FÍSICA GENERAL
Fac. Cs. Exactas - UNCPBA
Cursada 2019

Cátedra

Teoría/Práctica (Comisión 1):

Prof. Olga Garbellini
Lic. Pablo Correa
Dr. Fernando Lanzini

Teoría/Práctica (Comisión 2):

Dr. Marcos Chaparro
Dr. Héctor García

Clases de Laboratorio:

Dra. Carolina Marié
Dr. Pablo Ravazzoli
Ing. Sebastián Jodra
Sr. Ignacio Papuccio

Página web

http://users.exa.unicen.edu.ar/catedras/fisicagl/index.html

Mail de contacto

fisicagl@exa.unicen.edu.ar

Nota importante:

En este documento se presentan las diapositivas proyectadas durante las clases teóricas. El material no pretende ser riguroso, ni tampoco es completo, ya que no incluye todos los contenidos dados en clase. Se pone a disposición de los estudiantes como material de estudio suplementario. Para tratamientos detallados de los diferentes temas, se recomienda acudir a la bibliografía sugerida en la página web de la cátedra.

F. Lanzini
Agosto 2019

Energía

La energía está presente en el Universo en varias formas. Todo proceso físico que ocurra en el Universo involucra energía y transferencias o transformaciones de energía.

El concepto de energía se aplica a sistemas mecánicos sin recurrir a las leyes de Newton, lo que permite simplificar algunos problemas.

El manejo del concepto de energía permite comprender fenómenos en los cuáles las Leyes de Newton no son útiles, tales como fenómenos térmicos y eléctricos.

Antes de comenzar a trabajar con el concepto de energía, conviene definir el concepto de *Trabajo*

Trabajo

El trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ aplicada sobre un determinado sistema que se desplaza a lo largo de una trayectoria entre el punto inicial *A* y el punto final *B* está dado por

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

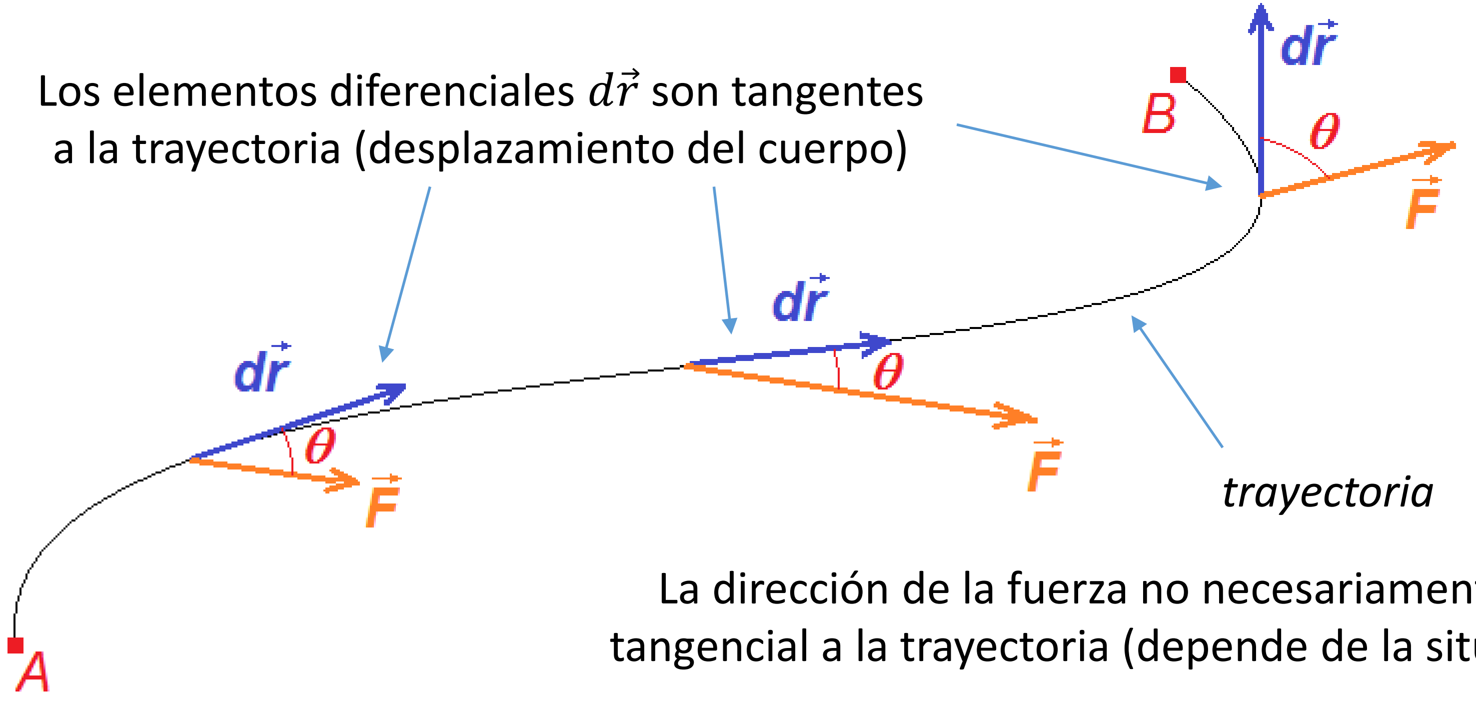
W = Trabajo

Trabajo – Definición

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

(Ec. 1) Definición de trabajo

Los elementos diferenciales $d\vec{r}$ son tangentes a la trayectoria (desplazamiento del cuerpo)



La dirección de la fuerza no necesariamente es tangencial a la trayectoria (depende de la situación)

En cada punto de la trayectoria hay que calcular el producto escalar $\vec{F} \cdot d\vec{r}$

Por definición de producto escalar,

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = |\vec{F}|\,|d\vec{r}|\,cos\theta = F\,dr\,cos\theta$$

θ es el ángulo entre $\vec{F}$ y $d\vec{r}$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B F\,dr\,cos\theta$$

Esta integral de línea se simplifica en muchos casos de interés, como veremos en los siguientes ejemplos….

En particular, si $\boldsymbol{F = cte.}$ y $\boldsymbol{\theta = cte.}$

$$W = \int_A^B F\,dr\,cos\theta = F\,cos\theta \int_A^B dr = F\,d\,cos\theta$$

$$\boxed{W = F\,d\,cos\theta}$$

(Ec. 2) Forma de calcular el trabajo cuando F=cte. y θ=cte.

Siendo $d = \int_A^B dr$ la distancia total recorrida

Trabajo

Sobre las unidades:

A partir de la definición, **Ec. 1**, $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$

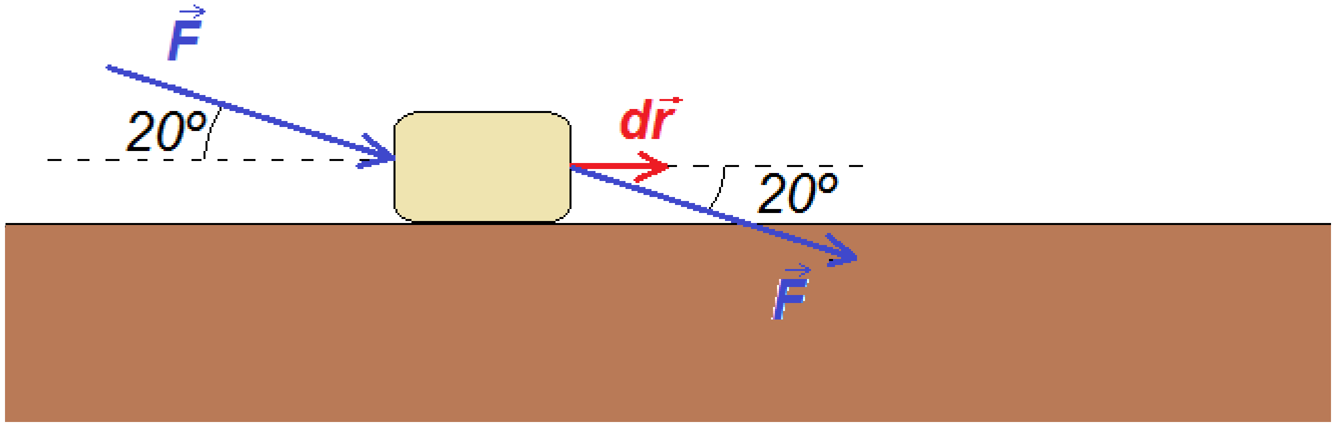
Vemos que las unidades de trabajo en el sistema MKS serán $N \cdot m = \boldsymbol{J}$ **(Joule)**

Veremos más adelante que también la energía se mide en *Joules* en el sistema MKS

Esto es así por cuanto el trabajo W es una transferencia de energía. Si W es el trabajo realizado sobre un sistema y W es positivo, la energía se transfiere *al* sistema; si W es negativo, la energía se transfiere *desde* el sistema.
(aunque esta convención de signos suele modificarse en otras ramas de la Física)

Trabajo - Ejemplos

Ejemplo 1 . Se aplica una fuerza de 4 N sobre un cuerpo de la manera mostrada en la Figura. (a) Hallar el trabajo realizado por la fuerza si el cuerpo se desplaza 5 m hacia la derecha. (La fuerza actúa durante todo el recorrido)



Respuesta: Dado que el desplazamiento del cuerpo es hacia la derecha, podemos decir que el elemento $d\vec{r}$ es un vector que apunta hacia la derecha en cada punto de la trayectoria.

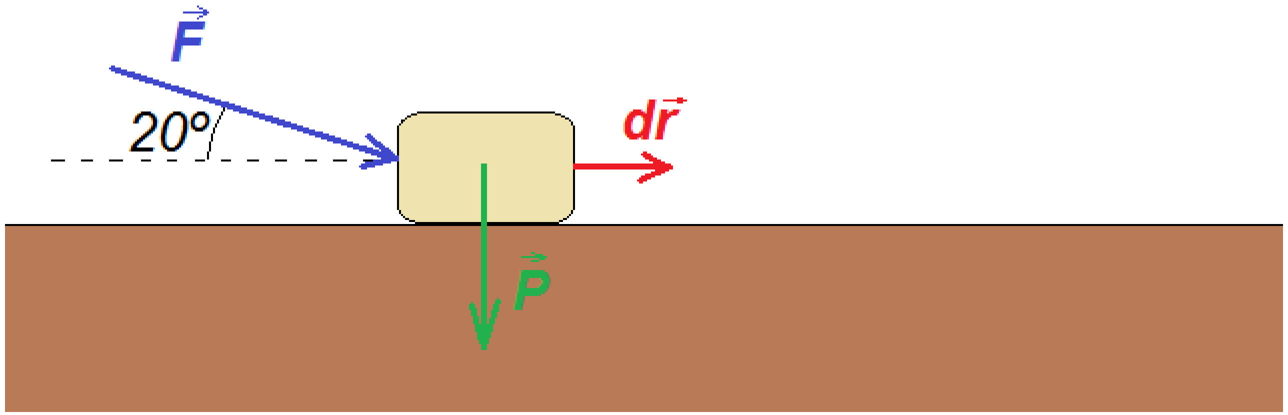
Trasladando los vectores $\vec{F}$ y $d\vec{r}$ de forma que tengan un origen común, vemos que forman un ángulo de 20º entre sí

Dado que $F = |\vec{F}| = 4N = cte.$, y que $\theta = 20° = cte.$, cumplen las condiciones para poder calcular el trabajo mediante la **(Ec. 2)**

Así que $W_F = F\, d \cos\theta = 4N \cdot 5m \cdot \cos 20º = 18.79\ J$

Ejemplo 1 (continuación) . (b) Hallar el trabajo realizado por la fuerza peso en la situación del problema anterior

Respuesta:



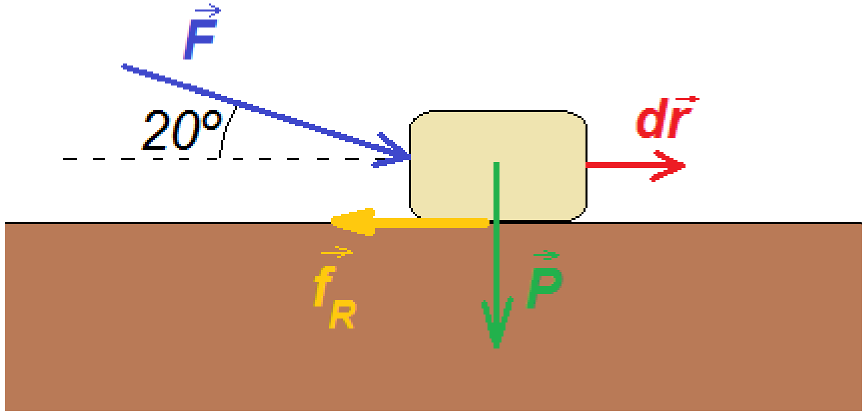
En este caso vemos que el ángulo formado por la fuerza $\vec{P}$ con el elemento de desplazamiento $d\vec{r}$ es 90º, así que, como se cumplen las condiciones para aplicar la **(Ec. 2)** ($F = P = mg = cte.$, $\theta = cte.$)

$$W_P = F\, d \cos\theta = m\, g\, d\, cos90° = m \cdot\ g\ \cdot d\ \cdot 0 = 0\ J$$

Podemos observar que una fuerza que es en todo punto perpendicular al desplazamiento no realiza trabajo sobre el sistema.

Ejemplo 1 (continuación) . (c) Suponiendo que, en el ejemplo anterior, existe rozamiento entre el cuerpo y la superficie, hallar el trabajo efectuado por la fuerza de roce (Datos: $m = 2\ kg$; $\mu = 0.3$)

Respuesta: Dado que las fuerzas de roce siempre son opuestas al movimiento, el ángulo entre $\vec{f}_R$ y $d\vec{r}$ es de 180º en todo punto del recorrido (Figura).



Además, $|\vec{f}_R| = f_R = \mu N = cte.$

Entonces podemos usar la **(Ec. 2)**

$$W_{f_R} = F\ d\ cos\theta = f_R\ d\ \underbrace{cos180°}_{= -1}$$

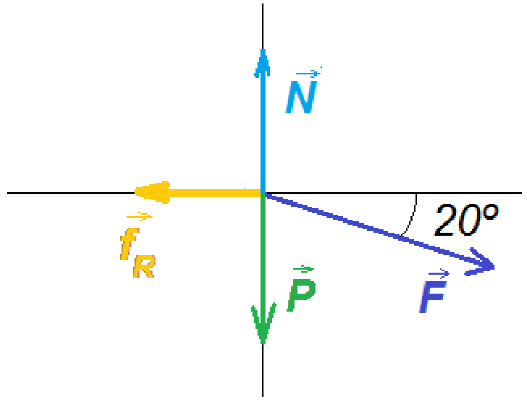
$$W_{f_R} = -\underbrace{f_R}_{= \mu N}\ d$$

$$W_{f_R} = -\mu\ N\ d$$

$$W_{f_R} = -0.3 \cdot 20.97N \cdot 5\ m = -31.455\ J$$

Note que, dado que las fuerzas de roce siempre tienen sentido contrario al desplazamiento, el trabajo que realizan sobre un sistema siempre tiene signo negativo.

Para hallar la normal, hagamos un análisis dinámico (diagrama de cuerpo libre)



de donde: $N = P + F\ sen\ 20º = mg + F\ sen\ 20º$

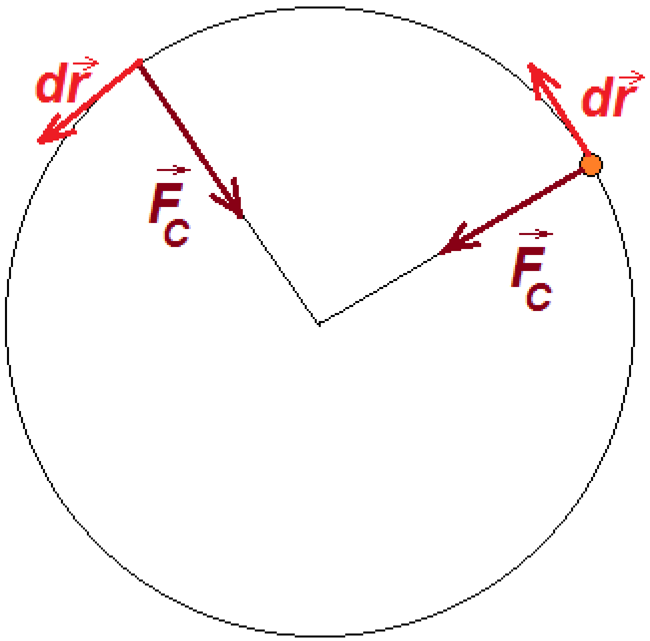
$N = 20.97\ N$

Trabajo - Ejemplos

Ejemplo 2 . Demuestre que, en un movimiento circular, el trabajo que hace la fuerza centrípeta es nulo.

***Respuesta*.** Sabemos que la fuerza centrípeta (cualquiera sea su origen, es decir, independientemente de que se trate de una tensión, una normal, etc.) apunta siempre en dirección radial, hacia el centro de giro (Figura).

Por otro lado, el cuerpo que gira (ya sea en sentido horario o antihorario), se mueve tangencialmente al círculo



Como puede observarse, en todo punto $\vec{F}_C \perp d\vec{r}$

Por consiguiente,

$$W_{F_C} = \int \vec{F}_C \cdot d\vec{r} = \int F_C \; dr \underbrace{\cos 90^\circ}_{\boxed{= 0}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W_{F_C} = 0}$$

Una nota de carácter matemático:

Consideremos el caso 3-D, en donde las componentes de la fuerza son $\vec{F} = \left(F_x,\ F_y,\ F_z \right)$.

El vector diferencial de desplazamiento se puede escribir como $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$

Utilizando la definición de producto escalar como suma de los productos de las componentes, la expresión para el trabajo queda

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \left(F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz \right)$$

A y B son los puntos inicial y final del movimiento considerado.
En el caso 3-D, cada punto queda especificado por 3 coordenadas:
$A = (x_A, y_A, z_A)$ y $B = (x_B, y_B, z_B)$

Para resolver la integral anterior se necesitan, en general, métodos de cálculo avanzados (Análisis Matemático II)

Para el caso unidimensional a lo largo del eje x:

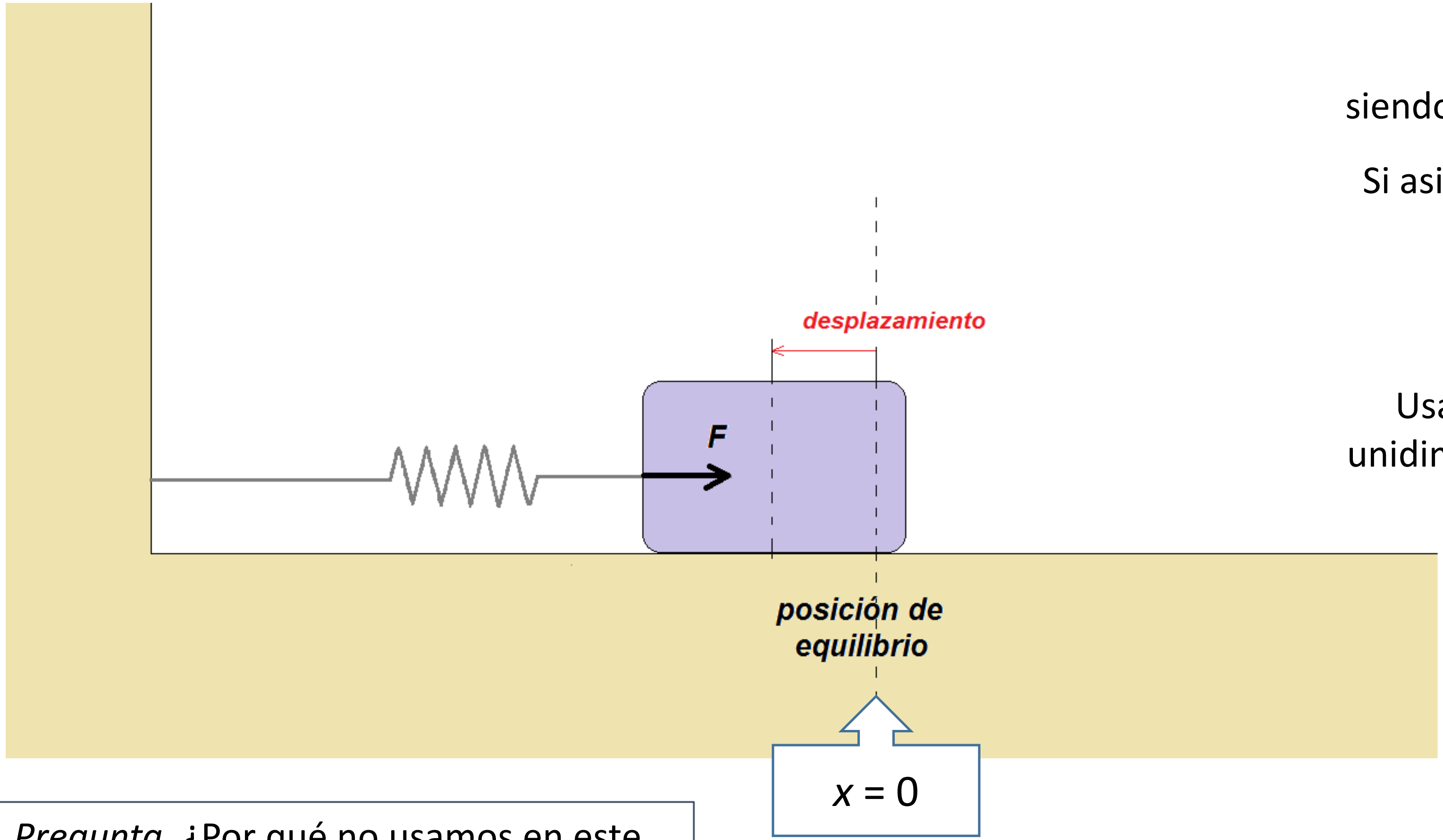
(Podremos resolverlo con métodos de Análisis Matemático I, ver el siguiente ejemplo)

$$\boxed{W = \int_{x_A}^{x_B} F_x\, dx}$$

Expresión para el trabajo en un problema unidimensional

Ejemplo 3. Trabajo realizado por un resorte. Un cuerpo de masa *m* está sujeto a un resorte de constante elástica *k*. Hallar el trabajo que hace el resorte sobre el cuerpo cuando se lo desplaza desde la posición inicial x_A hasta la posición final x_B

***Respuesta*.** Sabemos que un resorte ideal obedece la Ley de Hooke, siendo la fuerza que ejerce proporcional a su estiramiento (o compresión) desde la posición de equilibrio (Figura)



La fuerza elástica está dada por $F_{el} = -k\Delta x$

siendo Δx la separación desde la posición de equilibrio

Si asignamos el valor $x = 0$ en la posición de equilibrio

entonces $\Delta x = x$, y obtenemos:

$$F_{el} = -k \cdot x$$

Usando la expresión para el trabajo en un problema unidimensional, al desplazar el cuerpo desde x_A hasta x_B:

$$W_{el} = \int_{x_A}^{x_B} F_{el}\, dx = \int_{x_A}^{x_B} -k \cdot x \cdot dx =$$

$$-k \cdot \int_{x_A}^{x_B} x \cdot dx = -k \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x_A}^{x_B}$$

$$\boxed{W_{el} = k \cdot \left(\frac{x_A^2}{2} - \frac{x_B^2}{2}\right)}$$

Trabajo realizado por la fuerza elástica desde x_A hasta x_B:

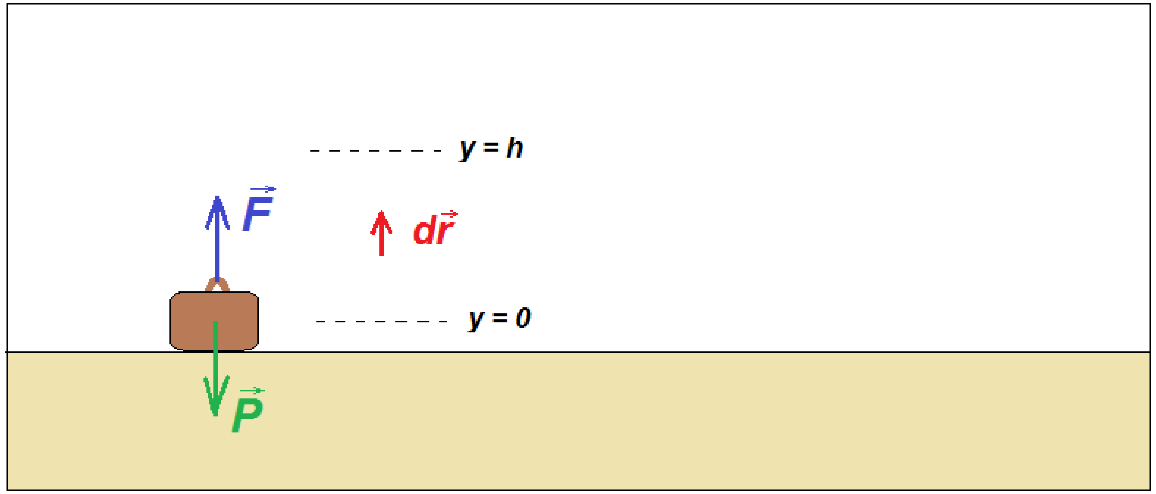
Pregunta. ¿Por qué no usamos en este caso la **Ec. (2)** para calcular el trabajo?

Trabajo - Ejemplos

Ejemplo 4. Una valija de masa *M* está apoyada en el suelo. Un hombre se acerca, levanta la valija (supongamos que lo hace con velocidad constante) hasta una altura *h*. Luego camina con la valija una distancia horizontal *d*. Finalmente, baja nuevamente la valija hasta el suelo (supongamos nuevamente que lo hace a velocidad constante). Hallar el trabajo realizado por el hombre sobre la valija en cada etapa.

Respuesta. Analicemos cada etapa por separado.

En la primera etapa el hombre levanta la valija desde $y = 0$ hasta $y = h$, realizando una fuerza $\vec{F}$



Suponemos que levanta la valija con velocidad constante $\Rightarrow$ $a_y = 0$

Por la 2ª Ley de Newton: $F - P = ma_y = 0$ $\Rightarrow$ $F = P = mg$

Como la fuerza aplicada por el hombre es hacia arriba, $\vec{F} \parallel d\vec{r}$ $\Rightarrow$ $\theta = 0$ $\Rightarrow$ $\cos\theta = 1$

Como $F = mg = cte.$, y como $\theta = 0° = cte$, podemos calcular el trabajo con la **Ec. 2** :

$$W_{hombre} = F\ d\ cos\theta = m\ g\ d\ cos0° = mgh$$

El hombre realiza sobre la valija un trabajo positivo de valor:

$$W_{hombre} = mgh$$

Pregunta: ¿Qué trabajo hizo la fuerza peso en esta etapa?

Respuesta: $W_{peso} = -mgh$

Trabajo - Ejemplos

Ejemplo 4 (cont.). Una valija de masa *M* está apoyada en el suelo. Un hombre se acerca, levanta la valija (supongamos que lo hace con velocidad constante) hasta una altura *h*. Luego camina con la valija una distancia horizontal *d*. Finalmente, baja nuevamente la valija hasta el suelo (supongamos, nuevamente, que lo hace a velocidad constante). Hallar el trabajo realizado por el hombre sobre la valija en cada etapa.

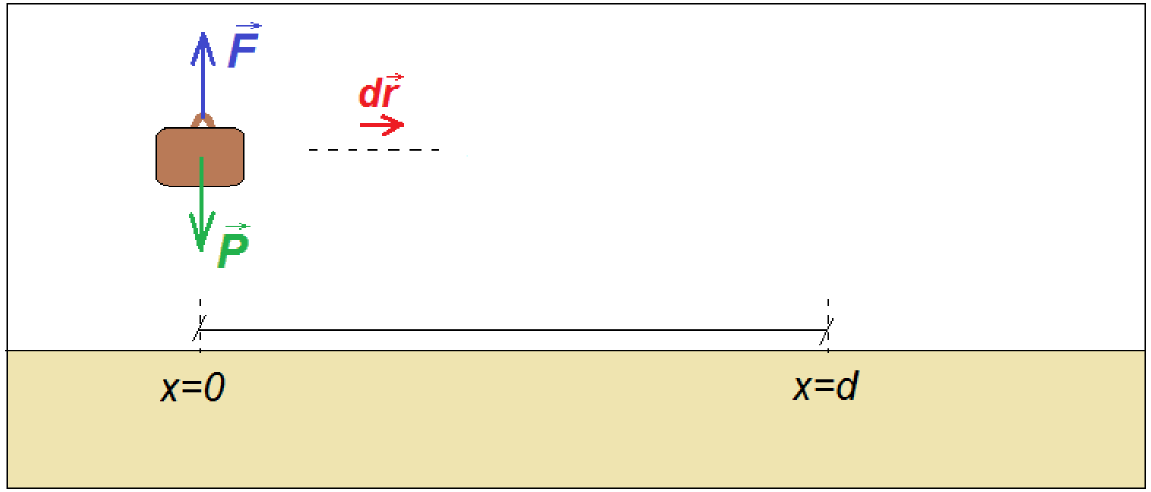
Respuesta.

En la segunda etapa el hombre camina una distancia horizontal d

¿Qué fuerza realiza el hombre sobre la valija en esta etapa?

La fuerza $\vec{F}$ ejercida por el hombre debe ser tal de evitar que la valija caiga.

Entonces $\vec{F}$ debe ser igual en módulo al peso $\vec{P}$ (pero debe tener el sentido contrario)



El vector desplazamiento $d\vec{r}$ tiene dirección horizontal en todo punto.

Podemos ver (Figura), que $\vec{F}$ es ⊥ a $d\vec{r}$ en todo punto

$$W_{hombre} = F\ d\ cos90° = m\ g\ d\ cos90°$$

cos 90°= 0

En esta etapa la persona no realiza trabajo sobre la valija:

$$W_{hombre} = 0\ J$$

Pregunta: ¿Qué trabajo realizó la fuerza peso en esta etapa?

Respuesta: $W_{peso} = 0\ J$

Trabajo - Ejemplos

Ejemplo 4 (cont.). Una valija de masa *M* está apoyada en el suelo. Un hombre se acerca, levanta la valija (supongamos que lo hace con velocidad constante) hasta una altura *h*. Luego camina con la valija una distancia horizontal *d*. Finalmente, baja nuevamente la valija hasta el suelo (supongamos nuevamente que lo hace a velocidad constante). Hallar el trabajo realizado por el hombre sobre la valija en cada etapa.

Respuesta.

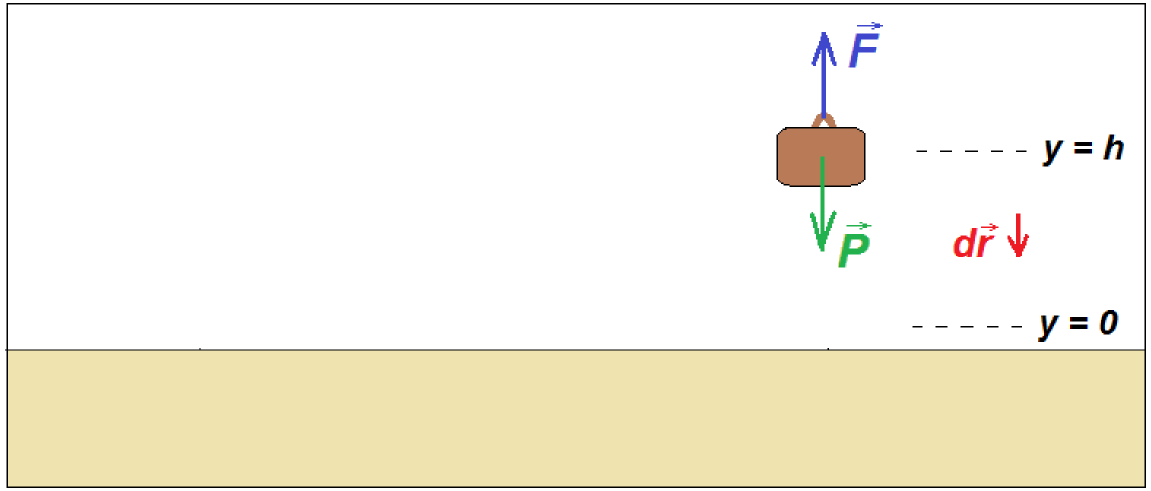
En la tercera etapa el hombre baja la valija desde $y = h$ hasta $y = 0$

Suponemos que la valija baja con velocidad constante ⟹ $a_y = 0$

Nuevamente, $\vec{F}$ debe ser igual *en módulo* al peso $\vec{P}$: $F = P = mg$

(Pero el *sentido* de $\vec{F}$ es opuesto al de $\vec{P}$)

El vector desplazamiento $d\vec{r}$ está dirigido, en todo punto, en el sentido negativo del eje y (Figura)



⟹ $\vec{F}$ y $d\vec{r}$ son antiparalelos (es decir, forman un ángulo de 180º, Figura)

⟹ $W_{hombre} = F\ d\ cos\theta = m\ g\ h\ cos180°$

cos 180°= -1

⟹ En esta etapa la persona realizó un trabajo negativo sobre la valija:

$$W_{hombre} = -mgh$$

Pregunta: ¿Qué trabajo realizó la fuerza peso en esta etapa?

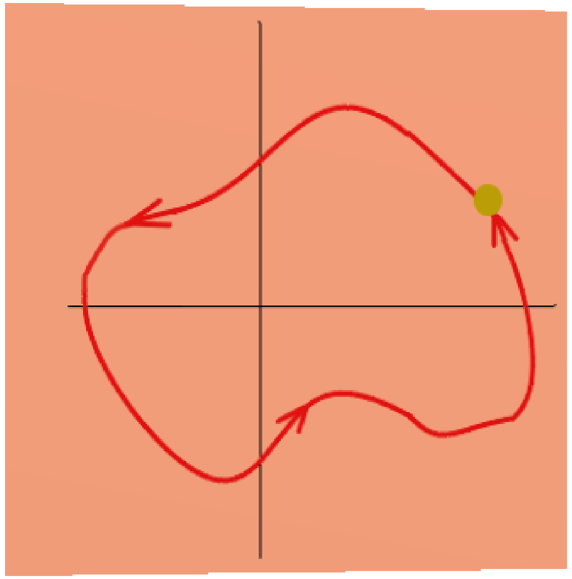
Respuesta: $W_{peso} = mgh$

Fuerzas Conservativas y No Conservativas – Definición

Una fuerza es conservativa cuando el trabajo que realiza sobre una partícula cuando ésta describe cualquier trayectoria cerrada es nulo.

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Esta relación solamente es válida para las fuerzas *conservativas*.



El círculo indica que la trayectoria es cerrada (es decir, el punto de partida y el de llegada son el mismo)

Existen otras fuerza (llamadas *no conservativas*), que no tienen esta propiedad

Fuerzas Conservativas y No Conservativas – Más usuales en Mecánica

<u>Conservativas:</u>

- Peso,
- Fuerza elástica

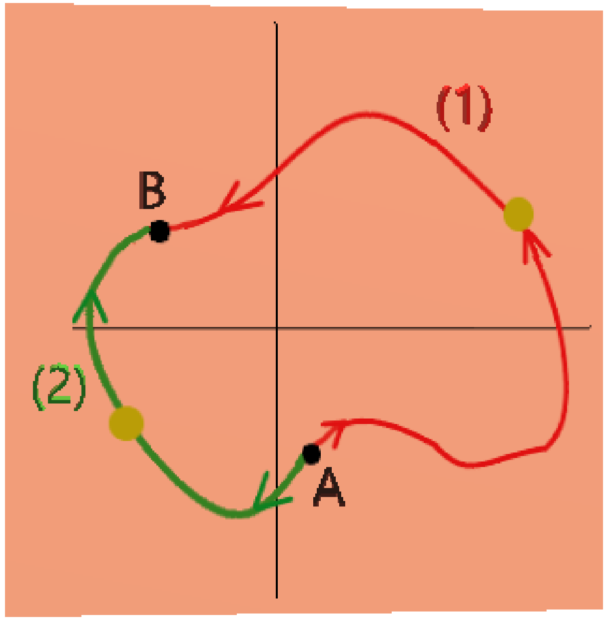
<u>No Conservativas:</u>

- Fuerza de roce

Fuerzas Conservativas y No Conservativas

De la definición de fuerza conservativa se puede demostrar la siguiente propiedad:

"Si una fuerza es conservativa, el trabajo que realiza sobre una partícula entre dos puntos dados es independiente de la trayectoria seguida"



La primera integral es el trabajo realizado por la fuerza entre los puntos A y B siguiendo una trayectoria (1)

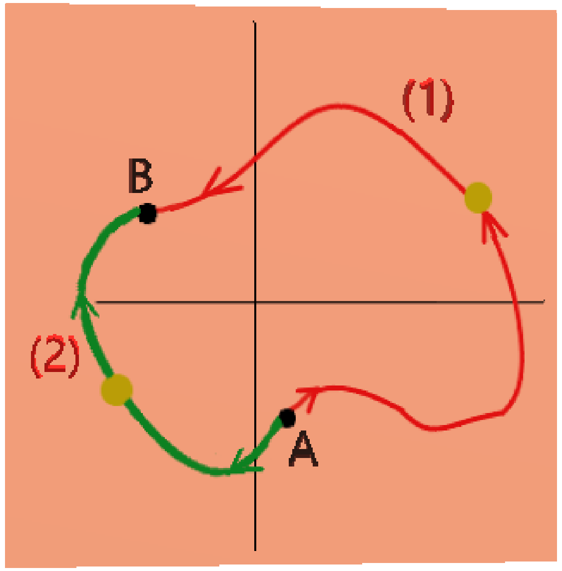
$$\boxed{\underset{(1)}{\int_A^B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \underset{(2)}{\int_A^B} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

La segunda integral es el trabajo realizado por la fuerza entre los puntos A y B siguiendo una trayectoria (2)

Demostración: Partiendo de que, para una fuerza conservativa: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

Dividimos la curva cerrada en dos curvas abiertas entre los puntos A y B:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \underset{(1)}{\int_A^B} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \underset{(2)}{\int_B^A} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

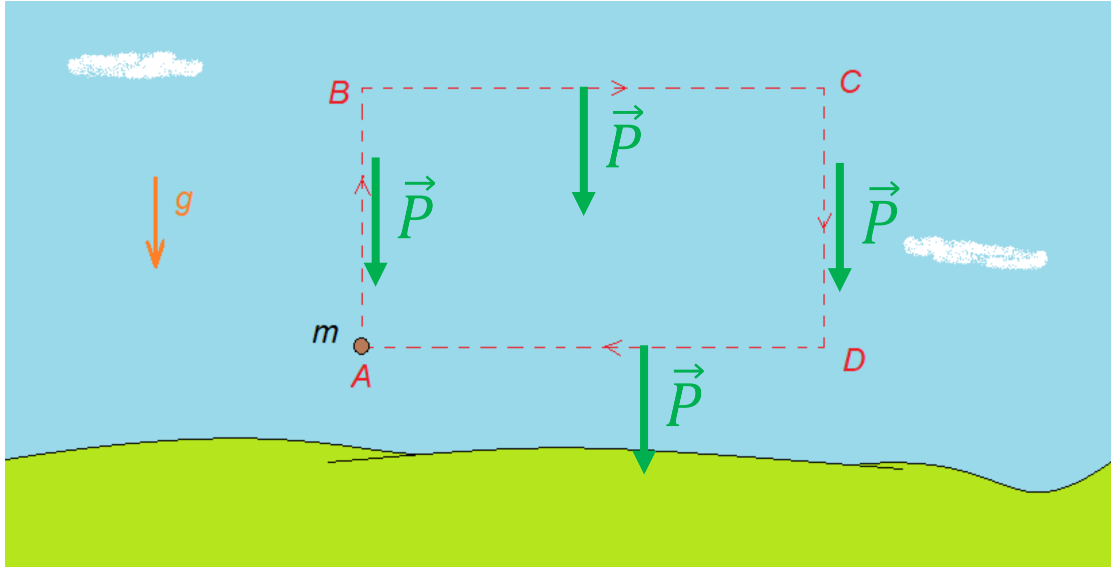


Y luego invertimos los límites en la 2da integral, que cambia de signo:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \underset{(1)}{\int_A^B} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \underset{(2)}{\int_A^B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underset{(1)}{\int_A^B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \underset{(2)}{\int_A^B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Que es lo que queríamos demostrar

Ejemplo 5. Calcular el trabajo que realiza la fuerza peso al moverse una partícula de masa *m* en la trayectoria cerrada *ABCDA* que se muestra en la Figura



Respuesta. Podemos subdividir la integral en la curva cerrada *ABCDA* en cuatro tramos, y calcular el trabajo en cada tramo por separado:

$$\longrightarrow W_{total} = \oint_{ABCDA} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_B^C \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_C^D \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_D^A \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{P}\cdot d\vec{r} = P\ d_{AB}\cos(180°) = -mgd_{AB} < 0$$

$$W_{BC} = \int_B^C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_B^C \vec{P}\cdot d\vec{r} = P\,d_{BC}\cos(90°) = 0$$

$$W_{CD} = \int_C^D \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C^D \vec{P}\cdot d\vec{r} = P\ d_{CD}\cos(0°) = mgd_{CD} > 0$$

$$W_{DA} = \int_D^A \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_D^A \vec{P}\cdot d\vec{r} = P\,d_{DA}\cos(90°) = 0$$

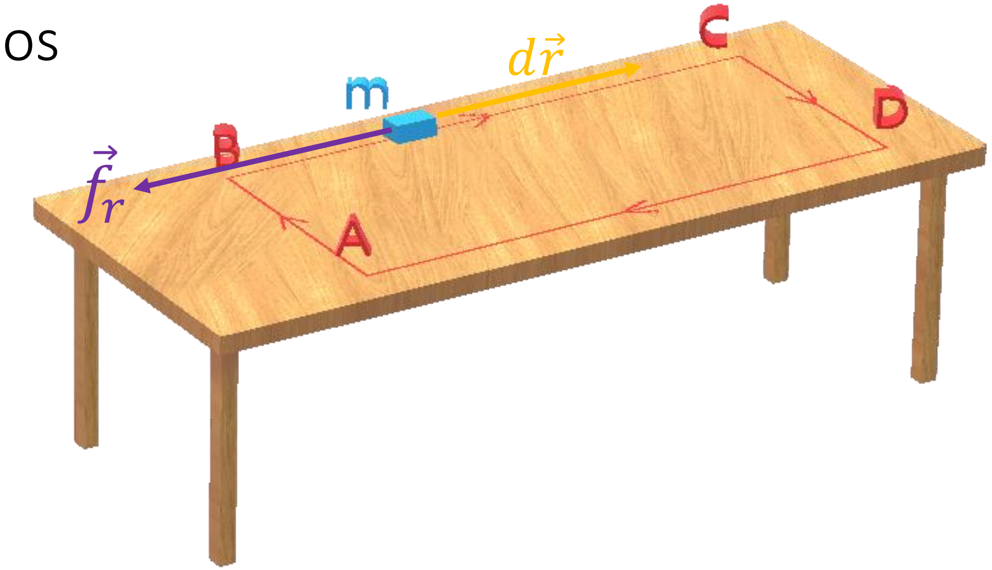
$$\longrightarrow W_{total} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = -mgd_{AB} + 0 + mgd_{CD} + 0 = 0\ J$$

$$d_{AB} = d_{CD}$$

El hecho de que el trabajo en una curva cerrada sea *0* se debe a que el peso es una fuerza conservativa

Fuerzas Conservativas y No Conservativas - Ejemplos

Ejemplo 6. Se arrastra un cuerpo de masa *m* por una superficie horizontal rugosa con coeficiente de rozamiento cinético μ_k, describiendo la trayectoria rectangular *ABCDA* que se muestra en la Figura. Calcular el trabajo total realizado por la fuerza de roce.



Respuesta. Podemos separar la integral en la curva cerrada *ABCDA* en cuatro tramos (aunque en este caso no es necesario), y calcular en cada tramo por separado:

$$W_{total} = \oint_{ABCDA} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_B^C \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_C^D \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_D^A \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{f_r}\cdot d\vec{r} = \mu\, N\, d_{AB}\cos(180°) = -\mu m g d_{AB} < 0$$

$$W_{BC} = \int_B^C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_B^C \vec{f_r}\cdot d\vec{r} = \mu\, N\, d_{BC}\cos(180°) = -\mu m g d_{BC} < 0$$

$$W_{CD} = \int_C^D \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C^D \vec{f_r}\cdot d\vec{r} = \mu\, N\, d_{CD}\cos(180°) = -\mu m g d_{CD} < 0$$

$$W_{DA} = \int_D^A \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_D^A \vec{f_r}\cdot d\vec{r} = \mu\, N\, d_{DA}\cos(180°) = -\mu m g d_{DA} < 0$$

$$\longrightarrow W_{total} = -\mu m g(d_{AB} + d_{BC} + d_{CA} + d_{DA}) < 0$$

El hecho de que el trabajo en una curva cerrada sea ≠ *0* se debe a que el roce no es una fuerza conservativa

Potencia - Definición

La ***potencia*** es la cantidad de **trabajo** por unidad de **tiempo** → *definición de potencia*

En fórmula: $\boxed{\bar{P} = \frac{W}{\Delta t}}$ → La “barra” sobre la ***P*** indica que se trata de un valor medio (promedio) → … y es un valor medio porque Δt es, en gral., un valor finito

→ definición de *potencia media*

Si quisiéramos conocer el valor *instantáneo* de la potencia, deberíamos considerar el trabajo realizado en un tiempo infinitesimal: $\Delta t \to 0$ → $P = lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t}$ → *potencia instantánea*

Otra fórmula para obtener la potencia instantánea realizada por una determinada fuerza puede obtenerse de la siguiente manera: →

$$P = lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t} = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

→ Otra forma de calcular la *potencia instantánea*

Pregunta: ¿Qué condiciones se deben cumplir para que la potencia media coincida con la potencia instantánea?

Potencia - Unidades

A partir de la definición de potencia… $\bar{P} = \frac{W}{\Delta t}$

- W: Se mide en Joules, J
- Δt: Se mide en segundos, s

La potencia se mide en $\frac{J}{s} = W$ → $\boxed{Watt}$

NOTA 1: No confundir la W con la W. (cuack). La diferencia debería ser clara según el contexto. En algunos casos W representa el trabajo (arriba a la izquierda), en otros casos representa la unidad con que se mide la potencia, el Watt (arriba a la derecha)

NOTA 2: Si usamos la otra fórmula para el cálculo de potencia que dedujimos en la diapositiva anterior…

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

… deberíamos obtener la misma unidad para la potencia.

Veamos… $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

- $\vec{F}$: Se mide en Newtons, N
- $\vec{v}$: Se mide en m/s

Entonces… $1N \cdot 1\frac{m}{s} = 1\frac{N \cdot m}{s} = 1\frac{J}{s} = 1W$ → Efectivamente, sea cual sea la fórmula que utilicemos, la potencia nos va a dar en Watts

BREVE REPASO SOBRE LA CUESTIÓN DE LAS UNIDADES (en el sistema MKS)

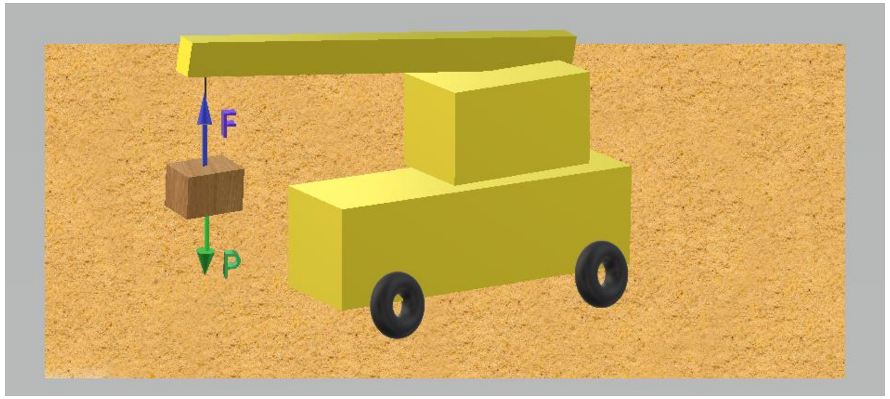
→ La fuerza, F, se mide en Newtons, N → $1N = 1kg\frac{m}{s^2}$

→ El trabajo, W, se mide en Joules, J → $1J = 1N \cdot m = 1kg\frac{m^2}{s^2}$

→ La potencia, P, se mide en Watts, W → $1W = 1J/s = 1kg\frac{m^2}{s^3}$

Ejemplo 7: Calcular la potencia que debe desarrollar una grúa para subir un cuerpo de 1000 kg hasta una altura de 20 m en 30 s.

Respuesta: Para poder levantar el cuerpo, la grúa debe realizar una fuerza hacia arriba que sea, por lo menos, igual al peso del cuerpo



$$F = P = mg$$

y el trabajo realizado al levantar el cuerpo hasta una altura *h* será

$$W = F\ h\ cos\theta = m\ g\ h\ cos0° = m\ g\ h$$

Y la potencia media desarrollada por la grúa será:

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{m\ g\ h}{\Delta t} = \frac{1000kg \cdot 9{,}8m/s^2 \cdot 20m}{30s} \approx 6530\ W = 6{,}53\ kW$$

Energía Cinética – Definición

La energía cinética E_k es la energía asociada con el movimiento de los cuerpos:

$$\boxed{\boldsymbol{E_k = \frac{1}{2}mv^2}}$$

Nota 1. Esta expresión representa la energía cinética para un cuerpo puntual. Para cuerpos extensos, esta expresión representa la energía cinética asociada con la traslación del cuerpo como un todo, habiendo otro término de energía cinética, asociado con la rotación del mismo (lo veremos más adelante)

Unidades

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Se mide en kg

Se mide en m^2/s^2

La energía cinética E_k se mide en $kg\,\frac{m^2}{s^2} = J$

Ejemplo 8: Hallar la energía cinética de un cuerpo de masa *m = 5 kg* que se mueve con velocidad $\vec{v} = 10\,\frac{m}{s}\check{\imath} - 3\,\frac{m}{s}\check{\jmath} + 4\,\frac{m}{s}\check{k}$.

***Respuesta**:* Para calcular la energía cinética solamente interesa el módulo de la velocidad (más estrictamente, el cuadrado del módulo):

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

En este caso: $v^2 = (10\,m/s)^2 + (-3\,m/s)^2 + (4\,m/s)^2 = 100\,\frac{m^2}{s^2} + 9\,\frac{m^2}{s^2} + 16\,\frac{m^2}{s^2} = 125\,\frac{m^2}{s^2}$

$$\longrightarrow \quad E_k = \frac{1}{2}\cdot 5\,kg \cdot 125\,\frac{m^2}{s^2} = \mathbf{312.5\,J}$$

Nota 2. Note que la energía cinética nunca puede tener signo negativo

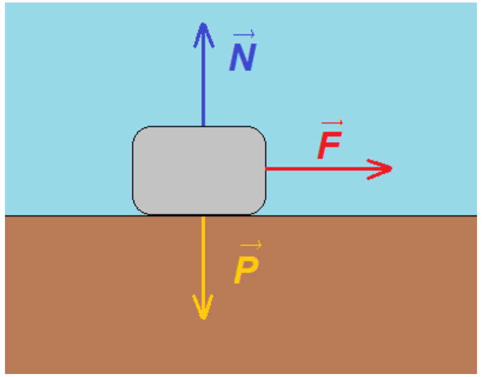
Teorema del Trabajo y la Energía Cinética (Teorema de las Fuerzas Vivas)

"El *trabajo* realizado por la resultante de *todas las fuerzas* que actúan sobre una partícula (trabajo neto) es igual a la *variación de la energía cinética* de dicha partícula."

$$\boxed{\Delta E_k = W_{todas\ las\ fuerzas}}$$

Ejemplo 9: Un cuerpo de masa $m = 5\ kg$ se mueve por una superficie horizontal sin rozamiento bajo la acción de una fuerza horizontal constante $F = 18\ N$. Si el cuerpo parte del reposo, hallar la velocidad adquirida por el cuerpo tras recorrer $20\ m$

Respuesta A – Por Cinemática y Dinámica.



- La única fuerza horizontal es $F = 18\ N$ $\longrightarrow$ $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{18\ N}{5\ kg} = 3.6\ m/s^2$

- Podemos calcular el tiempo de recorrido con: $x(t) = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2$

$$\downarrow$$

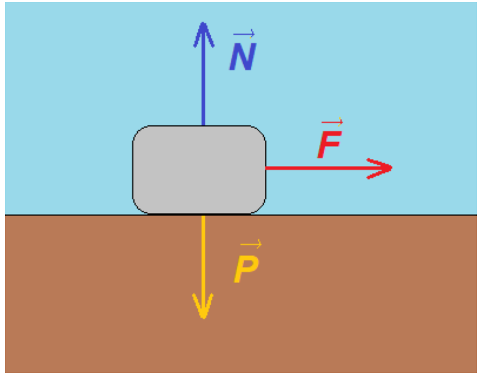
$$20\ m = 0 + 0 + \frac{1}{2}(3.6\ m/s^2)t^2$$

$$\downarrow$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 20\ m}{3.6\ m/s^2}} = 3.33\ s$$

- Y obtenemos la velocidad final: $v(t) = v_0 + a \cdot t$ $\longrightarrow$ $v_f = v(5\ s) = (3.6\ m/s^2) \cdot 3.33\ s = 12\ m/s$

Ejemplo 9 (continuación): Un cuerpo de masa $m = 5\ kg$ se mueve por una superficie horizontal sin rozamiento bajo la acción de una fuerza horizontal constante $F = 18\ N$. Si el cuerpo parte del reposo, hallar la velocidad adquirida por el cuerpo tras recorrer $20\ m$



Respuesta B – Usando el Teorema del Trabajo y la Energía Cinética

La única fuerza que hace trabajo es la fuerza horizontal aplicada (El peso y la normal son perpendiculares al desplazamiento, luego no realizan trabajo)

El trabajo realizado es: $$W_F = F \cdot d \cdot cos0° = 18N \cdot 20m = 360\ J$$

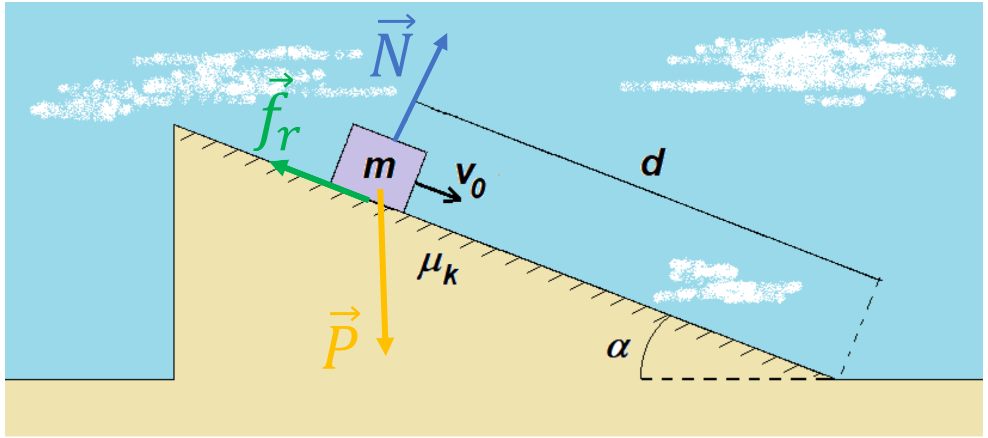
Usando el Teorema de Trabajo-Energía Cinética:

$$\Delta E_k = W_{todas\ las\ fuerzas}$$

$$E_k^f - E_k^0 = W_F$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}mv_0^2}}_{=0} = 360\ J \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot 5kg \cdot v_f^2 = 360\ J \longrightarrow v_f = \sqrt{\frac{2 \cdot 360\ J}{5\ kg}} = 12\ m/s$$

Ejemplo 10: Hallar una expresión para la velocidad final v_f con la que el cuerpo de masa m llega a la base del plano inclinado. El coeficiente de rozamiento es μ_k, el ángulo de inclinación del plano es α, la distancia recorrida por el cuerpo es d; el cuerpo tiene velocidad inicial v_0.



Respuesta:

$$W_P = P \cdot d \cdot \cos(90° - \alpha) = P \cdot d \cdot \text{sen}\alpha = m \cdot g \cdot d \cdot \text{sen}\,\alpha$$

$$W_N = N \cdot d \cdot \cos(90°) = 0$$

$$W_{f_r} = f_r \cdot d \cdot \cos(180°) = -\mu_k \cdot N \cdot d = -\mu_k \cdot (m \cdot g \cdot \cos\alpha) \cdot d$$

Usando el Teorema:

$$\Delta E_k = W_{todas\ las\ fuerzas}$$

$$E_k^f - E_k^0 = W_P + W_N + W_{f_r}$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mgd(\text{sen}\alpha - \mu_k \cos\alpha)$$

Respuesta:

$$v_f = \sqrt{v_0^2 + 2gd(\text{sen}\alpha - \mu_k \cos\alpha)}$$

Teorema del Trabajo y la Energía Cinética

"El *trabajo* realizado por la resultante de *todas las fuerzas* que actúan sobre una partícula (trabajo neto) es igual a la *variación de la energía cinética* de dicha partícula."

$$\boxed{\Delta E_k = W_{todas\ las\ fuerzas}}$$

***Demostración del Teorema*:**

$$W_{todas\ las\ fuerzas} = \sum_{\substack{todas\ las \\ fuerzas}} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \sum_{\substack{todas\ las \\ fuerzas}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} m\vec{a} \cdot d\vec{r} = m \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt =$$

$$= m \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt = m \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v})\, dt = \frac{1}{2} m \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} (v^2)\, dt = \frac{1}{2} m \int_{v_0}^{v_f} d(v^2) = \frac{1}{2} m\, v^2 \Big|_{v_0}^{v_f} =$$

$$= \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = E_k^f - E_k^0 = \Delta E_k$$

Nota: Seguramente esta no es la manera más sencilla de demostrar este teorema. El alumno puede encontrar dos demostraciones más simples (pero menos generales) en el libro de Resnick, Halliday y Krane, Física. Volumen 1, Ed. Patria, 5ª ed. (2010), sección 11-6. Si hay dificultades en el manejo de vectores, se puede hacer una demostración completamente equivalente trabajando con magnitudes escalares tras desarrollar el producto escalar $\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz$ e integrar cada término por separado.

Energía Potencial

Con las *fuerzas conservativas* se puede asociar una *energía potencial*.

● Con un cuerpo sometido a la acción de la fuerza peso, $\vec{P}$, se asocia una energía potencial gravitatoria:

$$\boxed{E_{P,g} = mgh}$$

siendo h la altura a la que se encuentra el cuerpo.

● Con un cuerpo sometido a la fuerza elástica de un resorte, $\vec{F}_{el}$, se asocia una energía potencial elástica:

$$\boxed{E_{P,el} = \frac{1}{2}kx^2}$$

siendo k la constante del resorte, y x su estiramiento (o compresión).

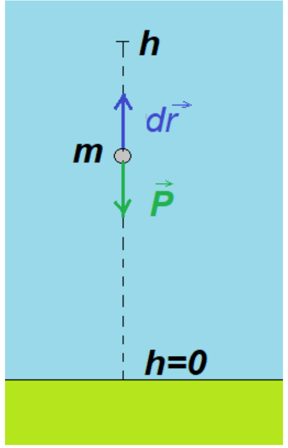
- Las energías potenciales están relacionadas con la configuración de un sistema. Por ejemplo, la energía potencial gravitatoria $E_{P,g}$ depende de la distancia relativa h entre el cuerpo de masa m y el planeta Tierra; en este caso, el sistema en cuestión es el sistema masa-Tierra. La energía potencial $E_{P,el}$ depende del estiramiento o compresión x del resorte; el sistema sería el sistema masa-resorte.
- En contraposición, recordemos que la energía cinética está asociada con el movimiento de un cuerpo, a través de su velocidad.
- Se acostumbra referirse a la energía potencial como energía “almacenada” a causa de la configuración del sistema.
- Las fuerzas no conservativas (por ejemplo el roce) no se asocian con una energía potencial.

Energía Potencial

¿Cómo se obtuvieron las fórmulas anteriores?

La *energía potencial asociada a una fuerza conservativa* se puede obtener como el *trabajo (con signo cambiado)* que realiza dicha *fuerza* sobre una partícula cuando ésta se mueve desde una posición inicial (en donde suponemos que la energía potencial vale *0*) hasta otra posición de interés.

Energía potencial gravitatoria (en las cercanías de la Tierra): Se acostumbra tomar el *0* de la energía potencial a la altura del piso.

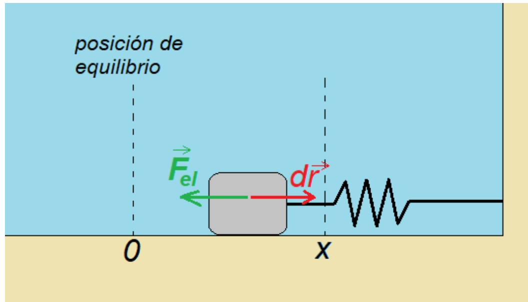


Al moverse un cuerpo de masa m desde el piso hasta una altura *h*, el trabajo (con signo cambiado) que realiza la fuerza peso, será:

$$-W_P = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \vec{P} \cdot d\vec{r} = -P\,h\cos 180° = -mgh\,(-1) = mgh = E_{P,g}$$

(que es la fórmula de la energía potencial gravitatoria)

Energía potencial elástica: Se acostumbra tomar el *0* de la energía potencial para el resorte sin deformar (ni comprimido ni estirado)



Al moverse un cuerpo de masa m una distancia x comprimiendo o estirando el resorte, el trabajo que realiza la fuerza elástica (con signo cambiado) será:

$$-W_{el} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{r} = -\int_0^x |\vec{F}_{el}|\,|d\vec{r}|\cos 180° = -\int_0^x kx\,dx\,(-1) = k\int_0^x x\,dx = \frac{1}{2}kx^2 = E_{P,el}$$

(que es la fórmula de la energía potencial elástica)

Energía Potencial

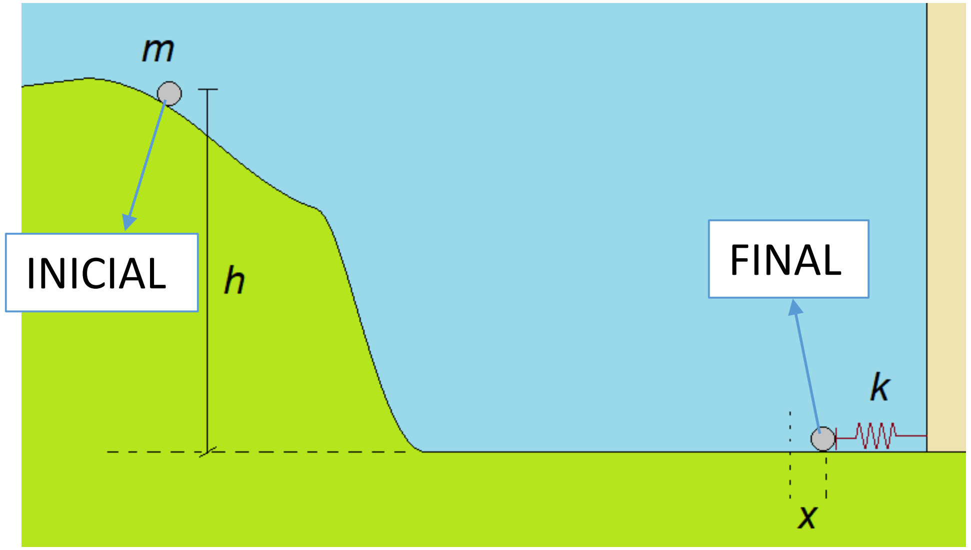
De la definición anterior de energía potencial se desprende la siguiente propiedad:

"El trabajo realizado por una fuerza conservativa sobre una partícula es igual a la variación de la energía potencial correspondiente, con signo cambiado"

Para la fuerza peso: $\boxed{W_P = -\Delta E_{P,g}}$

Para la fuerza elástica: $\boxed{W_{el} = -\Delta E_{P,el}}$

Ejemplo 11: Un cuerpo de masa $m = 2\ kg$ es soltado por una rampa curva como la que se muestra en la Figura. La altura inicial del cuerpo es $h = 3\ m$, y su velocidad inicial es nula. El cuerpo baja por la curva y llega a una superficie horizontal, deteniéndose tras comprimir 5 cm un resorte de constante elástica $k = 8000\ N/m$. (a) Hallar el trabajo realizado por la fuerza peso y por la fuerza elástica. (b) ¿Qué otras fuerzas intervienen en el problema? ¿Podría calcular el trabajo que realizaron?



Respuesta:

(a)

$$W_P = -\Delta E_{P,g} = -\left(E_{P,g}^{f} - E_{P,g}^{0}\right) = -(0 - mgh) = mgh = 58.8\ J$$

$$W_{el} = -\Delta E_{P,el} = -\left(E_{P,el}^{f} - E_{P,el}^{0}\right) = -\left(\frac{1}{2}kx^2 - 0\right) = -\frac{1}{2}kx^2 = -10\ J$$

(b)

….. Para pensar entre todos …

Pero la respuesta es: $W_{f_r} = -48.8\ J$

¿Por qué?

Energía Mecánica - Definición

La *energía mecánica* es la suma de la energía cinética con los diferentes términos de energía potencial.

$$\boxed{E_M = E_k + E_P}$$

$$E_P = E_{P,g} + E_{P,el} + \cdots$$

$$\boxed{E_M = E_k + E_{P,g} + E_{P,el} + \cdots}$$

En esta materia solamente consideraremos dos tipos de energía potencial: la gravitatoria y la elástica. Pero no son los únicos dos tipos que existen…

Ejemplo 12: Hallar la energía mecánica de los siguientes sistemas:

(a) Un bloque de masa $m = 4\ kg$, que se encuentra en reposo a 20 m de altura;

(b) Un bloque de masa $m = 4\ kg$ que se encuentra a 20 m de altura y se mueve hacia arriba a 10 m/s;

(c) Un bloque de masa $m = 4\ kg$ que se encuentra a 20 m de altura y se mueve hacia abajo a 10 m/s;

(d) Un bloque de masa $m = 4\ kg$ que se encuentra a 20 m de altura y se mueve hacia arriba a 10 m/s mientras comprime 5 cm un resorte de constante elástica $k = 1000\ N/m$;

Respuestas:

(a) $E_M = 784\ J$

(b) $E_M = 984\ J$

(c) $E_M = 984\ J$

(d) $E_M = 985{,}25\ J$

Energía Mecánica - Definición

La ***energía mecánica*** es la suma de la energía cinética con los diferentes términos de energía potencial.

$$\boxed{E_M = E_k + E_P}$$

$$E_P = E_{P,g} + E_{P,el} + \cdots$$

$$\boxed{E_M = E_k + E_{P,g} + E_{P,el} + \cdots}$$

En esta materia solamente consideraremos dos tipos de energía potencial: la gravitatoria y la elástica. Pero no son los únicos dos tipos que existen…

Para un sistema mecánico que evoluciona desde una situación inicial (*0*) hasta una situación final (f), la variación de su energía mecánica será:

$$\Delta E_M = E_M^f - E_M^0 = \left(E_k^f + E_{P,g}^f + E_{P,el}^f\right) - \left(E_k^0 + E_{P,g}^0 + E_{P,el}^0\right) = \left(E_k^f - E_k^0\right) + \left(E_{P,g}^f - E_{P,g}^0\right) + \left(E_{P,el}^f - E_{P,el}^0\right)$$

$$\longrightarrow \quad \Delta E_M = \Delta E_k + \underbrace{\Delta E_{P,g} + \Delta E_{P,el}}$$

Por Teorema de Trabajo – Energía Cinética:

$$\Delta E_k = W_{todas\ las\ fuerzas}$$

Por definición de las Energías Potenciales:

$$\left.\begin{array}{c} \Delta E_{P,g} = -W_{Peso} \\ \Delta E_{P,el} = -W_{F_{elástica}} \\ \ldots \end{array}\right\} \longrightarrow$$

Debería haber un término para cada fuerza conservativa

Energía Mecánica - Variación

$$\Delta E_M = \Delta E_k + \underbrace{\Delta E_{P,g} + \Delta E_{P,el}}$$

Por Teorema de Trabajo – Energía Cinética:

$\Delta E_k = W_{todas\ las\ fuerzas}$

Por definición de las Energías Potenciales:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta E_{P,g} = -W_{Peso} \\ \Delta E_{P,el} = -W_{F_{elástica}} \\ \dots \end{array}\right\}$$

Debería haber un término para cada fuerza conservativa

Entonces:

$$\begin{aligned} \Delta E_P &= \Delta E_{P,g} + \Delta E_{P,el} + \cdots \\ &= -W_P - W_{F_{el}} - \cdots \\ &= -W_{fuerzas\ conservativas} \end{aligned}$$

$$\Delta E_M = \Delta E_k + \Delta E_P$$

$$\Delta E_M = W_{\substack{todas\ las \\ fuerzas}} - W_{\substack{fuerzas \\ conserv.}}$$

¿Qué nos queda tras la resta?

Ley de Conservación de la Energía Mecánica

¿Qué nos queda tras la resta?
En $W_{\substack{todas\ las \\ fuerzas}}$ se incluyen *todas* las fuerzas que actúan sobre la partícula, tanto externas como internas, conservativas y no conservativas.

$$\Delta E_M = \Delta E_k + \Delta E_P$$

$$\Delta E_M = W_{\substack{todas\ las \\ fuerzas}} - W_{\substack{fuerzas \\ conserv.}}$$

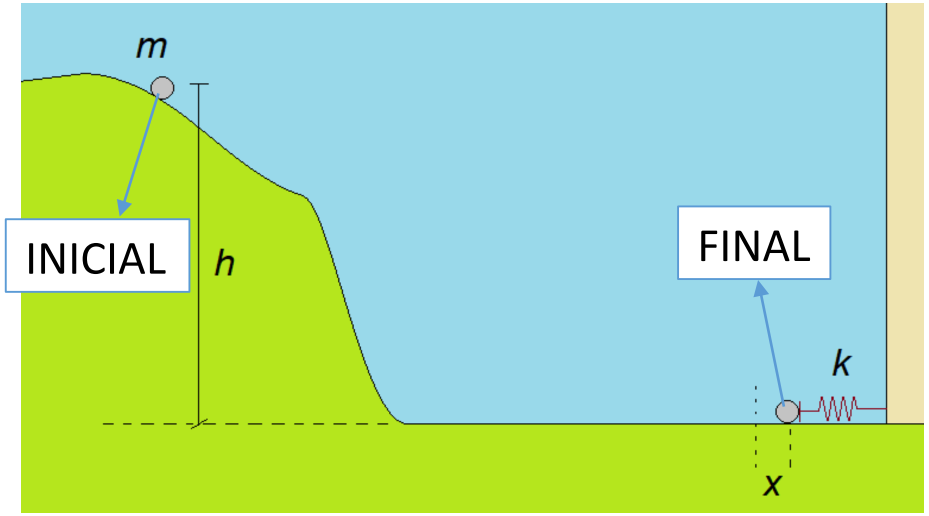
Fuerzas externas	~~Fuerzas internas conservativas~~
	Fuerzas internas no conservativas

¿Qué nos queda tras la resta?
Por otro lado, cuando construimos cada término de la energía potencial, hemos extendido nuestro sistema de forma de incluir tanto a la partícula de interés como al agente que origina la fuerza (el planeta Tierra, el resorte,…). Por consiguiente, el término $W_{\substack{fuerzas \\ conserv.}}$ se refiere a las fuerzas conservativas internas al sistema.

$$\boxed{\Delta E_M = W_{f.n.cons.} + W_{ext.}}$$

Esta es una de las formas en que se puede enunciar la <u>*ley de conservación de la energía mecánica*</u>

Ejemplo 11 (nuevamente): Un cuerpo de masa $m = 2\ kg$ es soltado por una rampa curva como la que se muestra en la Figura. La altura inicial del cuerpo es $h = 3\ m$, y su velocidad inicial es nula. El cuerpo baja por la curva y llega a una superficie horizontal, deteniéndose tras comprimir 5 cm un resorte de constante elástica $k = 8000\ N/m$. (a) Hallar el trabajo realizado por la fuerza peso y por la fuerza elástica. (b) ¿Qué otras fuerzas intervienen en el problema? ¿Podría calcular el trabajo que realizaron?



Respuesta:

(a) (… Ya lo habíamos calculado antes ….)

$$W_P = -\Delta E_{P,g} = -\left(E_{P,g}^f - E_{P,g}^0\right) = -\left(0J - 2kg \cdot 9{,}8\frac{m}{s^2} \cdot 3m\right) = 58{,}8\ J$$

$$W_{el} = -\Delta E_{P,el} = -\left(E_{P,el}^f - E_{P,el}^0\right) = -\left(\frac{1}{2} \cdot 8000\ \frac{N}{m} \cdot (0{,}05\ m)^2 - 0\ J\right) = -10\ J$$

(b) ¿Qué otras fuerzas intervienen?:

La normal $\vec{N}$ y, eventualmente, la fuerza de roce $\vec{f_r}$ (si es que hay)

La normal $\vec{N}$ es perpendicular al movimiento de la partícula en todo punto

↓

La normal $\vec{N}$ no hace trabajo

↓

$$W_N = 0$$

Para calcular el trabajo que realizó la $\vec{f_r}$ podemos aplicar el T. Cons. Energía:

$$\Delta E_M = W_{f.\,n.\,cons.} + W_{ext}$$

↓

$$E_M^f - E_M^0 = W_{f_r}$$

↓

$$\left(E_k^f + E_{P,g}^f + E_{P,el}^f\right) - \left(E_k^0 + E_{P,g}^0 + E_{P,el}^0\right) = W_{f_r}$$

↓

$$(0\ J + 0\ J + 10\ J) - (0\ J + 58{,}8\ J + 0\ J) = W_{f_r}$$

$$W_{f_r} = -48{,}8\ J$$

Conservación de la Energía Mecánica – Corolario

"En un sistema *aislado* donde *sólo intervienen fuerzas conservativas*, la energía mecánica permanece constante"

$$\Delta E_M = 0$$

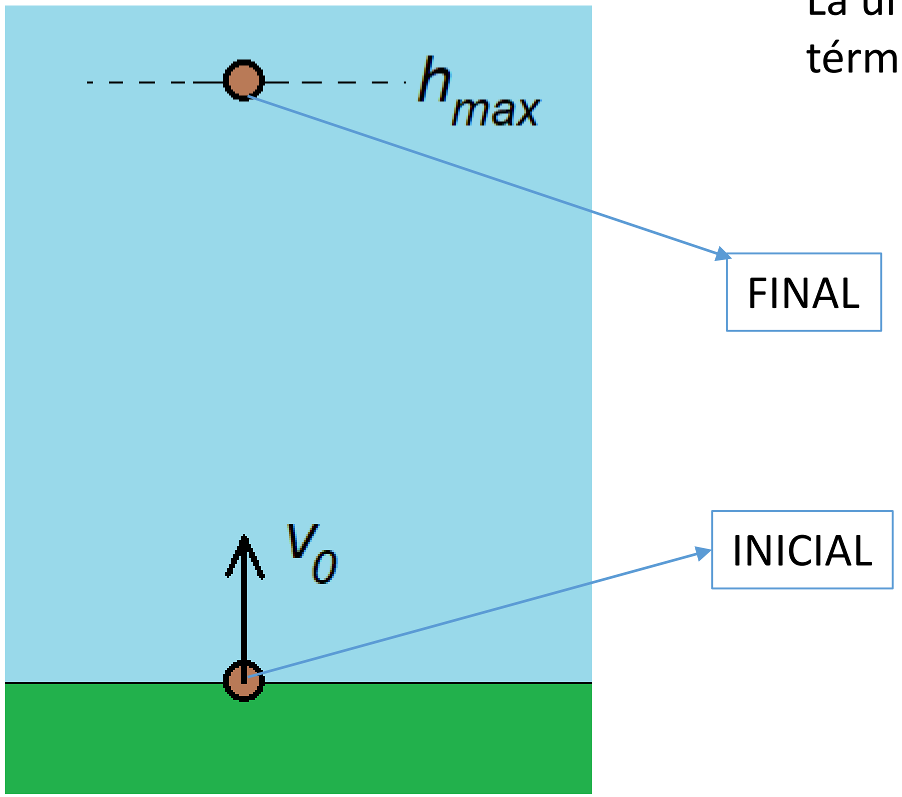
Este resultado se desprende de la forma más general del Teorema de Conservación de Energía desarrollado en las diapositivas anteriores, ya que:

- Si el sistema está aislado, no intervienen fuerzas externas al sistema. $\longrightarrow$ $W_{ext} = 0$
- Como establece el enunciado, tampoco hay fuerzas no conservativas interiores al sistema. $\longrightarrow$ $W_{f.n.cons.} = 0$

Nota Importante. Este resultado es presentado en algunos libros como *la* formulación del Teorema de Conservación de la Energía Mecánica (ver, por ejemplo, R. Resnick, D. Halliday, K. S. Krane. Física Volumen 1, Sección 13-1, pág. 262; R. A. Serway, J. W. Jewett, Física para Ciencias e Ingeniería, vol. 1 pág. 199). En esta materia trataremos este resultado como una derivación del Teorema más general $\Delta E_M = W_{f.n.cons.} + W_{ext}$ deducido y discutido en las diapositivas anteriores. Asimismo, la mayoría de los textos presentan también una formulación más general que la presente, incluyendo en la energía mecánica un término correspondiente a la denominada energía interna (ver, por ej., R. Resnick, D. Halliday, K. S. Krane. Física Volumen 1, Capítulo 13; R. A. Serway, J. W. Jewett, Física para Ciencias e Ingeniería, Vol. 1, Capítulo 8)

Ejemplo 13: Hallar la altura máxima que alcanzará un cuerpo de $m = 5\ kg$ lanzado desde el suelo verticalmente con una velocidad de $30\,\frac{m}{s}$ (despreciar el rozamiento)

Respuesta:



La única fuerza que interviene es el peso, y su acción está contemplada en el término de energía potencial gravitatoria

$$\Delta E_M = W_{f.n.cons.} + W_{ext.}$$

$$E_M^f - E_M^0 = 0$$

$$mgh_{max} - \frac{1}{2}mv_0^2 = 0$$

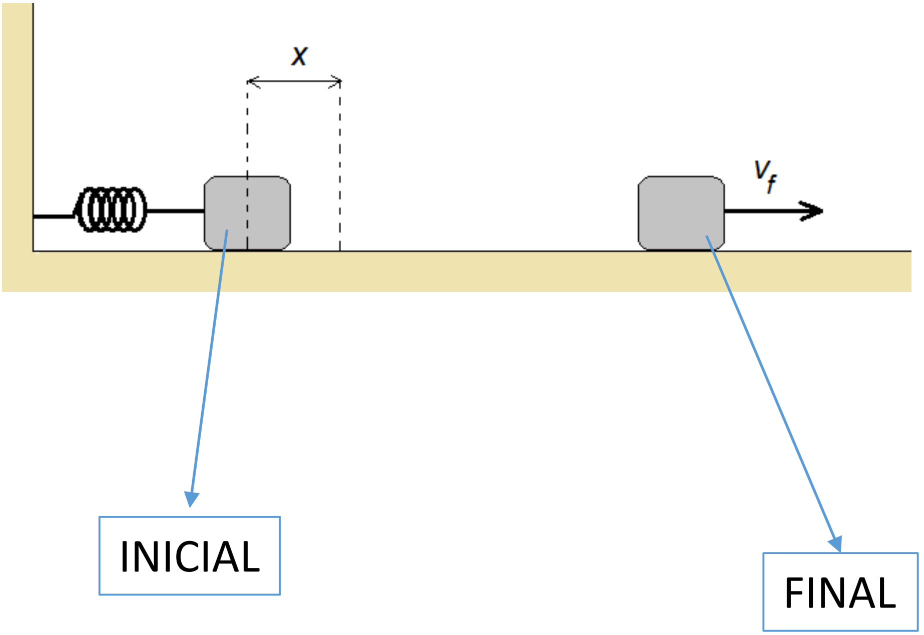
$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$h_{max} = \frac{(30\ m/s)^2}{2 \cdot 9{,}8\ m/s^2} = 45{,}92\ m$$

Ejercicio:
Resuelva el mismo problema utilizando los métodos de dinámica y cinemática. ¿Cuál de los dos procedimientos es más sencillo?

Ejemplo 14: Un bloque de $m = 6\ kg$ comprime 15 cm un resorte de $k = 2000\ N/m$ que se encuentra sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Hallar la velocidad del bloque luego de liberar el resorte.

Respuesta:



La única fuerza que hace trabajo es la fuerza elástica del resorte, y su acción está contemplada en el término de energía potencial elástica.

El peso y la normal intervienen, pero no hacen trabajo

$$\Delta E_M = W_{f.n.cons.} + W_{ext.}$$

$$\downarrow$$

$$E_M^f - E_M^0 = 0$$

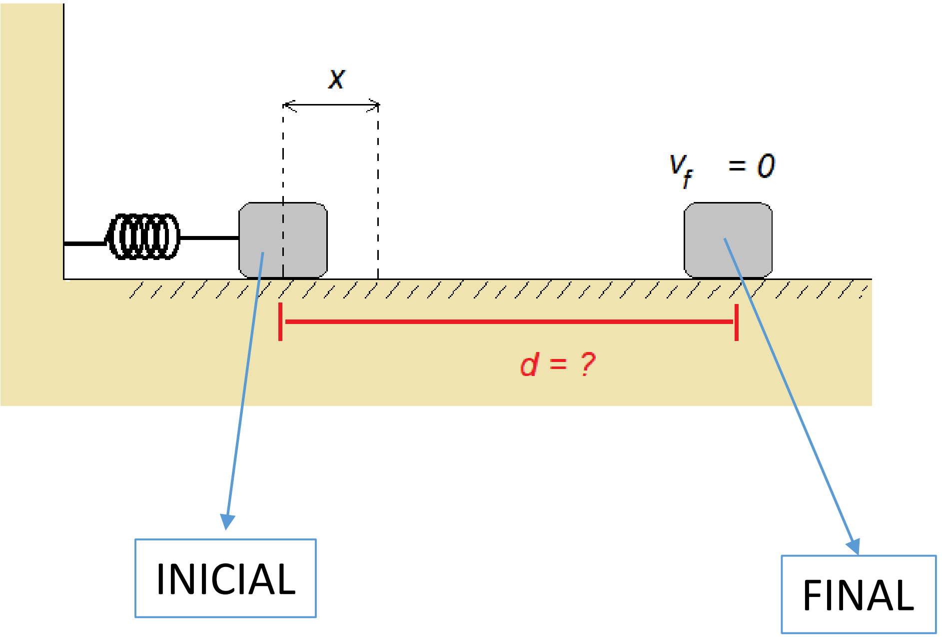
$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}kx^2 = 0$$

$$\downarrow$$

$$v_f = \sqrt{\frac{kx^2}{m}} = 2{,}74\ m/s$$

Ejemplo 15: Si en la situación del ejemplo anterior existiese roce entre el bloque y la mesa, con un coeficiente $\mu_k = 0{,}2$, hallar la distancia que recorre el bloque hasta detenerse.



Respuesta:

En este caso hace trabajo la fuerza elástica del resorte, que es conservativa, y por consiguiente está contemplada en la energía potencial; y también hace trabajo la fuerza de roce, que es no conservativa:

$$\Delta E_M = W_{f.n.c.} + W_{ext}$$

$$\downarrow$$

$$E_M^f - E_M^0 = W_{f_r}$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{1}{2}kx^2 = f_r\ d\ cos180°$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{1}{2}kx^2 = -\ \mu_k\ N\ d$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{1}{2}kx^2 = -\ \mu_k\ m\ g\ d \longrightarrow d = \frac{kx^2}{2\mu_k mg} = 1{,}91\ m$$