de $\delta u^2/L$, y en virtud de la (10.7) es despreciable frente al primero. Por lo tanto, la ecuación de Euler se reduce a

$$\frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} = - \frac{\nabla \delta p}{\rho} \quad (10.11)$$

Dado que $\delta u \approx \delta L/T$ y $\delta p \approx c^2 \delta \rho \approx \rho \delta L/L$, de la (10.11) obtenemos que $c \approx L/T$, y por lo tanto que $\delta u \ll c$. Es importante recordar estas relaciones: c es del orden del cociente entre la *extensión de la región perturbada* y T , mientras que δu es del orden del cociente entre la *amplitud del desplazamiento* debido a la perturbación y T .

Tomando el rotor de la (10.11) vemos que $\partial(\nabla \times \delta \mathbf{u}) / \partial t = 0$. Por consiguiente, si la perturbación se produjo en un fluido en reposo, tendremos que $\nabla \times \delta \mathbf{u} = 0$ y por lo tanto el campo de velocidad es potencial. Introducimos entonces el potencial de velocidad mediante

$$\delta \mathbf{u} = \nabla \phi \quad (10.12)$$

con lo cual la ecuación de Euler se escribe finalmente como

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\delta p}{\rho} \quad (10.13)$$

Nos queda por ver como se simplifica la ecuación de continuidad (10.5). Haciendo las mismas aproximaciones que para las ecuaciones precedentes se llega a

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = -\rho \nabla \cdot \delta \mathbf{u} = -\rho \nabla^2 \phi \quad (10.14)$$

Vemos pues que gracias a la hipótesis de perturbaciones pequeñas³ nuestro sistema de ecuaciones (10.3)-(10.5) se ha reducido a las tres ecuaciones (10.9), (10.13) y (10.14) que, a diferencia de las anteriores, son *lineales*. Por ese motivo la simplificación que llevamos a cabo se llama *linearización por pequeña amplitud*. Se trata del mismo tipo de simplificación que hicimos en el Capítulo 9 al tratar las ondas de superficie en líquidos, sólo que en ese caso la no linealidad residía en la condición de contorno sobre la superficie, y no como ahora en las ecuaciones.

Debe quedar claro para el lector que las simplificaciones que se consiguen mediante la linearización tienen un alto precio, pues eliminan del problema aspectos físicos fundamentales que (como veremos más adelante) dan lugar a consecuencias importantes, que se ponen de manifiesto cuando las perturbaciones tienen una amplitud *finita*. Entre ellas se cuentan la formación de picos agudos y la ruptura de las olas del mar, la formación de ondas de choque en gases y líquidos y otros interesantes fenómenos, que se denominan *no lineales* pues tienen su origen en la no linealidad del problema.

La ecuación de las ondas

Podemos reducir nuestro sistema de ecuaciones si usamos la (10.9) para eliminar δp de la ecuación de Euler:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} = -c^2 \delta \rho \quad (10.15)$$

Si ahora derivamos respecto del tiempo la (10.15) y usamos la (10.14) para eliminar $\delta \rho$ obtenemos finalmente una única ecuación para el potencial de velocidad:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \phi \quad (10.16)$$

Claramente, si se encuentra la solución ϕ de esta ecuación queda resuelto el problema, pues usando la (10.15) y la (10.9) podemos expresar $\delta \rho$ y δp en términos de ϕ como

³ Para ser más exacto deberíamos decir perturbaciones *infinitesimales*.

$$\delta\rho = -\frac{\rho}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t}, \quad \delta p = -\rho \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (10.17)$$

y el campo de velocidad se obtiene de la (10.12).

Es fácil ver, tomando el gradiente de la (10.16), que las componentes de $\delta\mathbf{u}$ también satisfacen la misma ecuación. Asimismo, vista la proporcionalidad (10.17) entre $\delta\rho$ y δp y $\partial\phi/\partial t$, es evidente que ambas variables dependientes también son soluciones de la ec. (10.16).

La ecuación que hemos obtenido (y las análogas para $\delta\rho$, δp y las componentes de $\delta\mathbf{u}$) pertenece a la familia de las *ecuaciones de onda*, y es una de las más simples puesto que es *escalar*.

La solución general de D'Alembert para pulsos sonoros planos

Consideremos la ecuación de ondas (10.16) en el caso plano, en el cual la perturbación depende solamente de la coordenada x . Podemos entonces escribir la (10.16) en la forma

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) \phi = 0 \quad (10.18)$$

Si introducimos las nuevas variables

$$\xi_+ = x - ct, \quad \xi_- = x + ct \quad (10.19)$$

la ec. (10.18) se escribe como

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi_+ \partial\xi_-} = 0 \quad (10.20)$$

Esta ecuación se puede integrar de inmediato para obtener la *solución general de D'Alembert* en la forma

$$\phi = \phi_+(\xi_+) + \phi_-(\xi_-) = \phi_+(x - ct) + \phi_-(x + ct) \quad (10.21)$$

Por lo tanto, la solución general es la superposición de dos ondas, una de las cuales tiene una forma descrita por la función ϕ_+ y se propaga hacia la *derecha* sin distorsionarse con la velocidad c , y la otra tiene una forma descrita por la función ϕ_- y se propaga hacia la *izquierda* sin distorsión con la velocidad c . Por este motivo c se denomina *velocidad del sonido*. Las *ondas viajeras* ϕ_+ y ϕ_- son, respectivamente, soluciones⁴ de

⁴ La primera (o la segunda) de las (10.22) representa el problema hiperbólico más simple. Si bien los problemas clásicos de ondas llevan a ecuaciones de segundo orden como la (10.16), hay muchos otros problemas (como ondas de creciente, ondas en glaciares, ondas en el flujo de vehículos en una carretera, ciertos fenómenos ondulatorios en reacciones químicas, etc.) que llevan directamente a ecuaciones del primer orden como las (10.22), o bien a ecuaciones no lineales de la forma (10.22), pero en las cuales c no es una constante sino una función de la perturbación ϕ . En estos casos, a diferencia del caso lineal que estamos considerando aquí, las ondas se distorsionan a medida que se propagan, y eventualmente rompen, dando lugar a ondas de choque. La correspondiente teoría matemática se basa en el *método de las características* y el tratamiento especial de las ondas de choque. En el próximo capítulo estudiaremos este tipo de ecuaciones.

$$\frac{\partial \phi_+}{\partial \xi_+} = \frac{\partial \phi_+}{\partial t} - c \frac{\partial \phi_+}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi_-}{\partial \xi_-} = \frac{\partial \phi_-}{\partial t} + c \frac{\partial \phi_-}{\partial x} = 0 \quad (10.22)$$

Como lo expresa la (10.21) las dos ondas viajeras ϕ_+ y ϕ_- se propagan *independientemente* la una de la otra. Esto es consecuencia de que la ecuación de ondas (10.16) es lineal.

Relación entre $\delta\rho$, δp y las componentes de δu

En virtud de las (10.12) y (10.17) las demás cantidades que describen nuestra onda plana ($\delta\rho$, δp y las componentes de δu) se expresan de forma análoga a la (10.21) en términos de la superposición de dos ondas viajeras (+) y (-) que satisfacen las ecuaciones (10.22).

Consideremos la onda viajera $\phi_+(\xi_+) = \phi_+(x - ct)$, que es la solución de la primera de las (10.22):

$$\frac{\partial \phi_+}{\partial t} - c \frac{\partial \phi_+}{\partial x} = 0 \quad (10.23)$$

Claramente, la única componente no nula de δu_+ es la componente x , que vale

$$\delta u_+ = \frac{\partial}{\partial x} \phi_+(\xi_+) = \frac{d\phi_+}{d\xi_+} \frac{\partial \xi_+}{\partial x} = \phi'_+ \quad (10.24)$$

Del mismo modo obtenemos

$$\delta \rho_+ = -\frac{\rho}{c^2} \frac{\partial \phi_+}{\partial t} = -\frac{\rho}{c^2} \frac{d\phi_+}{d\xi_+} \frac{\partial \xi_+}{\partial t} = \frac{\rho}{c} \phi'_+ \quad (10.25)$$

y

$$\delta p_+ = -\rho \frac{\partial \phi_+}{\partial t} = -\rho \frac{d\phi_+}{d\xi_+} \frac{\partial \xi_+}{\partial t} = \rho c \phi'_+ \quad (10.26)$$

Obtenemos así las relaciones

$$\delta u_+ = \frac{c}{\rho} \delta \rho_+ \quad , \quad \delta u_+ = \frac{1}{\rho c} \delta p_+ \quad (10.27)$$

Procediendo del mismo modo para la onda viajera $\phi_-(\xi_-) = \phi_-(x + ct)$, que es la solución de la segunda de las (10.22):

$$\frac{\partial \phi_-}{\partial t} + c \frac{\partial \phi_-}{\partial x} = 0 \quad (10.28)$$

se obtiene $\delta u_- = \phi'_-$, $\delta \rho_- = -(\rho/c)\phi'_-$ y $\delta p_- = -\rho c \phi'_-$, y por consiguiente

$$\delta u_- = -\frac{c}{\rho} \delta \rho_- \quad , \quad \delta u_- = -\frac{1}{\rho c} \delta p_- \quad (10.29)$$

En conclusión, en la onda viajera que se propaga hacia la derecha la velocidad tiene el mismo signo que la perturbación de la presión (y de la densidad), mientras que en la onda que viaja hacia la izquierda tiene signo opuesto. En ambos casos se cumple que $|\delta u_- / c| = |\delta \rho / \rho| \ll 1$.

Solución del problema de valores iniciales

Para determinar ϕ_+ y ϕ_- hay que asignar *dos* condiciones iniciales, pues la (10.18) es del segundo orden en el tiempo. Hay muchas formas equivalentes de hacerlo, pero aquí vamos a mostrar cómo se procede si se asignan en $t = 0$ las distribuciones iniciales de densidad y de velocidad

$$\delta \rho(x, 0) = \delta \rho_0(x) \quad , \quad \delta u(x, 0) = \delta u_0(x) \quad (10.30)$$

Claramente, usando las (10.26) y (10.29) tenemos que

$$\begin{aligned} \delta \rho(x, 0) &= \delta \rho_+(x, 0) + \delta \rho_-(x, 0) = \delta \rho_0 \\ \delta u(x, 0) &= \delta u_+(x, 0) + \delta u_-(x, 0) = (c / \rho)[\delta \rho_+(x, 0) - \delta \rho_-(x, 0)] = \delta u_0 \end{aligned} \quad (10.31)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene

$$\delta \rho_+(x, 0) = f_+(x) = \frac{1}{2} \left(\delta \rho_0 + \frac{\rho}{c} \delta u_0 \right) \quad , \quad \delta \rho_-(x, 0) = f_-(x) = \frac{1}{2} \left(\delta \rho_0 - \frac{\rho}{c} \delta u_0 \right) \quad (10.32)$$

Por lo tanto, la solución es

$$\delta \rho = f_+(x - ct) + f_-(x + ct) \quad (10.33)$$

En general la solución es una superposición de dos pulsos, uno de los cuales se propaga hacia la derecha y el otro hacia la izquierda. Por ejemplo, si la perturbación inicial de densidad es un pulso rectangular y el gas está en reposo en todas partes, entonces se propagan perturbaciones rectangulares de densidad hacia la derecha y hacia la izquierda, cada una de las cuales tiene una magnitud igual a la mitad de la perturbación original $\delta \rho_0$, como se indica en la Fig. 10.2a.

Si las perturbaciones iniciales de densidad y de velocidad consisten de pulsos rectangulares de igual extensión y cuyas magnitudes cumplen la relación $\rho \delta u_0 = c \delta \rho_0$, entonces los pulsos rectangulares se propagan solamente hacia la derecha, pues en este caso $f_- = 0$ (Fig. 10.2, b); si en cambio se cumple $\rho \delta u_0 = -c \delta \rho_0$ los pulsos se propagan solamente hacia la izquierda, pues $f_+ = 0$ (Fig. 10.2, c). Una perturbación de esta clase se puede producir por medio de un pistón que en el instante inicial se pone bruscamente en movimiento con una velocidad constante δu comprimiendo y poniendo en movimiento el gas que estaba en reposo, y que se detiene, también bruscamente, al cabo de un cierto tiempo. Si la longitud del pulso rectangular es L , el intervalo de tiempo durante el cual el pistón está en movimiento es evidentemente $\Delta t = L / c$.

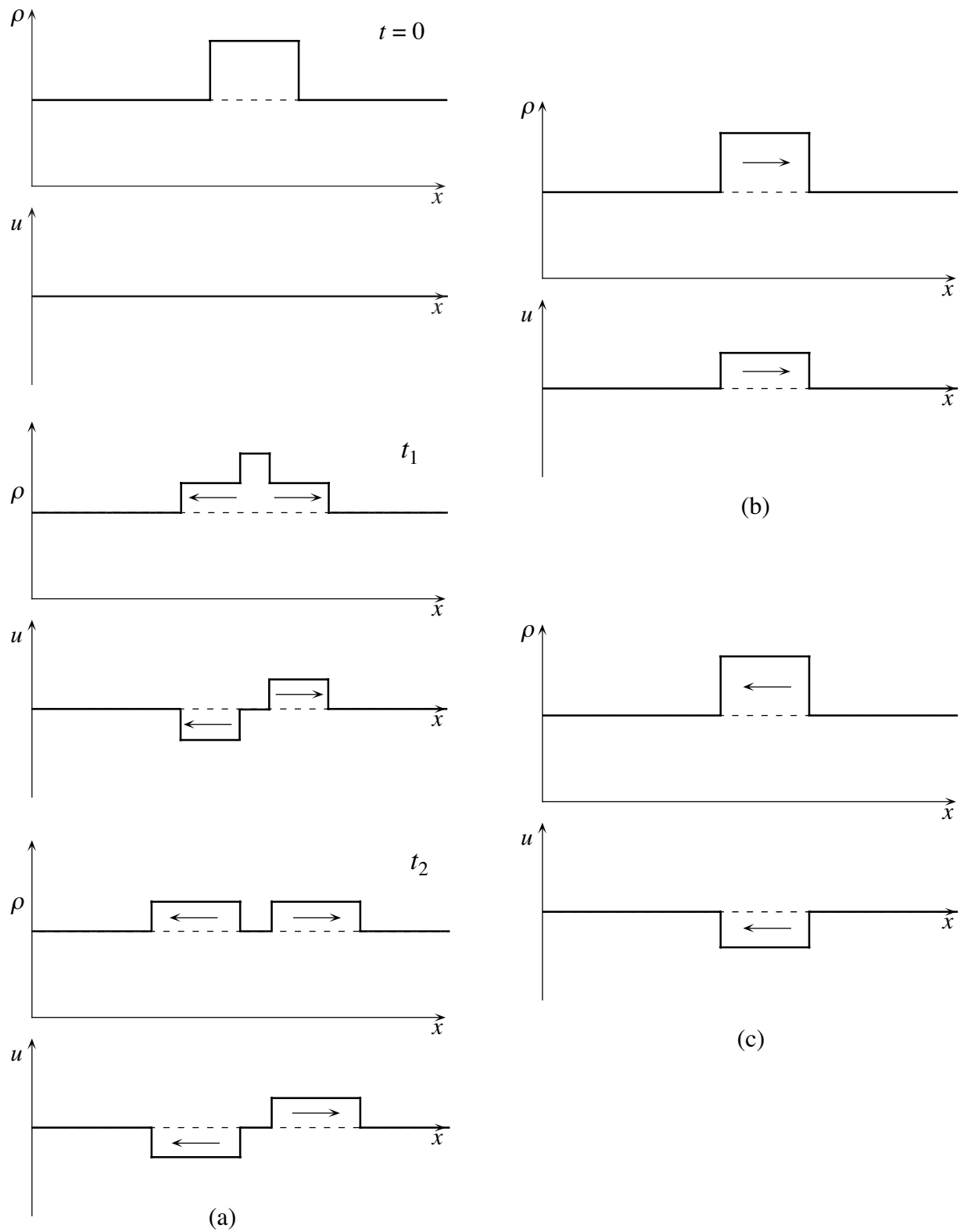


Fig. 10.2. Propagación de pulsos sonoros. (a) Cuando la perturbación inicial de densidad es un pulso rectangular y el gas está en reposo en todas partes, se propagan pulsos hacia la derecha y hacia la izquierda cuya magnitud es igual a la mitad de la perturbación original $\delta\rho_0$. (b) Cuando las perturbaciones iniciales de densidad y de velocidad cumplen la relación $\rho\delta u_0 = c\delta\rho_0$, el pulso se propaga hacia la derecha, pues $f_- = 0$. (c) Si $\rho\delta u_0 = -c\delta\rho_0$ el pulso se propaga hacia la izquierda, pues $f_+ = 0$.

Características

La expresión (10.21)

$$\phi = \phi_+(\xi_+) + \phi_-(\xi_-) = \phi_+(x - ct) + \phi_-(x + ct) \quad (10.34)$$

así como las expresiones análogas para las demás magnitudes que caracterizan a la onda plana, como la (10.33) admiten una interesante interpretación. Si consideramos el valor de ϕ_+ para un dado $\xi_+ = \text{cte.}$, la (10.34) nos dice que ese valor se transporta a lo largo de la línea horaria C_+ definida por

$$x = \xi_+ + ct \quad , \quad \xi_+ = \text{cte.} \quad (10.35)$$

del mismo modo, el valor de ϕ_- para un dado $\xi_- = \text{cte.}$ se transporta a lo largo de la línea horaria C_- definida por

$$x = \xi_- + ct \quad , \quad \xi_- = \text{cte.} \quad (10.36)$$

Las líneas C_+ y C_- definidas por (10.35) y (10.36) se denominan *características* (ver Fig. 10.3). En términos de las características, podemos interpretar la (10.34) diciendo que el valor de la perturbación en el punto (x, t) está dado por la suma de los valores ϕ_+ y ϕ_- transportados por las características C_+ y C_- que se cruzan en (x, t) .

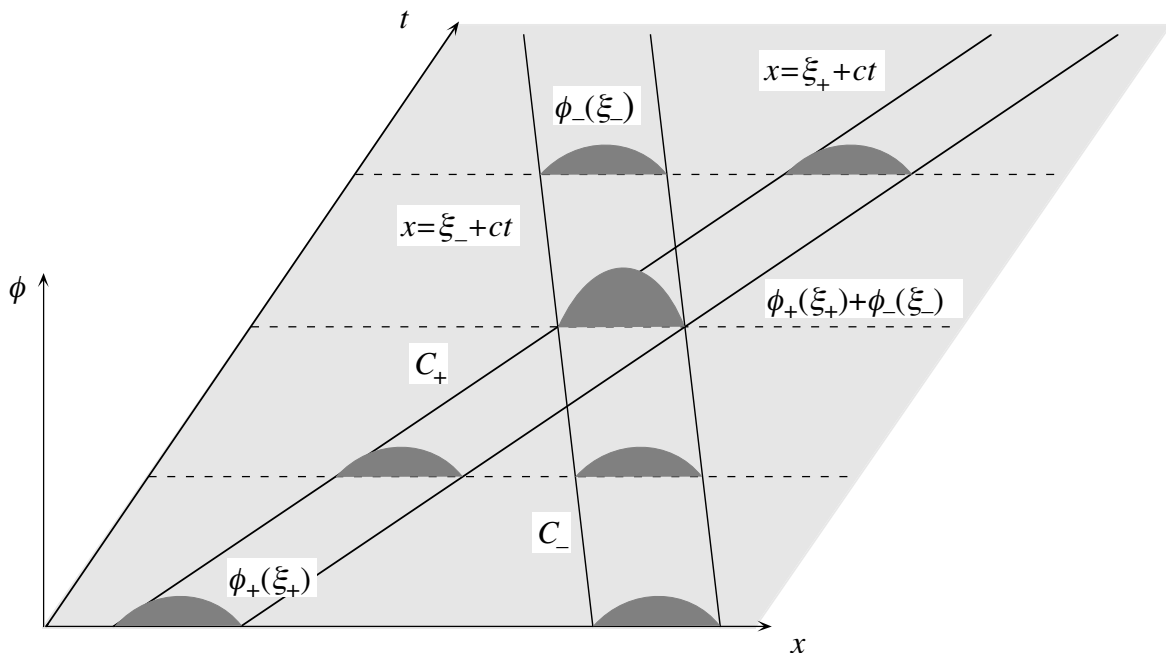


Fig. 10.3. Características: el valor de ϕ_+ para un dado $\xi_+ = \text{cte.}$ se transporta a lo largo de la línea horaria C_+ y el valor de ϕ_- para un dado $\xi_- = \text{cte.}$ se transporta a lo largo de la línea horaria C_- .

Veremos que el concepto de características y la interpretación precedente serán de gran utilidad para el estudio de la propagación de ondas de amplitud finita.

Soluciones elementales de la ecuación de ondas

La ec. (10.16) admite soluciones elementales en forma de *ondas planas monocromáticas*, en las cuales todas las cantidades de perturbación son simples funciones oscilatorias armónicas de la posición y del tiempo. Este tipo de soluciones es importante debido a que toda perturbación se puede representar como una superposición de ondas monocromáticas por medio de la integral de Fourier. Frecuentemente escribiremos esas funciones como la parte real de una cantidad compleja (así como hicimos para las ondas de superficie). Por ejemplo, podemos escribir el potencial de velocidad de una solución elemental como

$$\phi = \text{Re}[Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}] \quad (10.37)$$

donde $A = ae^{i\alpha}$ es una *amplitud compleja*, de modo que la (10.37) es equivalente a escribir

$$\phi = a \cos \theta \quad , \quad \theta(x,t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \alpha \quad (10.38)$$

La constante a es la *amplitud* de la onda y θ es la *fase*. En la onda (10.38) las superficies de fase constante están dadas por $\theta = \text{cte.}$ y es fácil ver que son planos perpendiculares al vector de onda \mathbf{k} , que se desplazan con la velocidad de fase $u_f = \omega/k$ (Fig. 10.4). En efecto, la misma fase que en el instante t se tiene en los puntos del plano definido por $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t = \theta$ se encuentra en el instante t' en el plano definido por $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}' - \omega t' = \theta$. Por lo tanto se cumple $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) = \omega(t' - t)$, de donde resulta (indicando con \mathbf{e}_k el versor en la dirección de \mathbf{k}) que $\mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) = (\omega/k)(t' - t)$. Esta ecuación nos dice que la distancia entre los dos planos crece con la velocidad $u_f = \omega/k$.

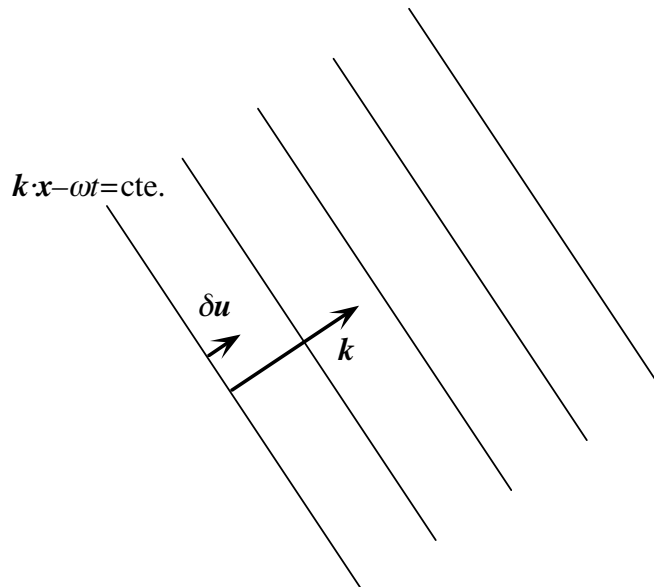


Fig. 10.4. Onda sonora plana.

Sustituyendo la (10.37) o la (10.38) en la ecuación de las ondas (10.16) obtenemos la *relación de dispersión* de las *ondas sonoras* o *acústicas*:

$$\omega = \pm ck \quad , \quad k = |\mathbf{k}| \quad (10.39)$$

donde, como ya dijimos, c es una propiedad del fluido y de su estado no perturbado, y por lo tanto no depende de las características de la perturbación.

Es importante recordar que esto último es cierto solamente si las ondas son de pequeña amplitud. Si la amplitud de la onda es finita, *no es lícito* hacer las aproximaciones que permitieron pasar de la (10.8) a la (10.9). Podemos aún, si queremos, escribir $\delta p = c'^2 \delta \rho$, pero ahora $c' = (k'_S / \rho')^{1/2}$ *no es* más una constante sino que *depende de la perturbación* y por lo tanto la relación entre δp y $\delta \rho$ no es lineal⁵. Veremos más adelante como se procede en este caso y a que resultados se llega. Calculemos el campo de velocidad de la onda elemental (10.38):

$$\delta \mathbf{u} = \nabla \phi = \nabla [a \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \alpha)] = -a \mathbf{k} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \alpha) \quad (10.40)$$

La (10.40) nos muestra que las ondas sonoras elementales son *longitudinales*, esto es, el desplazamiento de los elementos del fluido es *paralelo* a la dirección de propagación de la onda.

La velocidad del sonido

De la (10.40) resulta que la velocidad del sonido c , definida por la (10.9), es igual al módulo de la *velocidad de fase* de las ondas elementales, y también es igual al módulo de la *velocidad de grupo* C de dichas ondas. En efecto,

$$C_i = \pm \frac{\partial \omega}{\partial k_i} = \pm \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial k_i} = \pm c \frac{k_i}{k} \quad \text{luego} \quad |C| = c \quad (10.41)$$

Por consiguiente las ondas sonoras de amplitud infinitesimal *no son dispersivas*. Por lo tanto, un paquete de ondas formado por la superposición de ondas elementales de la forma (10.37) o (10.38) se propaga con la velocidad c *sin sufrir cambio de forma*, a diferencia de lo que ocurre con las ondas de superficie en aguas profundas.

La velocidad del sonido en un gas ideal vale

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{\mu}} \quad (10.42)$$

donde μ es el peso molecular y R es la constante de los gases (ver Cap. 2). Para el aire seco tenemos

$$c(\Theta) = c_0 \sqrt{1 + \Theta / 273.16} \quad , \quad c_0 = 331.3 \text{ m/s} \quad (10.43)$$

donde $\Theta = T(^{\circ}\text{K}) - 273.16$ es la temperatura en grados centígrados.

La velocidad del sonido y otras propiedades de propagación de las ondas sonoras varían de modo significativo si el aire es húmedo y especialmente cuando está en condiciones de saturación y se produce la condensación de gotas de agua (niebla). En estos casos no se puede usar la fórmula (10.42) pues cuando en el medio coexisten dos fases, las compresiones y expansiones de la onda sonora producen cambios de fase (condensación y vaporización). Debido a eso, el mó-

⁵ En particular, es fácil verificar que tanto para los gases como para la materia condensada c' es una función creciente de la presión.

dulo de compresión adiabático no es más igual a γp , y es preciso calcular su valor correcto. El lector interesado en este tema lo puede encontrar tratado en el texto de Landau y Lifshitz.

La velocidad del sonido en los líquidos es considerablemente mayor que en los gases, debido a que su módulo de compresión es mucho mayor. Para el agua $c \approx 1400$ m/s (aproximadamente). Es importante tener presente, sin embargo, que en los espejos de agua naturales (lagos, mares, etc.) c varía apreciablemente con la profundidad y también de un lugar a otro, debido a que la densidad del agua depende de la temperatura, la salinidad y la profundidad. Estas variaciones afectan de modo importante la propagación del sonido en las aguas del mar, lo cual es de gran relevancia para la acústica submarina (sonar).

El espectro de las ondas sonoras

Las ondas sonoras se perciben como *sonido*, siempre y cuando su frecuencia esté dentro del rango de sensibilidad del oído. El oído humano percibe sonidos desde unos 20 Hz hasta 20 kHz (aproximadamente 10 *octavas*, correspondientes a longitudes de onda entre 15 m y 1.5 cm), aunque estos límites varían considerablemente de una persona a otra. Fuera de ese intervalo, el oído humano no detecta las ondas acústicas. Las perturbaciones acústicas de frecuencias inferiores a 20 Hz, inaudibles para el oído humano, se denominan *infrasonidos*, mientras que las de frecuencia mayor que 20 kHz, también inaudibles, se llaman *ultrasonidos*. Dentro del rango mencionado, nuestro oído distingue los sonidos de diferentes frecuencia como de diferente *tono*: las ondas de baja frecuencia se oyen como sonidos de tono *grave*, mientras que las de alta frecuencia como sonidos de tono *agudo*. En este contexto es interesante reflexionar que el hecho que las ondas sonoras de pequeña amplitud no sean dispersivas es afortunado, pues nos permite oír con nitidez (es decir, sin distorsión) a los sonidos. Si no fuese así, no sería posible escuchar música ni comunicarnos por medio de la voz.

La capacidad auditiva de los animales no coincide con la del hombre. Los perros, gatos y caballos perciben ultrasonidos hasta 32, 46 y 40 kHz, aunque su audición es inferior a la humana para bajas frecuencias. Entre los antropoides, el chimpancé alcanza a percibir sonidos de hasta 30 kHz. Es particularmente interesante el caso de los murciélagos, que perciben ultrasonidos de hasta 150 kHz (correspondientes a una longitud de onda de unos 2 mm); los murciélagos emiten pulsos sonoros de esas altísimas frecuencias y usan el eco devuelto por los objetos que están a su alrededor para orientarse en el vuelo, eludir obstáculos y localizar los insectos de los cuales se alimentan. También los cetáceos emiten y perciben ultrasonidos de hasta 150 kHz, que les sirven para orientarse y detectar los bancos de *krill* del cual se alimentan. Del otro lado del espectro acústico, los elefantes y los bóvidos pueden percibir infrasonidos de hasta 16 Hz.

Existen muchas e importantes aplicaciones de los ultrasonidos. Entre ellas podemos mencionar el sonar, el estudio de propiedades de materiales, la ecografía, la limpieza por ultrasonidos, etc.. Dado que la propagación de las onda ultrasónicas de altísima frecuencia depende fuertemente de la viscosidad del medio, se las puede emplear para observar estructuras de las células vivas.

Los sonidos de muy baja frecuencia son producidos en la naturaleza por sismos, saltos de agua, y volcanes, y por vientos, truenos y otros fenómenos meteorológicos. Se pueden propagar mucho más lejos que los de mayor frecuencia puesto que su amortiguamiento (debido a los efectos de la viscosidad y la conducción térmica) es mucho menor. El estudio de esas ondas con miras a mejorar los pronósticos meteorológicos es un tema de interés actual, como también lo es su aplicación para la prospección sísmica.

Propiedades de las ondas sonoras

Energía e intensidad del sonido

En ausencia de fuerzas externas conservativas, la energía por unidad de volumen del fluido es igual a la suma de la energía interna $\rho'e'$ (e' es la energía interna por unidad de masa, las primas indican las magnitudes físicas en presencia de la perturbación) más la energía cinética asociada con el movimiento del fluido, que en nuestro caso vale $\rho'u'^2/2$. Por lo tanto, reteniendo términos hasta el segundo orden en las cantidades de perturbación tenemos

$$\rho'e' + \frac{1}{2}\rho'u'^2 \cong \rho e + \delta\rho \left(\frac{\partial(\rho'e')}{\partial\rho'} \right) \Big|_{S, \rho'=\rho} + \frac{1}{2}\delta\rho^2 \left(\frac{\partial^2(\rho'e')}{\partial\rho'^2} \right) \Big|_{S, \rho'=\rho} + \frac{1}{2}\rho\delta u^2 \quad (10.44)$$

donde las derivadas se tienen que calcular a entropía constante puesto que la perturbación es adiabática. Usando la relación termodinámica

$$de = TdS - pdV = TdS + (p/\rho^2)d\rho \quad (10.45)$$

tenemos que

$$\left(\frac{\partial(\rho'e')}{\partial\rho'} \right) \Big|_S = e' + \frac{p'}{\rho'} = h' \quad (10.46)$$

donde h es la entalpía por unidad de masa. Por lo tanto la derivada segunda que aparece en la (10.44) se puede expresar como

$$\left(\frac{\partial^2(\rho'e')}{\partial\rho'^2} \right) \Big|_S = \left(\frac{\partial h'}{\partial\rho'} \right) \Big|_S = \left(\frac{\partial h'}{\partial p'} \right) \Big|_S \left(\frac{\partial p'}{\partial\rho'} \right) \Big|_S = \frac{c'^2}{\rho'} \quad (10.47)$$

Reemplazando esta expresión en la (10.44) se obtiene

$$\rho'e' + \frac{1}{2}\rho'u'^2 \cong \rho e + h\delta\rho + \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho}\delta\rho^2 + \frac{1}{2}\rho\delta u^2 \quad (10.48)$$

El primer término del miembro derecho es la energía interna por unidad de volumen del fluido en reposo, por lo tanto no tiene nada que ver con la onda sonora. El segundo término $h\delta\rho$ es la variación de energía interna debida a la variación de la masa del fluido en la unidad de volumen, que ocurre debido a la perturbación. La contribución de este término a la energía total (que se obtiene integrando la energía por unidad de volumen dada por la (10.48) sobre todo el volumen del fluido) es nula puesto que la masa total del fluido no varía por efecto de la perturbación.

Por lo tanto, la variación total de la energía del fluido debida a la presencia de la onda sonora es

$$\int_V \left(\frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho}\delta\rho^2 + \frac{1}{2}\rho\delta u^2 \right) dV \quad (10.49)$$

Podemos interpretar el integrando de la (10.49) como la *densidad de energía sonora* de la onda:

$$E = \frac{1}{2} \frac{c^2}{\rho} \delta\rho^2 + \frac{1}{2} \rho \delta u^2 \quad (10.50)$$

Esta expresión toma una forma más sencilla para una onda viajera plana, pues en este caso, por las (10.27) y (10.29) tenemos que $|\delta\rho_{\pm}| = (\rho/c) |\delta u_{\pm}|$. Entonces los dos términos de la (10.50) son iguales y tenemos simplemente

$$E = \rho \delta u^2 \quad (10.51)$$

Aunque esta expresión no vale en general, se puede obtener una fórmula semejante para el *promedio temporal* de la energía sonora aplicando el bien conocido resultado de la Mecánica según el cual la media temporal de la energía potencial de un sistema que realiza pequeñas oscilaciones es igual a la media temporal de su energía cinética. Puesto que en nuestro caso esta última es

$$\frac{1}{2} \int_V \rho \overline{\delta u^2} dV \quad (10.52)$$

resulta que

$$\int_V \bar{E} dV = \int_V \rho \overline{\delta u^2} dV \quad (10.53)$$

A partir de estos resultados vemos que la energía de una onda sonora es proporcional al cuadrado de su amplitud.

No es difícil demostrar que la intensidad \mathbf{q} (densidad de flujo de energía) de una onda sonora plana que se propaga en la dirección del versor \mathbf{n} está dada por

$$\mathbf{q} = cE\mathbf{n} \quad (10.54)$$

La intensidad de la onda sonora es percibida por nuestro oído como la *fuerza* del sonido. La amplitud mínima de las variaciones de presión que el oído alcanza a detectar es de unos⁶ 10^{-5} Pa, y la amplitud de las variaciones de presión en el umbral del dolor es de unos 10 Pa. Por comparación, la presión atmosférica en condiciones standard es de alrededor de 10^5 Pa. Por lo tanto, la perturbación de la presión en una onda sonora es muy pequeña en relación con la presión no perturbada. Esto justifica nuestra hipótesis de pequeña amplitud para el estudio de las ondas sonoras. Sin embargo, si la amplitud de la onda alcanza los 100 Pa empiezan a ser importantes los efectos no lineales que hasta ahora hemos dejado de lado.

A continuación vamos a discutir el rango de validez de las otras aproximaciones que hemos hecho en nuestro tratamiento, que se basaron en despreciar ciertos términos supuestamente pequeños, y comentar brevemente los efectos de los mismos.

Efecto de la gravedad

Si el estado no perturbado es de equilibrio hidrostático, la gravedad produce dos efectos. En primer lugar, como vimos en el Capítulo 2, la presión y la densidad de equilibrio dependen de la altura. Las ecuaciones se pueden escribir del mismo modo, pero con la salvedad que ahora

⁶ 1 Pa = 1 N/m².

$p = p(z)$ y $\rho = \rho(z)$. Sin embargo la presión y la densidad del estado no perturbado intervienen en la ecuación de las ondas solamente a través de la velocidad del sonido, que con la hipótesis de gas ideal es solamente función de la temperatura. Por lo tanto c depende de la altura sólo en la medida que la temperatura varía con z . Si la temperatura varía con z tenemos un problema de propagación de ondas en un medio no homogéneo que hay que tratar con los métodos conocidos, que no vamos a discutir aquí.

En segundo lugar, en la ecuación de movimiento (10.11) aparecerá un término de la forma $g\delta\rho$. Para estimar la importancia de este término lo comparamos con el término $(\nabla\delta p)/\rho$, cuya magnitud es del orden de $|\delta p/\lambda\rho|$ (λ es la longitud de onda). Resulta

$$\frac{|g\delta\rho|}{|(\nabla\delta p)/\rho|} \approx \frac{|g\delta\rho|}{|\delta p/\lambda\rho|} = \frac{\lambda g}{c^2} \quad (10.55)$$

Ahora bien, para el caso del sonido en el aire, $c^2/g \approx 10^6$ cm, y por lo tanto para las longitudes de onda de interés en la acústica se cumple que $\lambda g/c^2 \ll 1$, de modo que el efecto del término $g\delta\rho$ es despreciable. Veremos más adelante con más detalle los efectos de la estratificación sobre las ondas acústicas.

Efectos de la viscosidad y la conducción térmica

Tratándose en este caso de perturbaciones compresivas, el término de viscosidad incluye, además de la viscosidad ordinaria η , a la segunda viscosidad ζ . Sin embargo, salvo casos muy especiales (por ejemplo una mezcla de gases donde ocurren reacciones químicas, ver Landau y Lifshitz), ζ es del mismo orden de η . El orden de magnitud del término de viscosidad para una onda sonora se puede estimar entonces como $|\nu\delta u/\lambda^2| \approx |\nu\delta p/\rho c\lambda^2|$. Por lo tanto el orden de magnitud del cociente entre el término de viscosidad y el término $(\nabla\delta p)/\rho$ está dado por

$$\frac{|\mu\delta p/\rho c\lambda^2|}{|\delta p/\lambda\rho|} = \frac{\nu}{c\lambda} = \frac{1}{\text{Re}_c} \quad (10.56)$$

donde Re_c es un número de Reynolds que se forma con la velocidad del sonido. Para el sonido en el aire $\text{Re}_c \approx 10^5 \lambda(\text{cm})$ de manera que el efecto de la viscosidad es despreciable salvo para longitudes de onda muy cortas en el rango de los ultrasonidos. Del mismo modo se puede mostrar que el efecto de la conducción térmica sólo puede ser importante para longitudes de onda muy cortas, dado que el flujo de calor es proporcional al gradiente de temperatura, que a su vez es inversamente proporcional a λ .

Debido a la viscosidad y a la conducción térmica la energía de las ondas sonoras se disipa, de modo que su intensidad disminuye progresivamente con la distancia x recorrida por la onda. El cálculo de este efecto se basa en evaluar la tasa de disipación de la energía mecánica y el lector interesado lo puede encontrar en el texto de Landau y Lifshitz. Aquí nos limitamos a citar el resultado. La intensidad disminuye según la ley $e^{-\gamma x}$, y el *coeficiente de absorción* γ vale

$$\gamma = \frac{2\pi^2}{\rho c\lambda^2} \left[\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta \right) + \kappa \left(\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_P} \right) \right] \quad (10.57)$$

donde ζ es el segundo coeficiente de viscosidad, κ es el coeficiente de conducción térmica y c_V , c_P son los calores específicos a volumen y presión constante, respectivamente. Para el aire se

tiene $\gamma_{\text{aire}} \cong 2.74 \times 10^{-11} f(\text{Hz})^2$ ($f = \omega / 2\pi$ es la frecuencia de la onda), lo cual muestra que la absorción del sonido es despreciable dentro del rango de frecuencias audibles, pero puede ser grande para ultrasonidos de muy alta frecuencia. La absorción del sonido en el agua es mucho menor pues $\gamma_{\text{agua}} \cong 1.14 \times 10^{-13} f(\text{Hz})^2$.

Difusión de las ondas sonoras

La presencia de partículas en suspensión en el fluido afecta la propagación de las ondas sonoras. Esto ocurre en el aire cuando hay niebla o cuando llueve o está nevando. Debido simplemente a su presencia, las partículas causan la emisión de ondas difundidas que se propagan en todas las direcciones. Además, las partículas que se ponen en movimiento por efecto de la perturbación sonora producen a su vez más ondas sonoras difundidas. La energía de estas emisiones secundarias de sonido se resta a la de la onda primaria, lo cual conduce a su atenuación. La magnitud de la atenuación depende de la *sección eficaz* de difusión, que se define como la razón entre la intensidad total difundida por una partícula y la densidad de flujo de energía incidente sobre la misma.

Si la densidad de la partícula es grande comparada con la del medio en el que se propaga el sonido, y si es poco compresible, entonces la difusión debida al movimiento de la partícula es sólo una pequeña corrección a la difusión principal, que proviene de la mera presencia de la misma. En este caso el cálculo de la sección eficaz para partículas de radio $R \ll \lambda$ da como resultado

$$\sigma = \frac{112\pi^5 R^2}{9} \left(\frac{R}{\lambda}\right)^4 = \frac{112\pi^5 R^6 f^4}{9c^4} \quad (10.58)$$

Si hay N partículas por unidad de volumen, la disminución de intensidad de la onda al atravesar una capa fluida de espesor dx y área unidad es

$$dq = -N\sigma q \quad (10.59)$$

La (10.59) muestra que la intensidad de la onda disminuye exponencialmente con la distancia de acuerdo con la ley $e^{-\gamma_d x}$, donde el coeficiente de atenuación por difusión vale

$$\gamma_d = N\sigma \quad (10.60)$$

Puesto que la sección eficaz de difusión es proporcional a la *cuarta* potencia de la frecuencia, los sonidos agudos se atenúan mucho más fuertemente que los graves. Por ejemplo, en una tormenta de nieve en la cual la visibilidad es de 10 m, si suponemos que la dimensión característica de los copos es de 0.5 cm tendremos aproximadamente un copo por litro, y entonces de acuerdo con la (10.60) la difusión atenúa las ondas sonoras de 10 kHz en una distancia del orden de $1/\gamma_d \approx 15$ m. En cambio, la atenuación de una onda de 1 kHz es casi insignificante.

Acústica

El estudio de la emisión de las ondas sonoras y su propagación en medios no homogéneos, reflexión y transmisión a través de interfases, interferencia, difracción, difusión (*scattering*) etc. es un campo muy vasto del cual por razones de espacio no nos podemos extender en este curso. Además, los métodos matemáticos para estudiar estos problemas son análogos a los que se usan para tratar ondas de otra naturaleza y que se suelen estudiar en los cursos sobre Ondas. Pero el lector

debe tener presente la importancia de la Acústica debido a sus numerosas aplicaciones prácticas. Sobre esos temas específicos existe una abundante literatura que comprende textos, monografías y revistas especializadas que pueden ser consultadas por el lector curioso.

Las condiciones de incompresibilidad

Hemos visto que la compresión de una región en el seno de un fluido origina perturbaciones que, en el límite de pequeña amplitud, son pulsos u ondas sonoras. Sin embargo, no hemos todavía establecido *bajo qué condiciones* el flujo puede dar lugar a variaciones de densidad, o, recíprocamente, bajo que condiciones el flujo se puede considerar incompresible.

Comenzaremos por consideraciones cinemáticas: dado un campo de velocidades, queremos saber cuándo las variaciones de densidad son relevantes y cuándo no. Las variaciones relativas de densidad de un elemento de flujo están relacionadas, como sabemos, con el valor local de $\nabla \cdot \mathbf{u}$. Más precisamente, la ecuación de continuidad establece que

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{u} \quad (10.61)$$

Por otra parte, el campo de velocidad está caracterizado, en cada instante, por una escala típica U del módulo de la velocidad y por una escala espacial L sobre la cual varía vectorialmente la velocidad⁷. Consideremos ahora la condición

$$|\nabla \cdot \mathbf{u}| \ll U/L \quad (10.62)$$

que equivale a

$$\left| \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right| \ll \frac{U}{L} \quad (10.63)$$

Su significado es que las componentes de \mathbf{u} , que varían sobre la escala L , lo hacen de forma tal que sus variaciones se compensan, dando lugar a un valor de $\nabla \cdot \mathbf{u}$ muy pequeño respecto del cociente U/L , que a su vez es del orden de la mayor de las componentes de \mathbf{u} , dividida por L . La condición (10.62) es precisamente la *condición cinemática*, que determina el *aspecto* que debe presentar el campo de velocidad para que las variaciones de velocidad se deban a un flujo con densidad aproximadamente constante, esto es, que el campo de velocidad sea *solenoidal* (con buena aproximación).

Para un fluido homogéneo podemos elegir ρ y la entropía por unidad de masa s como parámetros de estado independientes. En este caso la tasa de variación de la presión de un elemento material se puede expresar como

$$\frac{dp}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt} + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dt} \quad (10.64)$$

Luego la condición que \mathbf{u} sea aproximadamente solenoidal es

⁷ Damos por supuesto que estamos considerando un fluido que en promedio está en reposo, situación a la cual por otra parte se puede siempre llegar mediante un oportuno cambio de sistema de referencia.

$$\left| \frac{1}{\rho c^2} \frac{dp}{dt} - \frac{1}{\rho c^2} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dt} \right| \ll \frac{U}{L} \quad (10.65)$$

Normalmente la condición (10.65) se va a satisfacer sólo si cada uno de los dos términos del miembro izquierdo es pequeño en comparación con U/L . Vamos a considerar entonces por separado esas condiciones subsidiarias.

Primer término

Cuando se cumple la condición

$$\left| \frac{1}{\rho c^2} \frac{dp}{dt} \right| \ll \frac{U}{L} \quad (10.66)$$

las variaciones de densidad de un elemento material debido a las variaciones de la presión son despreciables, por lo tanto *el fluido se comporta como si fuese incompresible*. En la práctica, este es de lejos el requerimiento más importante entre los dos que hemos planteado como necesarios para que el campo \mathbf{u} sea solenoidal. Al estimar $|dp/dt|$ no perdemos mayormente generalidad si suponemos que el flujo es isoentrópico, puesto que normalmente los efectos de la viscosidad y la conducción térmica llevan a cambios de la *distribución* de presión y no tanto en modificar la magnitud de la *variación* de la presión.

Tomando el producto escalar de \mathbf{u} por la ecuación del movimiento

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \mathbf{F} - \nabla p \quad (10.67)$$

obtenemos

$$\mathbf{u} \cdot \nabla p = \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} - \frac{\rho}{2} \frac{du^2}{dt} \quad (10.68)$$

podemos entonces escribir la (10.66) en la forma

$$\left| \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho c^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) p \right| = \left| -\frac{1}{2c^2} \frac{du^2}{dt} + \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}}{c^2} \right| \ll \frac{U}{L} \quad (10.69)$$

La (10.69) muestra que para que el flujo sea incompresible en general⁸ se deben satisfacer tres condiciones por separado, esto es, que cada uno de los términos del miembro izquierdo de la última de las (10.69) sea pequeño en comparación con U/L .

Término de la derivada convectiva

Consideremos el primer término de la última de las (10.69). El orden de magnitud de du^2/dt es igual a la mayor entre la magnitud de $|\partial u^2/\partial t| \approx U^2/T$ y la magnitud de $|(\mathbf{u} \cdot \nabla)u^2| \approx U^3/L$. Aquí cabe observar que pueden existir casos de flujos oscilatorios en los cuales la frecuencia de oscilación en un dado punto es mayor que U/L y entonces $|\partial u^2/\partial t| > |(\mathbf{u} \cdot \nabla)u^2|$, pero no es ne-

⁸ Es decir, en ausencia de cancelación mutua de algunos de los términos del miembro izquierdo de la última de las (10.69) en todos los puntos del flujo.

cesario considerar ahora este caso por el momento. En efecto, veremos en seguida que la condición que el segundo término de la última de las (10.69) sea mucho menor que U/L es más restrictiva que la que resulta de estimar du^2/dt como $\approx U^2/T$.

Por lo tanto, la condición que resulta es

$$\left| \frac{1}{2c^2} \frac{du^2}{dt} \right| \approx \frac{1}{2c^2} \frac{U^3}{L} \ll \frac{U}{L} \quad \text{o sea} \quad \frac{U^2}{c^2} \ll 1 \quad (10.70)$$

En general, c es una función de la posición en el fluido, y si su variación es apreciable hay que elegir algún valor representativo para usarlo en la (10.70).

En un flujo estacionario, o bien un flujo que varía lentamente con el tiempo, una variación de la velocidad de un elemento del fluido desde el valor nulo hasta U requiere una variación de la presión del orden de ρU^2 (como se ve por el Teorema de Bernoulli). Entonces, si $\delta\rho$ y δp son las variaciones de densidad y de presión que sufrió el elemento material, resulta que $\delta\rho/\rho$ y $\delta p/\rho c^2$ son pequeños en comparación con la unidad cuando se cumple que $U^2/c^2 \ll 1$. Este es el argumento informal que subyace a la condición (10.70).

El cociente

$$M \equiv U/c \quad (10.71)$$

recibe el nombre de *número de Mach* del flujo y juega un rol importante en la dinámica de gases. Recordando que en condiciones normales de temperatura y de presión c vale aproximadamente 340 m/s para el aire, y 1450 m/s para el agua, cabe esperar que los flujos debidos a cuerpos que se mueven con velocidades por debajo de, digamos, 100 m/s en el aire sean prácticamente incompresibles, y que también sean incompresibles los flujos estacionarios normales en el agua.

Término de la derivada local

La magnitud del segundo término de la última de las (10.69) depende de la no estacionariedad del flujo. Supongamos que el flujo es oscilatorio (en sentido aproximado, no es preciso que sea estrictamente periódico) y que f sea el orden de magnitud de la frecuencia dominante. La magnitud de las fluctuaciones de la presión se puede estimar considerando una región del flujo en la cual la velocidad (en un dado instante) es aproximadamente uniforme. Sea L el orden de magnitud de las dimensiones lineares de esa región. Dentro de esta región, la velocidad cambia de signo en un lapso del orden de $1/f$, lo que trae aparejado una variación de la cantidad de movimiento (por unidad de área perpendicular a L) del orden de ρLU . Para producir esta variación de cantidad de movimiento, la diferencia de presión entre los contornos de la región debe ser del orden de ρLUf . Resulta entonces que $|\partial p/\partial t| \approx \rho LUf^2$, y por lo tanto la condición que el flujo sea solenoidal se escribe como

$$\left| \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right| \approx \frac{LUf^2}{c^2} \ll \frac{U}{L} \quad \text{o sea} \quad \frac{L^2 f^2}{c^2} \ll 1 \quad (10.72)$$

Si la frecuencia típica de las variaciones temporales es U/L , la condición (10.72) se reduce a la (10.70) previamente encontrada. Por lo tanto cuando $f \gg U/L$ la (10.72) es más restrictiva que la (10.70), como ya habíamos anticipado. Se puede observar que cuando L es igual a la longitud

de onda de una onda sonora, se tiene $Lf/c = 1$ y la condición (10.72) no se cumple, lo cual es razonable puesto que la compresibilidad no se puede despreciar al tratar las ondas sonoras.

Término de la fuerza externa

Si la fuerza externa se debe a la gravedad, $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}/c^2| \approx Ug/c^2$ de modo que obtenemos la condición

$$\frac{gL}{c^2} \ll 1 \tag{10.73}$$

En el caso del aire, que es el único fluido terrestre para el cual existe la posibilidad de que esta condición no se cumpla, podemos usar la expresión (10.9) de c y escribir la (10.73) como

$$\frac{\rho g L}{\gamma p} \ll 1 \tag{10.74}$$

El numerador del primer miembro de la (10.74) es igual a la diferencia de presión hidrostática entre dos puntos separados por la distancia vertical L . La condición (10.74) nos dice entonces que el flujo es incompresible si la escala vertical L de la distribución de velocidad es pequeña en comparación con $p/\rho g$, que es la escala vertical de la atmósfera (unos 8.5 km para aire en condiciones normales, ver el Capítulo 2). Es evidente que la condición (10.74) se cumple para todos los flujos a escala de laboratorio o que afectan capas de la atmósfera de espesor menor que algunos centenares de m.

En conclusión, el flujo es incompresible cuando se cumplen las tres condiciones

$$M^2 \ll 1 \quad , \quad \frac{L^2 f^2}{c^2} \ll 1 \quad , \quad \frac{gL}{c^2} \ll 1 \tag{10.75}$$

La *Dinámica de Gases* se ocupa principalmente de estudiar situaciones en que la primera de estas condiciones no se cumple. La segunda condición no se cumple en situaciones que se estudian en *Acústica*. Finalmente, las situaciones en que no se cumple la última de las (10.75) se encuentran en el ámbito de la *Meteorología Dinámica*.

Segundo término

Volvemos ahora a la segunda condición que se deriva de la (10.65), esto es la condición

$$\left| \frac{1}{\rho c^2} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dt} \right| \ll \frac{U}{L} \tag{10.76}$$

que se debe cumplir para que \mathbf{u} sea solenoidal. Puesto que para un fluido homogéneo hay una única relación funcional entre p , ρ y S , podemos escribir

$$\frac{1}{\rho c^2} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_p = -\frac{1}{\rho c^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \frac{(\partial \rho / \partial T)_p}{(\partial s / \partial T)_p} = \frac{\alpha_p T}{c_p} \tag{10.77}$$

donde α_p es el coeficiente de expansión térmica a presión constante. Por otra parte la variación de la entropía proviene del flujo de calor (ec. (4.31)) y de la tasa de disipación de la energía mecánica ϕ (ec. (4.37)):

$$T \frac{ds}{st} = \phi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (10.78)$$

Sustituyendo entonces (10.77) y (10.78) en (10.76) resulta

$$\left| \frac{\alpha_p}{c_p} \left[\phi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \right] \right| \ll \frac{U}{L} \quad (10.79)$$

donde

$$\phi = \frac{2\eta}{\rho} (\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \delta_{ij})^2 \quad (10.80)$$

El significado esencial de esta condición es que las variaciones de densidad de un elemento material por el calentamiento debido a la disipación viscosa y a la conducción térmica debe ser pequeña⁹.

Nuevamente, vamos a suponer que no hay cancelación entre los dos términos del primer miembro de la (10.79), y que la escala de variación espacial de las cantidades es L . Obtenemos entonces las dos siguientes condiciones

$$\frac{\alpha_p U^2}{c_p} \frac{\eta}{\rho L U} \ll 1 \quad , \quad \alpha_p \Theta \frac{\kappa}{L U} \ll 1 \quad (10.81)$$

donde $\kappa = k / \rho c_p$ es la difusividad térmica y Θ es la escala de variación de la temperatura del fluido (hemos supuesto que α_p es positivo).

Para tener una idea de las circunstancias en las cuales se podrían violar las condiciones (10.81) podemos calcular los primeros miembros de las desigualdades (10.81) para aire y agua a 15 °C y presión atmosférica, para un caso en el cual $L = 1$ cm, $U = 10$ cm/s, $\Theta = 10$ °C. Los resultados se dan en la Tabla 10.1.

Tabla 10.1. Estimación del cumplimiento de las condiciones de incompresibilidad que derivan de los efectos de la disipación viscosa y de la conducción térmica.

	$\frac{\alpha_p U^2}{c_p} \frac{\eta}{\rho L U}$	$\alpha_p \Theta \frac{\kappa}{L U}$
aire	5×10^{-10}	7×10^{-4}
agua	4×10^{-13}	3×10^{-7}

⁹ Si consideramos un fluido no homogéneo, pueden ocurrir cambios de la densidad debido a la difusión molecular (como ocurre, por ejemplo, en el caso de agua salada cuando la concentración de la solución no es uniforme) En esas circunstancias la condición para que \mathbf{u} sea solenoidal se puede encontrar de manera semejante.

Observando los valores que figuran en la Tabla 10.1 resulta evidente que es sumamente difícil que el efecto de la disipación viscosa lleve a violar la primera de las condiciones (10.81), y solamente en condiciones harto improbables (por ejemplo, $\Theta = 100\text{ }^\circ\text{C}$ y $LU \approx 0.1\text{ cm}^2/\text{s}$ en un gas) la conducción del calor en un elemento del fluido será suficientemente rápida como para violar la segunda de las (10.81).

Por lo tanto, a los fines prácticos podemos descartar el segundo término de la (10.65) y en ausencia de ulteriores aclaraciones, decir que el comportamiento de un fluido es incompresible implica que el campo de velocidad es solenoidal; las condiciones bajo las cuales un fluido se comporta como incompresible son las (10.75), y entre ellas la primera es la más importante en la práctica.

Ondas internas de gravedad en fluidos estratificados

Las ondas acústicas (longitudinales) que acabamos de estudiar no son las únicas ondas que se pueden propagar en el seno de un fluido. En efecto, en presencia de la gravedad, si en el fluido hay estratificaciones de densidad se pueden también propagar ondas *transversales*, denominadas *ondas internas de gravedad*. El origen de estas ondas se puede entender recordando nuestro análisis de la estabilidad de fluidos estratificados (Capítulo 2). Vimos entonces que si se perturba un fluido con una estratificación *estable*, haciendo que una parcela del mismo se desplace verticalmente respecto de su posición de equilibrio, la diferencia entre su peso y el empuje de Arquímedes proporciona una fuerza de restitución, de resultados de la cual la parcela efectúa oscilaciones alrededor de su posición de equilibrio. Estas oscilaciones se propagan en el fluido en forma de ondas que son precisamente las ondas internas de gravedad.

Las ondas internas de gravedad son de gran interés para la meteorología y la oceanografía, y además presentan interesantes características. Por ese motivo las vamos a estudiar ahora. El tratamiento que vamos a presentar a continuación es un típico ejemplo de como se plantea el estudio de las *ondas e inestabilidades lineales en fluidos no uniformes*.

La ecuación diferencial de las pequeñas oscilaciones en un medio estratificado

El primer paso en el estudio de las oscilaciones en un fluido no uniforme es deducir la ecuación diferencial que describe el fenómeno. Si tomamos el eje z en la dirección vertical, nuestro estado no perturbado está caracterizado por

$$\mathbf{u} = 0 \quad , \quad p = p(z) \quad , \quad \rho = \rho(z) \quad \text{con} \quad \frac{dp}{dz} = -g\rho(z) \quad (10.82)$$

Para simplificar el análisis, consideraremos solamente ondas de pequeña amplitud, por lo tanto vamos a suponer que en presencia de la perturbación las variables que describen el flujo son

$$\mathbf{u}' = \delta\mathbf{u} \quad , \quad p' = p + \delta p \quad , \quad \rho' = \rho + \delta\rho \quad (10.83)$$

donde $\delta\mathbf{u}$, δp y $\delta\rho$ son pequeñas perturbaciones. Vamos a suponer también que las perturbaciones son adiabáticas, lo cual es razonable en vista de lo que se acaba de ver. Por lo tanto, las ecuaciones que gobiernan el flujo son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho' \mathbf{u}') &= 0 \\
\rho' \left[\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' \right] &= -\nabla p' - \rho g \mathbf{e}_z \\
\frac{\partial s'}{\partial t} + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) s' &= 0
\end{aligned} \tag{10.84}$$

donde $s'(p', \rho') = s(p, \rho) + \delta s$ es la entropía por unidad de masa. Por ahora no vamos a especificar los perfiles de presión y densidad del estado no perturbado, ni haremos hipótesis acerca de la ecuación de estado del medio, de modo que nuestros resultados valen para un fluido cualquiera. Dado que las perturbaciones son pequeñas, vamos a linearizar las (10.84) descartando términos cuadráticos en las cantidades de perturbación. El resultado es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} &= -\delta u_z \frac{d\rho}{dz} - \rho \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \\
\rho \frac{\partial \delta u_x}{\partial t} &= -\frac{\partial \delta p}{\partial x} \\
\rho \frac{\partial \delta u_y}{\partial t} &= -\frac{\partial \delta p}{\partial y} \\
\rho \frac{\partial \delta u_z}{\partial t} &= -\frac{\partial \delta p}{\partial z} - g \delta \rho \\
\frac{\partial \delta s}{\partial t} &= -\delta u_z \frac{ds}{dz}
\end{aligned} \tag{10.85}$$

El procedimiento a seguir ahora consiste en eliminar sucesivamente las variables δs , $\delta \rho$, δu_x , δu_y y δp para obtener una única ecuación diferencial para δu_z . Comenzaremos por la última de las (10.85), que nos dice que la variación local de la entropía se debe simplemente al transporte convectivo (recordemos que la entropía del estado no perturbado depende de z).

Dado que la entropía $s(p, \rho)$ es una función de estado, podemos escribir

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_\rho \frac{dp}{dz} + \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_p \frac{d\rho}{dz} = -g\rho \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_\rho + \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_p \frac{d\rho}{dz} \tag{10.86}$$

Del mismo modo, puesto que $s' = s(p', \rho') = s(p, \rho) + \delta s$, resulta

$$\frac{\partial \delta s}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_\rho \frac{\partial \delta p}{\partial t} + \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_p \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} \tag{10.87}$$

Reemplazando las (10.86) y (10.87) en la última de las (10.85) obtenemos

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_\rho \frac{\partial \delta p}{\partial t} + \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_p \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = -\delta u_z \left[-g\rho \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_\rho + \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_p \frac{d\rho}{dz} \right] \tag{10.88}$$

Reordenando los términos de la (10.88) y recordando que

$$\frac{(\partial s / \partial \rho)_p}{(\partial s / \partial p)_\rho} = - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = -c^2 \quad (10.89)$$

podemos escribir la ecuación de la entropía en la forma

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} = \delta u_z g \rho + c^2 \left(\delta u_z \frac{d\rho}{dz} + \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} \right) \quad (10.90)$$

y usando la ecuación de conservación de la masa (la primera de las (10.85)) en la (10.90) obtenemos finalmente

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} = \delta u_z g \rho - \rho c^2 \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \quad (10.91)$$

Por lo tanto nuestro sistema de ecuaciones consiste en las primeras cuatro de las (10.85) más la (10.91):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} &= -\delta u_z \frac{d\rho}{dz} - \rho \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \\ \rho \frac{\partial \delta u_x}{\partial t} &= -\frac{\partial \delta p}{\partial x} \\ \rho \frac{\partial \delta u_y}{\partial t} &= -\frac{\partial \delta p}{\partial y} \\ \rho \frac{\partial \delta u_z}{\partial t} &= -\frac{\partial \delta p}{\partial z} - g \delta \rho \\ \frac{\partial \delta p}{\partial t} &= \delta u_z g \rho - \rho c^2 \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (10.92)$$

Puesto que los coeficientes de este sistema son funciones solamente de z , vamos a buscar soluciones de la forma

$$\delta p = P(z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \quad , \quad \delta \rho = R(z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \quad , \quad \delta \mathbf{u} = \mathbf{U}(z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \quad (10.93)$$

Sustituyendo entonces las (10.93) en las (10.92) obtenemos

$$\begin{aligned} \omega R &= \rho(k_x U_x + k_y U_y) - i \left(U_z \frac{d\rho}{dz} + \rho \frac{dU_z}{dz} \right) \\ \omega \rho U_x &= k_x P \\ \omega \rho U_y &= k_y P \\ \omega \rho U_z &= -i \frac{dP}{dz} - i g R \\ \omega P &= \rho c^2 (k_x U_x + k_y U_y) + i \rho \left(g U_z - c^2 \frac{dU_z}{dz} \right) \end{aligned} \quad (10.94)$$

Usando la segunda y la tercera de estas ecuaciones e introduciendo el vector número de onda horizontal $\mathbf{k}_h = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y$, podemos escribir

$$k_x U_x + k_y U_y = k_h U_h = \frac{k_h^2}{\omega \rho} P \quad (10.95)$$

donde U_h es el módulo de la componente horizontal de \mathbf{U} .

Sustituyendo esta expresión en la última de las (10.94) obtenemos

$$P = \frac{i\omega\rho}{\omega^2 - c^2 k_h^2} \left(g U_z - c^2 \frac{dU_z}{dz} \right) \quad (10.96)$$

y usando esta expresión de P y la (10.95) en la tercera de las (10.94) resulta

$$R = \frac{i}{\omega} \frac{\rho k_h^2}{\omega^2 - c^2 k_h^2} \left(g U_z - c^2 \frac{dU_z}{dz} \right) - i \left(U_z \frac{d\rho}{dz} + \rho \frac{dU_z}{dz} \right) \quad (10.97)$$

Por lo tanto tenemos todas nuestras variables expresadas en términos de U_z y sus derivadas. Reemplazando ahora P y R de la (10.96) y (10.97) en la cuarta de las (10.94) obtenemos

$$\begin{aligned} \omega \rho U_z = \frac{d}{dz} \left[\frac{\omega \rho}{\omega^2 - c^2 k_h^2} \left(g U_z - c^2 \frac{dU_z}{dz} \right) \right] + \\ + g \left[\frac{1}{\omega} \frac{\rho k_h^2}{\omega^2 - c^2 k_h^2} \left(g U_z - c^2 \frac{dU_z}{dz} \right) - \left(U_z \frac{d\rho}{dz} + \rho \frac{dU_z}{dz} \right) \right] \end{aligned} \quad (10.98)$$

Reordenando los términos de esta ecuación resulta

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} \left[\frac{\rho \omega^2 c^2}{\omega^2 - c^2 k_h^2} \frac{dU_z}{dz} \right] + U_z \left\{ \omega^2 + \omega_B^2 \frac{c^2 k_h^2}{\omega^2 - c^2 k_h^2} - g \frac{d}{dz} \left(\frac{c^2 k_h^2}{\omega^2 - c^2 k_h^2} \right) \right\} = 0 \quad (10.99)$$

donde hemos definido la *frecuencia de Brunt-Väisälä*, también denominada *frecuencia de flotación*, como

$$\omega_B^2 = g \left(-\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} - \frac{g}{c^2} \right) \quad (10.100)$$

Veremos que ω_B es una frecuencia característica del problema que juega un rol muy importante. La ecuación (10.99) es el resultado buscado, y antes de proseguir conviene hacer algunos comentarios. La principal virtud de la (10.99) es su generalidad, pues en principio permite estudiar las oscilaciones de un fluido en reposo con una estratificación arbitraria. Por de pronto el lector podrá observar que en el caso particular $g = 0$ y sin estratificación, a partir de la (10.99) se recuperan nuestros resultados anteriores para las ondas acústicas. Con $g = 0$, pero con estratificación, la (10.99) permite estudiar la propagación de ondas acústicas en un medio no uniforme. La (10.99) también sirve como punto de partida para estudiar la estabilidad de la interfase entre dos fluidos uniformes pero de propiedades diferentes, como así también la reflexión y transmisión de ondas a través de dicha interfase. No es difícil, siguiendo el mismo procedimiento, deducir una ecuación diferencial aún más general que la (10.99), que rige las oscilaciones de un fluido estratificado en el cual las capas horizontales se *mueven* en el estado no perturbado con una velocidad $\mathbf{u} = u_x(z)\mathbf{e}_x + u_y(z)\mathbf{e}_y$. La ecuación que se obtiene es

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} \left[\frac{\rho \bar{\omega}^2 c^2}{\bar{\omega}^2 - c^2 k_h^2} \frac{dU_z}{dz} \right] + U_z \left\{ \bar{\omega}^2 + \omega_B^2 \frac{c^2 k_h^2}{\bar{\omega}^2 - c^2 k_h^2} - g \frac{d}{dz} \left(\frac{c^2 k_h^2}{\bar{\omega}^2 - c^2 k_h^2} \right) \right\} = 0 \quad (10.101)$$

donde $\bar{\omega}(z) = \omega - \mathbf{k}_h \cdot \mathbf{u}$ es la frecuencia que ve un observador que se mueve junto con el fluido de la capa z . Mediante esta ecuación se puede investigar una gran variedad de problemas, entre los cuales se cuentan las inestabilidades de flujos paralelos.

Antes de estudiar las soluciones de la ec. (10.99) conviene estudiar tres clases de soluciones particulares del sistema (10.94) que no están incluidas entre las soluciones de la ec. (10.99): las *oscilaciones de Brunt-Väisälä*, las *ondas de Lamb* y las *ondas de superficie*. Estos modos se perdieron por el camino, por así decir, por la forma como procedimos para llegar a la (10.99).

Las oscilaciones de Brunt-Väisälä y la estabilidad de un fluido estratificado

Consideremos una perturbación que consiste de un movimiento *puramente vertical* (esto es $U_x \equiv 0$, $U_y \equiv 0$). El sistema (10.94) se reduce entonces a

$$\begin{aligned} \omega R &= -i \left(U_z \frac{d\rho}{dz} + \rho \frac{dU_z}{dz} \right) \\ 0 &= k_h P \\ \omega \rho U_z &= -i \frac{dP}{dz} - igR \\ \omega P &= i\rho \left(gU_z - c^2 \frac{dU_z}{dz} \right) \end{aligned} \quad (10.102)$$

Consideremos la segunda y la tercera de estas ecuaciones. Si $k_h = 0$, eliminando P y R entre las tres restantes ecuaciones se llega a una ecuación diferencial para U_z que no es otra cosa que el caso particular $k_h = 0$ de la (10.99). Por lo tanto este tipo de solución no trae novedades. Si en cambio k_h no es nulo, entonces debe ser $P = 0$ y quedan las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \omega R &= -i \left(U_z \frac{d\rho}{dz} + \rho \frac{dU_z}{dz} \right) \\ \omega \rho U_z &= -igR \\ \frac{dU_z}{dz} &= \frac{g}{c^2} U_z \end{aligned} \quad (10.103)$$

Si eliminamos R entre las dos primeras ecuaciones y usamos la tercera para expresar dU_z/dz en términos de U_z resulta

$$(\omega^2 - \omega_B^2) U_z = 0 \quad (10.104)$$

Por lo tanto, tendremos una solución no trivial si

$$\omega = \pm \omega_B \quad (10.105)$$

Las soluciones consisten pues en oscilaciones verticales con la frecuencia de Brunt-Väisälä y con $k_h \neq 0$ cualquiera. La dependencia de U_z con z proviene de la estratificación (a través de $c(z)$) y se obtiene resolviendo la ecuación

$$\frac{dU_z}{dz} = \frac{g}{c^2} U_z \quad (10.106)$$

En términos de U_z se obtiene R como

$$R = \pm i \frac{\rho \omega_B}{g} U_z \quad (10.107)$$

Estas perturbaciones se llaman *oscilaciones de Brunt-Väisälä*, y tienen importancia porque determinan la *estabilidad* de la estratificación y producen interesantes fenómenos atmosféricos.

Estabilidad de un fluido estratificado

Recordemos la definición (10.100) de la frecuencia de Brunt-Väisälä. Si se cumple que

$$\omega_B^2 = g \left(-\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} - \frac{g}{c^2} \right) < 0 \quad (10.108)$$

ω_B es imaginaria, y en ese caso hay perturbaciones que crecen exponencialmente con el tiempo¹⁰, y por lo tanto la estratificación es *inestable*. La inestabilidad se denomina *convectiva* pues da origen a corrientes convectivas ascendentes o descendentes.

Como se ve de la (10.108), el signo de ω_B^2 depende de las características de la estratificación. El significado de la condición (10.108) se entiende si observamos que $dp = -\rho g dz$ es la variación de la presión sobre un elemento del fluido debida a una variación dz de su altura desde z a $z + dz$ (Fig. 10.5). Si el elemento evoluciona adiabáticamente, esta variación de presión produce una variación de densidad $d\rho_{ad} = dp/c^2 = -(\rho g/c^2) dz$. Por otra parte la diferencia entre la densidad en $z + dz$ y en z es $d\rho = (d\rho/dz) dz$, donde $d\rho/dz$ es el gradiente de densidad propio de la estratificación. Claramente, si $d\rho_{ad} < d\rho$ la estratificación es inestable, pues la diferencia entre el empuje y el peso produce una resultante tendiente a incrementar el apartamiento del elemento desde su posición de equilibrio. Pero esta condición de inestabilidad equivale a pedir

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} - \frac{g}{c^2} < 0 \quad (10.109)$$

¹⁰ El crecimiento exponencial ocurre solamente mientras la perturbación se mantiene pequeña, de modo que valgan las aproximaciones en base a las cuales hemos desarrollado nuestra teoría. Cuando la perturbación alcanza una magnitud apreciable ya no se pueden despreciar los términos no lineales de las ecuaciones, y el cálculo de su evolución se tiene que hacer en base a las ecuaciones completas, lo cual se puede llevar a cabo sólo numéricamente y aún así es bastante difícil. El crecimiento de la inestabilidad, por supuesto, deja de ser exponencial. Pero a los fines de determinar la inestabilidad de la estratificación, nuestra teoría lineal alcanza, en el sentido que si la estratificación es inestable de acuerdo con la teoría lineal, seguramente sigue siendo inestable también de acuerdo con la teoría completa, no lineal. Lo que no es cierto es la proposición inversa: el hecho que un sistema sea estable frente a pequeñas perturbaciones *no garantiza* que sea estable frente a perturbaciones de amplitud finita.

que es precisamente la (10.108).

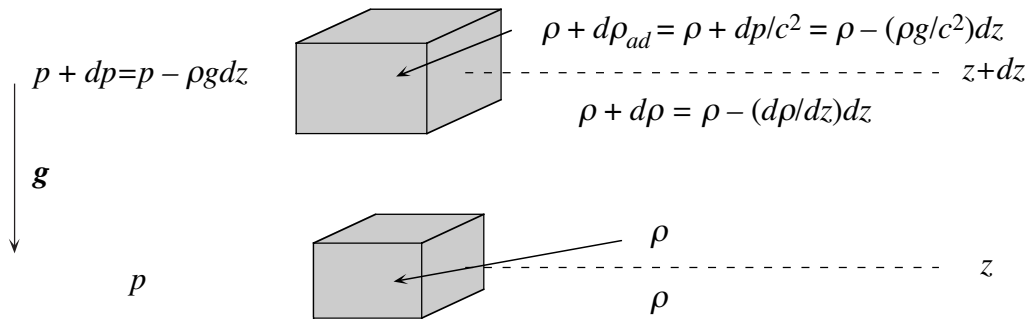


Fig. 10.5 Inestabilidad de un fluido estratificado. Si una parcela se desplaza verticalmente y evoluciona adiabáticamente, su densidad es diferente de la que tiene el fluido que la rodea en su nueva posición. Por lo tanto el peso y el empuje no se equilibran. Si $d\rho_{ad} < d\rho$, la estratificación es inestable, pues la diferencia entre el empuje y el peso produce una resultante que tiende a apartar al elemento de su posición de equilibrio.

En el caso de un fluido *estrictamente* incompresible se tiene $d\rho_{ad} = 0$, lo que equivale tomar el límite $c \rightarrow \infty$ en la expresión general

$$\left(\frac{d\rho}{dz}\right)_{ad} = -\frac{\rho g}{c^2} \quad (10.110)$$

Por lo tanto en el límite incompresible la condición de inestabilidad se reduce a

$$\omega_B^2 = -\frac{g}{\rho} \frac{d\rho}{dz} < 0 \quad \text{o sea} \quad \frac{d\rho}{dz} > 0 \quad (10.111)$$

que nos dice que la estratificación es inestable si la densidad aumenta con la altura.

En el Capítulo 2 analizamos la estabilidad de una atmósfera de gas ideal y también mencionamos la condición de estabilidad para un líquido incompresible con una estratificación de densidad. Vemos ahora que nuestro análisis nos permite encontrar el criterio general de inestabilidad para un fluido estratificado con una ecuación de estado cualquiera, que incluye como casos particulares los que discutimos en el Capítulo 2.

Las ondas de Lamb

Otras soluciones importantes del sistema (10.94) consisten de oscilaciones en las cuales el movimiento es *puramente horizontal* (esto es $U_z \equiv 0$). En este caso las (10.94) se reducen a

$$\begin{aligned} \omega R &= \rho k_h U_h \\ \omega \rho U_h &= k_h P \\ 0 &= \frac{dP}{dz} + gR \\ \omega P &= \rho c^2 k_h U_h \end{aligned} \quad (10.112)$$

Eliminando U_h entre la segunda y la cuarta de las (10.112) se obtiene

$$(\omega^2 - c^2 k_h^2)P = 0 \quad (10.113)$$

Para que esta ecuación tenga una solución no trivial se debe cumplir la condición

$$\omega = \pm c k_h \quad (10.114)$$

que es la relación de dispersión de las ondas sonoras. Por lo tanto estas oscilaciones, que se llaman *ondas de Lamb*, son ondas sonoras que se propagan horizontalmente. Para conocer su estructura falta todavía determinar la dependencia en z de la perturbación debida a la estratificación. Resolviendo el sistema de ecuaciones (10.112) con ω dado por la (10.114) obtenemos

$$R = \frac{P}{c^2}, \quad U_h = \pm \frac{P}{\rho c} \quad (10.115)$$

donde P se obtiene en función de la estratificación integrando la ecuación

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{g}{c^2} P \quad (10.116)$$

El único efecto de la gravedad sobre estos modos es la dependencia de R , P y U con la altura.

Las ondas de superficie

Consisten de oscilaciones para las cuales el movimiento es *estrictamente incompresible* (es decir $\nabla \cdot \delta \mathbf{u} = 0$). En este caso el sistema (10.94) se reduce a

$$\begin{aligned} R &= -\frac{i}{\omega} U_z \frac{d\rho}{dz} \\ U_h &= \frac{k_h}{\rho \omega} P \\ U_z &= -\frac{i}{\omega \rho} \left(gR + \frac{dP}{dz} \right) \\ P &= i \frac{g\rho}{\omega} U_z \end{aligned} \quad (10.117)$$

A estas ecuaciones tenemos que agregar la condición $\nabla \cdot \delta \mathbf{u} = 0$ que se escribe como

$$U_h = \frac{i}{k_h} \frac{dU_z}{dz} \quad (10.118)$$

Sustituyendo P y R en la tercera de las (10.117) resulta

$$U_z = \frac{g}{\omega^2} \frac{dU_z}{dz} \quad (10.119)$$

Por otra parte, de la segunda de las (10.117) y la (10.118) obtenemos

$$\frac{dU_z}{dz} = -i \frac{k_h^2}{\rho\omega} P \quad (10.120)$$

Sustituyendo en esta ecuación a P por medio de la última de las (10.117) resulta

$$\frac{dU_z}{dz} = \frac{gk_h^2}{\omega^2} U_z \quad (10.121)$$

Antes de integrar esta ecuación para obtener el perfil de U_z , usamos la (10.121) en la (10.119) para obtener la condición de compatibilidad

$$(\omega^4 - g^2 k_h^2) U_z = 0 \quad (10.122)$$

Por lo tanto tendremos una solución no trivial solo si

$$\omega^2 = gk_h \quad (10.123)$$

Usando la (10.123) en la (10.120) e integrando resulta

$$U_z = U_{0z} e^{k_h z}, \quad U_{0z} = \text{cte.} \quad (10.124)$$

Puesto que U_z diverge para $z \rightarrow \infty$ estas soluciones tienen sentido solamente si el fluido tiene una superficie libre que lo limita superiormente. Vemos entonces que estos modos no son otra cosa que la generalización para un medio estratificado de las ondas de gravedad que estudiamos en el Capítulo 9.

Ondas internas en una estratificación exponencial

Volviendo ahora a la ec. (10.99), para progresar más es preciso conocer los perfiles de densidad $\rho(z)$ y de presión $p(z)$ (o, lo que es lo mismo, $c(z)$) en el estado no perturbado. En general, debido a la forma complicada en que interviene la estratificación, sólo es posible obtener soluciones numéricas. Cuando las variaciones de la densidad y la presión con la altura son lentas, en el sentido que su escala espacial de variación, L_z , es mucho mayor que la escala λ_z sobre la cual varían las cantidades de perturbación, se puede emplear una aproximación muy útil, llamada *aproximación de la óptica geométrica*, o *aproximación WKB*¹¹. En efecto, si $\lambda_z \ll L_z$, se puede suponer que U_z es de la forma $U_z = A(z) \exp[ik_z(z)z]$ donde $A(z)$ y $k_z(z)$ (con $|k_z(z)| \approx 1/\lambda_z$) son funciones de z que varían lentamente sobre la escala L_z , mientras que la variación rápida sobre la escala λ_z está dada por la exponencial compleja (expresiones análogas valen para las demás cantidades que describen la perturbación). Con estas hipótesis es posible plantear una solución por iteraciones de la (10.99), que permite determinar las funciones incógnitas $A(z)$ y $k(z)$ como series de potencias de la cantidad pequeña λ_z/L_z . Por razones de brevedad no vamos a usar esta técnica, pero la mencionamos para conocimiento del lector, que puede encontrar exposiciones detalladas en varios textos de Óptica y de Mecánica Cuántica.

¹¹ El acrónimo corresponde a las iniciales de Wentzel, Kramers y Brillouin, que desarrollaron el método para estudiar la propagación de ondas en medios inhomogéneos. También se suele emplear el acrónimo WKBJ, para reconocer las contribuciones de Jeffreys al mismo problema.

La (10.99) tiene soluciones analíticas cuando la densidad del estado no perturbado varía en forma exponencial con la altura y la velocidad del sonido no depende de z , es decir

$$\rho = \rho_0 e^{-z/h} \quad , \quad \frac{dc}{dz} = 0 \quad , \quad \omega_B^2 = g \left(-\frac{g}{c^2} + \frac{1}{h} \right) \quad (10.125)$$

Este es el caso, por ejemplo, de una atmósfera isotérmica de un gas ideal (como ya vimos en el Capítulo 2), y se tiene entonces

$$h = \frac{c^2}{\gamma g} = \frac{RT}{Mg} \quad , \quad \omega_B^2 = (\gamma - 1) \frac{g^2}{c^2} \quad (10.126)$$

El interés de estudiar este caso idealizado reside en que al poder expresar la solución mediante fórmulas sencillas se aprecian mejor las propiedades de las ondas en que estamos interesados. Con las hipótesis (10.126) la (10.99) se simplifica considerablemente y queda

$$\frac{d^2 U_z}{dz^2} - 2q \frac{dU_z}{dz} + U_z \left\{ \frac{\omega^2}{c^2} - k_h^2 \left(1 - \frac{\omega_B^2}{\omega^2} \right) \right\} = 0 \quad (10.127)$$

donde $q = 1/2h$. La (10.128) es una ecuación con coeficientes constantes, cuyas soluciones son de la forma

$$U_z = A e^{(q \pm ik_z)z} \quad , \quad A = \text{cte.} \quad (10.128)$$

Sustituyendo (10.128) en (10.127) obtenemos la condición que determina el valor de k_z como

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_h^2 \left(1 - \frac{\omega_B^2}{\omega^2} \right) - q^2 \quad (10.129)$$

La (10.129) es la *relación de dispersión* de las *ondas internas*. Para analizarla mejor, conviene introducir la cantidad Γ , definida por la relación

$$q = \frac{g}{c^2} - \Gamma \quad (10.130)$$

En términos de Γ , tenemos que

$$\omega_B^2 = g \left(\frac{g}{c^2} - 2\Gamma \right) \quad , \quad q^2 c^2 \equiv \omega_Q^2 = \omega_B^2 + c^2 \Gamma^2 \quad (10.131)$$

y la relación de dispersión se escribe como

$$c^2 k_z^2 = (\omega^2 - \omega_Q^2) \left(1 - \frac{c^2 k_h^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_B^2}{\omega^2 - \omega_Q^2} \right) \quad (10.132)$$

Para ver bajo que condiciones la perturbación se puede propagar en la dirección vertical, tenemos que examinar el signo del miembro derecho de la (10.132). El primer factor es positivo si

$\omega^2 > \omega_Q^2$ y negativo si $\omega^2 < \omega_Q^2$. En cuanto al segundo factor, es positivo si $k_h^2 < H^2$ y negativo si $k_h^2 > H^2$, donde el valor crítico H está dado por

$$H^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega^2 - \omega_Q^2}{\omega^2 - \omega_B^2} \quad (10.133)$$

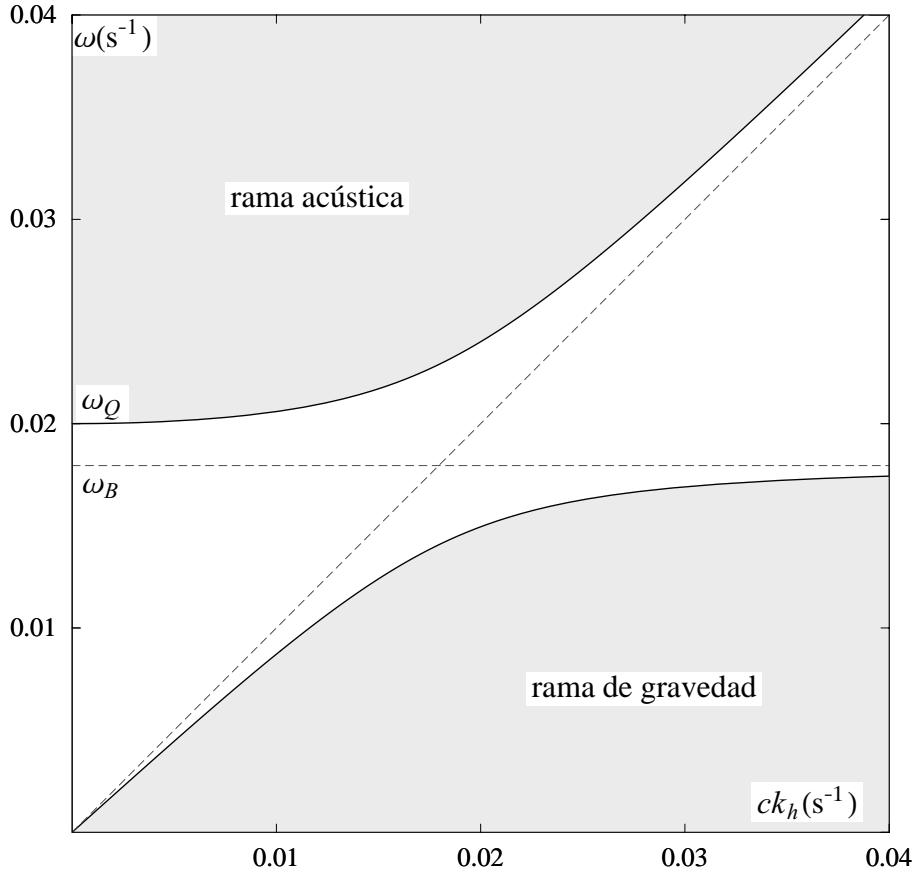


Fig. 10.6. Espectro de las ondas internas en una atmósfera isoterma (con $T \approx 15 \text{ }^\circ\text{C}$). Además de las ramas acústica y de gravedad (áreas grises) se han indicado con líneas de trazos las ondas de Lamb y las oscilaciones de Brunt-Väisälä.

Notar que H es real para $\omega^2 < \omega_B^2$ y $\omega^2 > \omega_Q^2$, e imaginario en el intervalo $\omega_B^2 < \omega^2 < \omega_Q^2$. Por lo tanto los modos que se pueden propagar se dividen en dos *ramas*, como se puede apreciar en el diagrama de la Fig. 10.6. Una rama corresponde a tener $\omega^2 > \omega_Q^2$ y $k_h^2 < H^2$, con lo cual ambos factores en la (10.132) son positivos; esta rama se caracteriza porque las oscilaciones tienen frecuencias *altas* y como veremos es la *rama acústica*. La otra rama corresponde a tener $\omega^2 < \omega_B^2$ y $k_h^2 > H^2$ (entonces ambos factores en la (10.132) son negativos); se caracteriza porque las oscilaciones tienen frecuencias *bajas* y constituye la *rama de gravedad*. Obsérvese que la rama de gravedad existe solamente si $g \neq 0$ y si hay estratificación. Vamos ahora a analizar las propiedades de estas ondas. Para eso escribimos la relación de dispersión (10.132) en la forma

$$\omega^4 - \omega^2 c^2 (k^2 + q^2) + c^2 k^2 \cos^2 \theta \omega_B^2 = 0 \quad (10.134)$$

donde hemos puesto $k^2 \equiv k_h^2 + k_z^2$ y $\cos\theta = k_h/k$. Resolviendo para ω^2 esta ecuación obtenemos

$$\omega_A^2 = \frac{c^2 k^2}{2} \left\{ 1 + \frac{q^2}{k^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{q^2}{k^2}\right)^2 - 4 \cos^2 \theta \frac{\omega_B^2}{k^2 c^2}} \right\} \quad (10.135)$$

y

$$\omega_G^2 = \frac{c^2 k^2}{2} \left\{ 1 + \frac{q^2}{k^2} - \sqrt{\left(1 + \frac{q^2}{k^2}\right)^2 - 4 \cos^2 \theta \frac{\omega_B^2}{k^2 c^2}} \right\} \quad (10.136)$$

Es fácil verificar que la primera de estas ecuaciones es la relación de dispersión de la rama acústica mientras que la segunda es la relación de dispersión de la rama de gravedad.

En el caso de la atmósfera se encuentran los siguientes valores típicos

$$\omega_B \approx 0.018 \text{ s}^{-1} \quad , \quad q \approx 5.9 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1} \quad , \quad \Gamma \approx 2.543 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1} \quad (10.137)$$

El período de las oscilaciones de Brunt-Väisälä es entonces de unos 5-6 minutos. Por lo tanto los modos de la rama de gravedad están muy separados en frecuencia de los modos de la rama acústica, a excepción de infrasonidos de bajísima frecuencia próximos a $\omega_Q \approx 0.020 \text{ s}^{-1}$. Salvo en estos casos, es fácil verificar que el segundo término del radicando de las (10.136) es más pequeño que el primero por un factor del orden de $\omega_B^2/k^2 c^2 \approx 2 \times 10^{-9} [k_h(\text{m}^{-1})]^{-2}$. Por lo tanto para cualquier longitud de onda razonable es mucho menor que el primero. Lo mismo ocurre para estratificaciones en el agua. Por ese motivo podemos con muy buena aproximación poner

$$\omega_A = \pm ck + \dots \quad , \quad \omega_G = \pm \omega_B \cos\theta + \dots \quad (10.138)$$

donde $\cos\theta = k_h/k$ y los ... indican cantidades más pequeñas por factores del orden de $\omega_B^2/k^2 c^2$. Vemos así que la frecuencia de las ondas internas de gravedad es casi independiente del módulo del vector de onda k , y sólo depende del ángulo θ entre k y el plano (x, y) .

Si usamos las (10.138) junto con la expresión (10.128) de U_z (y las expresiones análogas para las demás cantidades que describen la onda) en las (10.94) es fácil verificar (dentro de la aproximación con la que se obtuvieron las (10.138)) que se cumple

$$\left(\frac{U_z}{U_h} \right)_A \approx \frac{k_z}{k_h} \quad , \quad \left(\frac{U_z}{U_h} \right)_G \approx \frac{k_h}{k_z} \quad (10.139)$$

para la rama acústica y de gravedad respectivamente. Las (10.139) muestran que los modos de la rama acústica son casi *longitudinales* (esto es, $\delta\mathbf{u}$ es paralelo al vector de onda k), mientras que las ondas internas de gravedad son casi *transversales* ($\delta\mathbf{u}$ es perpendicular a k).

Volviendo ahora a las fórmulas exactas (10.132) y (10.136) vemos que para ω y k fijos, la velocidad de fase $c_{A,G} = \omega_{A,G}/k$ de los modos de la rama acústica y de gravedad depende del ángulo θ . Para la rama acústica se cumple que

$$c_A(\theta = 0) \equiv c(1 + \Gamma^2/2k^2) \leq c_A(\theta) \leq c_A(\theta = \pi/2) = c(1 + q^2/2k^2) \quad (10.140)$$

En vista de la (10.137), la variación de c_A con θ es insignificante.

Para la rama de gravedad tenemos

$$c_G(\theta = 0) \equiv \omega_B / k \geq c_G(\theta) \geq c_G(\theta = \pi / 2) = 0 \quad (10.141)$$

Notar que $c_G / c_A \approx \omega_B / kc \approx 4 \times 10^{-4} / k_h (\text{m}^{-1})$ es siempre mucho menor que la unidad.

Las (10.136), y también las (10.140) y (10.141) muestran que los modos de ambas ramas son dispersivos, aunque los de la rama acústica sólo *muy débilmente*. Para entender mejor las propiedades dispersivas de estos modos es útil representar las *superficies de fase* en el espacio del vector número de onda \mathbf{k} , definidas por $\omega(\mathbf{k}) = \text{cte}$. (dado que existe simetría de rotación alrededor del eje k_z basta representar estas superficies como curvas en el plano (k_h, k_z)).

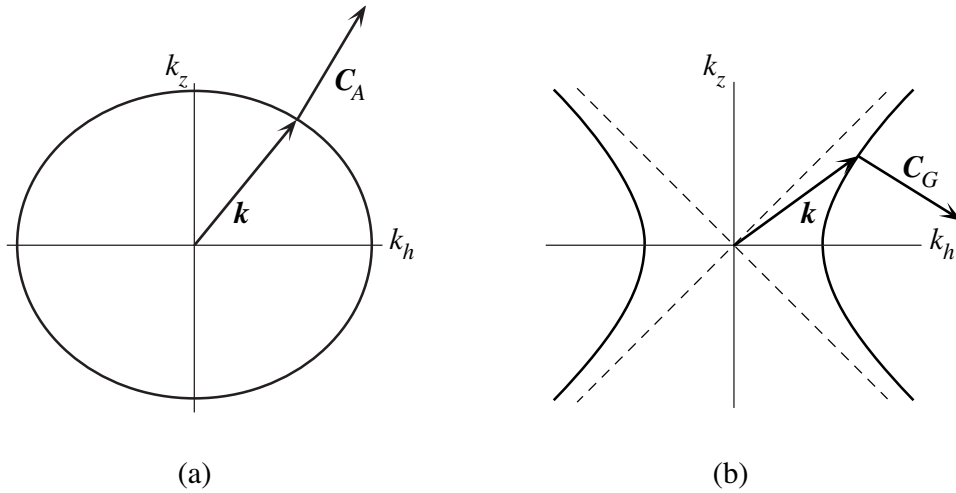


Fig. 10.7. Superficies de fase de las ondas de la rama acústica (a) y de la rama de gravedad (b). El diagrama es cualitativo. Se puede apreciar que la dirección de la velocidad de grupo de una onda de la rama acústica no coincide *exactamente* con la dirección de \mathbf{k} , debido a que la superficie de fase es un elipsoide achatado. La velocidad de grupo de una onda de la rama de gravedad, cuya superficie de fase es un hiperboloide, es aproximadamente perpendicular a \mathbf{k} .

Para la rama acústica, escribimos la (10.132) como

$$\frac{k_z^2}{Z_A^2} + \frac{k_h^2}{H_A^2} = 1 \quad \text{con} \quad Z_A^2 = \frac{\omega^2 - \omega_Q^2}{c^2} > 0, \quad H_A^2 = \frac{\omega^2 - \omega_Q^2}{c^2} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_B^2} > 0 \quad (10.142)$$

La (10.142) muestra que las superficies de fase constante son *elipsoides* de semiejes Z_A y H_A . Es fácil ver que $1 < H_A / Z_A \leq \Gamma / q$, por lo tanto los elipsoides son *achatados* (el achatamiento es apreciable sólo si ω está cerca del extremo inferior de la rama acústica: ya para ondas acústicas de unos pocos Hz se tiene $H_A / Z_A \approx 1$). La velocidad de grupo se obtiene tomando el gradiente de ω en el espacio del número de onda:

$$\mathbf{C} = \nabla_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) \quad (10.143)$$

y por consiguiente es perpendicular a las superficies de fase. Como se puede apreciar en la Fig. 10.7a (donde elegimos ω cerca del extremo inferior de la rama acústica), la dirección de la velocidad de grupo no coincide *exactamente* con la dirección de \mathbf{k} (y por lo tanto con la dirección de la velocidad de fase), sino que está ligeramente desviada hacia la dirección vertical.

Para la rama de gravedad, escribimos la (10.132) como

$$\frac{k_z^2}{Z_G^2} = \frac{k_h^2}{H_G^2} - 1 \quad \text{con} \quad Z_G^2 = \frac{\omega_Q^2 - \omega^2}{c^2} > 0, \quad H_G^2 = \frac{\omega_Q^2 - \omega^2}{c^2} \frac{\omega^2}{\omega_B^2 - \omega^2} > 0 \quad (10.144)$$

La (10.144) muestra que las superficies de fase constante de la rama de gravedad son *hiperboloideas* de semiejes Z_G y H_G . Obsérvese que

$$\frac{H_G^2}{Z_G^2} = \frac{\omega^2}{\omega_B^2 - \omega^2} \quad (10.145)$$

es una función creciente de ω .

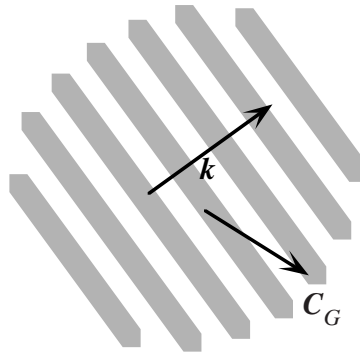


Fig. 10.8. Dispersión de un paquete de ondas internas de gravedad. El paquete se propaga en una dirección aproximadamente *paralela* a las crestas y valles, mientras que al mismo tiempo, las crestas y valles individuales se desplazan *transversalmente* a la dirección del movimiento del paquete. Los desplazamientos de los elementos del fluido debidos a la onda son aproximadamente transversales a \mathbf{k} .

Como se puede apreciar en la Fig. 10.7b, la dirección de la velocidad de grupo es aproximadamente *perpendicular* a \mathbf{k} (y por lo tanto a la dirección de la velocidad de fase). Si se usa la expresión aproximada (10.138) para calcular la velocidad de grupo (dejamos este cálculo como ejercicio para el lector), se obtiene como resultado que la velocidad de grupo es estrictamente perpendicular a \mathbf{k} , lo que es cierto sólo aproximadamente¹². De resultados de esto, un paquete de ondas que consiste de un conjunto de crestas y valles, como se muestra en la Fig. 10.8, se propaga en conjunto en una dirección muy aproximadamente *paralela* a las crestas y valles, mientras que al mismo tiempo, las crestas y valles individuales se desplazan *transversalmente* a la dirección del movimiento del paquete. Este comportamiento a primera vista sorprendente ha sido verificado experimentalmente.

¹² La aproximación (10.138) equivale a reemplazar el hiperboloide (10.144) por su cono asintótico.

La dispersión de las ondas internas de gravedad resulta ciertamente curiosa para quien no está familiarizado con la variedad de comportamientos que se dan con diferentes clases de ondas. Sin embargo, otras clases de ondas presentan el mismo tipo de dispersión, entre ellas las ondas magnetoacústicas que ocurren en los plasmas.

Las oscilaciones de Brunt-Väisälä y las ondas internas de gravedad son la causa de algunos interesantes fenómenos atmosféricos. Entre ellos se cuentan las *ondas de sotavento* (“lee waves”), que se presentan corriente abajo de obstáculos topográficos como colinas o montañas, y también cuando una intrusión de aire frío y denso penetra por debajo de una región de aire más cálida, como sucede cuando un frente frío avanza. La presencia del obstáculo induce en la corriente de aire oscilaciones verticales con la frecuencia de Brunt-Väisälä, que son arrastradas por la corriente. Si la velocidad del viento es v , la longitud de onda de la onda de sotavento es

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega_B} \quad (10.146)$$

Para una velocidad del viento de 10 m/s resulta $\lambda \approx 3.5$ km. Las corrientes ascendentes debidas a estas oscilaciones son aprovechadas por las aves rapaces y por los cultores del vuelo con planeadores para elevarse a grandes alturas. Cuando la humedad del aire es alta se produce condensación en las crestas de las ondas de sotavento, que se manifiesta por la aparición de nubes. En condiciones adecuadas se observan entonces nubes equiespaciadas en posiciones fijas respecto de la topografía.

Las *nubes lenticulares* (que por su forma peculiar algunos observadores no informados han interpretado a veces como OVNIs), los patrones de nubes lineares y equiespaciadas, y los patrones regulares de nubes conocidos vulgarmente como “cielo aborregado” que se observan frecuentemente cuando se aproxima un frente frío, también tienen su origen en esta clase de oscilaciones.