

Viscosidad y Ley de Stokes

Experiencia de Laboratorio, Física II

Arnold Rodríguez*, Juan Pérez y Alberto Camus

Licenciatura en Física, Facultad de Ciencias Exactas, UNICEN

Septiembre 2007

1 Introducción

Sobre todo cuerpo que se mueve en un fluido viscoso actúa una fuerza resistente que se opone al movimiento. La Ley de Stokes expresa que para cuerpos esféricos el valor de esta fuerza es [1]:

$$F_r = 6\pi\eta r v \quad (1)$$

donde η es el coeficiente de viscosidad del fluido, o viscosidad absoluta, r el radio de la esfera y v la velocidad de la misma con respecto al fluido. Si consideramos un cuerpo que cae libremente en el seno de un fluido, al cabo de cierto tiempo, cuando el peso sea equilibrado por la fuerza F_r y por el empuje de Arquímedes, habrá adquirido una velocidad constante $v = v_l$, llamada *velocidad límite*. Es decir, según la Segunda Ley de Newton [1]:

$$\rho g V = \rho' g V + 6\pi\eta r v \quad (2)$$

donde ρ y ρ' corresponden a la densidad del cuerpo y del fluido, respectivamente. El primer miembro de la ecuación anterior corresponde al peso de la esfera, el primer término del miembro de la derecha al empuje del fluido, y el segundo término a la fuerza resistente. A partir de la ecuación (2) puede obtenerse la siguiente expresión para la viscosidad:

$$\eta = \frac{2}{9} \frac{g r^2}{v_l} (\rho - \rho') \quad (3)$$

Si las magnitudes utilizadas en la ecuación (3) se expresan en el Sistema Internacional, la unidades de η quedan expresadas en poises ($1 \text{ P} = 1 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$). La ec. (3) puede reescribirse como:

$$v_l = \alpha r^2 \quad (4)$$

donde:

$$\alpha = \frac{2}{9} \frac{g}{\eta} (\rho - \rho') \quad (5)$$

*rodriguez@yahoo.com

La ecuación anterior indica que el valor de la velocidad límite tendrá una relación lineal con el cuadrado del radio de la esfera. Por otra parte, la pendiente de la recta v_l vs. r^2 estará relacionada con la viscosidad del fluido. Teniendo en cuenta las ecuaciones (4) y (5) se diseñó y montó un experimento, en el cual se dejan caer por el interior de un tubo de vidrio lleno de glicerina, esferas de acero de distinto diámetro. A partir de la medición de la velocidad límite alcanzada por las mismas se comprobó si la ley de potencias expresada en la ecuación (4) se cumple. Utilizando la ecuación (5) se determinó el coeficiente de viscosidad de la glicerina.

2 Desarrollo experimental

Para la realización de la experiencia se utilizaron 10 esferas de acero de varios diámetros, de acuerdo a la siguiente tabla:

Esfera	Diámetro [cm]
1	0.301 ± 0.001
2	0.351
3	0.423
4	0.482
5	0.793
6	0.795
7	0.856
8	0.956
9	1.203
10	1.502

Cada esfera se dejó caer cuatro veces desde el extremo superior de un tubo de vidrio vertical de 1.5 m de altura y diámetro interno $R = 25.9 \pm 0.1$ mm, completamente lleno de glicerina. Mediante pruebas preliminares se determinó visualmente que a una altura $H = 1300 \pm 1$ mm con respecto al piso las esferas alcanzaban su velocidad límite con seguridad. Mediante dos cronómetros independientes accionados por distintas personas se midieron los tiempos t_1 y t_2 necesarios para que cada esfera alcance dos puntos inferiores del tubo, situados a alturas $h_1 = 900 \pm 1$ mm y $h_2 = 100 \pm 1$ mm, respectivamente, con respecto al piso (ver Fig. 1).

A partir de los valores medidos t_1 y t_2 se calculó, para cada esfera, la velocidad media desarrollada para recorrer los tramos de longitud $d_1 = H - h_1$ y $d_2 = h_1 - h_2$, respectivamente:

$$v_1 = \frac{d_1}{t_1} \text{ y } v_2 = \frac{d_2}{t_2}$$

A partir de ambos promedios se determinó la velocidad límite de cada esfera en la glicerina:

$$v_l = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

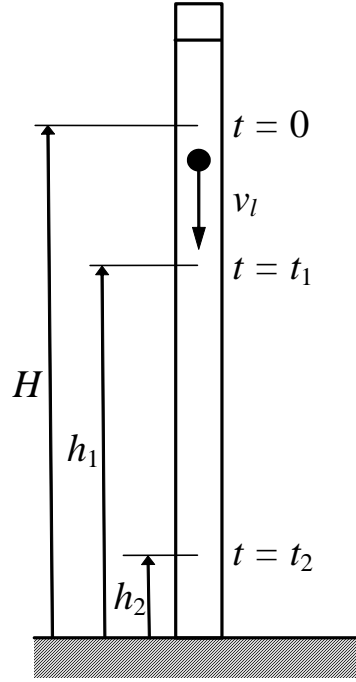


Figura 1: Esquema de la disposición experimental y las magnitudes relevantes medidas durante la experiencia.

3 Resultados y análisis

De acuerdo a la ecuación (4), el gráfico de $\log v_l$ en función de $\log r$ debería consistir en una recta de pendiente $a = 2$, dado que:

$$\log v_l = \log \alpha r^2 = \log \alpha + 2 \log r$$

En la Fig. 2 (puntos negros) se muestra, en un gráfico log-log, la velocidad límite v_l en función del radio r de cada esfera (la tabla con los valores individuales de cada medición y la estimación de la propagación de incertidumbres instrumentales puede encontrarse en el Apéndice). Con el fin de determinar si la ley de potencias expresada en la ecuación (4) se cumple, se realizó un ajuste lineal sobre los puntos experimentales para determinar la pendiente de la recta de mejor ajuste (recta en color negro). Se obtuvo que la pendiente óptima es:

$$a_1 = (1.710 \pm 0.3) \text{ s}^{-1}$$

con un valor para el coeficiente de correlación lineal:

$$r_1 = 0.9936$$

El valor obtenido para a_1 es distinto de 2, lo cual implica que la ley de potencias expresada en la ecuación (4) no se cumple. Sin embargo, es posible que el valor medido de la velocidad límite se vea influenciado por el diámetro finito del tubo. En particular, se espera que si el diámetro del tubo es demasiado exiguo, la velocidad límite mostrará valores menores a los esperados. Este efecto puede tenerse en cuenta a través de la corrección de Ladenburg, la cual considera la influencia del diámetro R del tubo en la velocidad final desarrollada por la esfera. En particular, esta expresión empírica predice que la velocidad final medida v_l

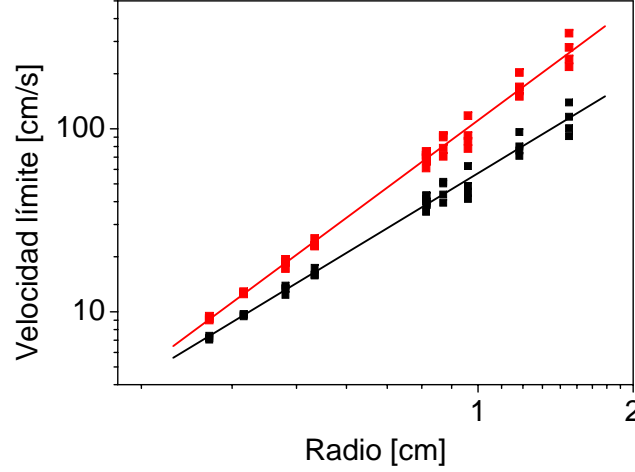


Figura 2: Gráfico log-log de la velocidad límite medida en función del radio de cada esfera (puntos negros). Los puntos rojos corresponden a los mismos datos luego de la corrección de Ledenburg (ec. (6)). Las rectas corresponden a las respectivas regresiones lineales.

estará relacionada con la velocidad final en condiciones ideales V_l (tubo de diámetro infinito) mediante [1]: (5)

$$V_l = v_l \left(1 + 2.4 \frac{r}{R} \right) \quad (6)$$

En la Fig. 2 se muestra la velocidad límite corregida V_l en función del radio de la esfera r (puntos rojos). A partir de los mismos se realizó una nueva regresión lineal (Fig. 2, recta en color rojo), obteniéndose para la pendiente y el coeficiente de correlación lineal:

$$\begin{aligned} a_2 &= (2.090 \pm 03) \text{ s}^{-1} \\ r_2 &= 0.99575 \end{aligned}$$

Luego de la corrección, los valores de velocidad límite siguen con ajuste aceptable la ley de potencias expresada por la ecuación (4). La ecuación (4) predice que el gráfico de V_l en función de r^2 será una recta de pendiente α . En la Fig. 3 se ha graficado V_l en función de r^2 , realizándose una segunda regresión lineal. En particular, se obtuvo que la pendiente de la recta que mejor ajusta es:

$$\alpha_2 = (119 \pm 4) (\text{cm} \cdot \text{s})^{-1}$$

con un valor para el coeficiente de correlación lineal:

$$r = 0.97773$$

Aplicando la ecuación (5), y a partir del valor de anteriormente calculado, se determinó el coeficiente de viscosidad de la glicerina:

$$\eta = \frac{2}{9} \frac{g}{\alpha} (\rho - \rho') = 12.0 \pm 0.7 \text{ P}$$

Se consideró $g = 980 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$. Se asumieron los siguientes valores para la densidad del acero y la glicerina: $\rho = 1.26 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, $\rho' = 7.8 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, respectivamente [1]. El valor determinado

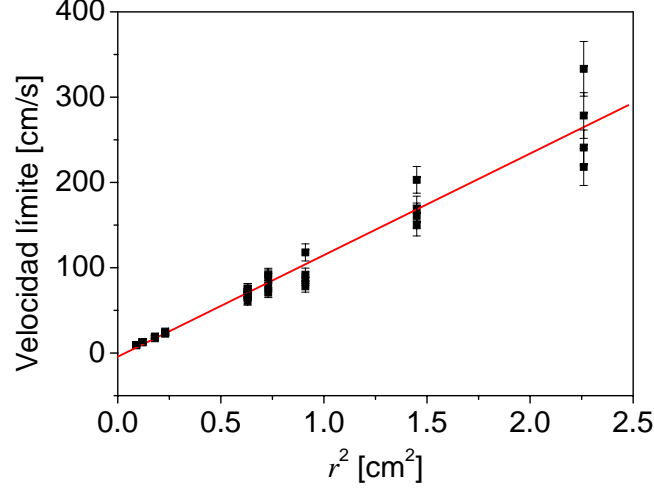


Figura 3: Velocidad límite corregida V_l en función del radio de cada esfera al cuadrado (puntos negros). Los bastones de error corresponden a la propagación de las incertidumbres de tipo instrumental correspondientes a mediciones de distancia y tiempo (d_1 , d_2 , t_1 y t_2).

para el coeficiente de viscosidad de la glicerina es diferente al que figura en distintas tablas (ver, por ejemplo, Tabla 1, pág. 235, en [1], donde $\eta = 13.87$ P). Es posible que la viscosidad de la glicerina utilizada en la experiencia se haya visto afectada por la absorción de humedad, dada la higroscopicidad de este fluido.

La incertidumbre de origen instrumental correspondiente a V_l , representada por los bastones de error en la Fig. 3, resulta mayor para valores de r más grandes, debido a que los tiempos t_1 y t_2 involucrados en el cálculo de V_l son más pequeños. Sin embargo, las fluctuaciones de tipo estadístico de V_l alrededor de la recta de mejor ajuste superan la incertidumbre instrumental. Esto se debe a que la medición de los tiempos t_1 y t_2 está afectada de fluctuaciones al azar significativas. De hecho, el método visual utilizado para accionar los cronómetros empleados para determinar t_1 y t_2 no resulta de gran confiabilidad. Sería de gran utilidad automatizar de alguna manera dichas mediciones en experiencias futuras.

4 Conclusiones

Se montó un tubo de Stokes con glicerina y se midió la velocidad límite de esferas de acero de distinto tamaño. Se comprobó que dicha velocidad no se ajusta a la Ley de Stokes debido a que el movimiento de las esferas se ve influenciado por el escaso diámetro del tubo. Sin embargo, se logra un buen acuerdo con la Ley de Stokes si esta influencia se tiene en cuenta a través de un factor de corrección. En este caso se confirma que la velocidad límite es proporcional al área de las esferas. Se determinó que la viscosidad de la glicerina es $\eta = 12.0 \pm 0.7$ P. El valor obtenido difiere del que figura en la literatura ($\eta = 13.87$ P), asumiéndose que la diferencia observada se debe a modificaciones originadas en la absorción de humedad ambiente por parte de la glicerina utilizada en la experiencia. De cualquier manera, sería interesante comparar los resultados obtenidos en esta experiencia con mediciones de viscosidad mediante un viscosímetro.

Bibliografía

- [1] M. Alonso, E. J. Finn, Física Vol. I: Mecánica, Fondo Educativo Interamericano, México, 1986.
- [2] Paul L. Meyer, Probabilidades y aplicaciones estadísticas, Segunda Edición, Addison Wesley Iberoamericana, 1992.

Apéndice

1. Tablas de resultados

En la siguiente tabla se muestran los resultados de las mediciones de t_1 y t_2 para cada esfera, junto con los valores calculados de v_1 , v_2 y v_l y V_l :

$r[\text{cm}]$	$t_1[\text{s}]$	$t_2[\text{s}]$	$v_1[\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}]$	$v_2[\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}]$	$v_l[\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}]$	$V_l[\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}]$
0.301 ± 0.001	5.88 ± 0.01	16.42 ± 0.01	6.80	7.31	7.05	9.02 ± 0.7
	5.54	16.83	7.22	7.13	7.18	9.18
	5.68	16.31	7.04	7.36	7.20	9.21
	5.34	16.41	7.49	7.31	7.40	9.5 ± 0.8
0.351	4.04	12.98	9.89	9.25	9.57	12 ± 1
	4.24	12.06	9.44	9.95	9.70	13
	4.23	12.72	9.46	9.43	9.45	13
	4.15	12.29	9.64	9.77	9.70	13
0.423	3.38	9.29	11.84	12.91	12.38	17
	2.96	9.07	13.50	13.23	13.36	19
	2.73	9.71	14.63	12.36	13.49	19 ± 2
	2.78	8.94	14.40	13.42	13.91	19
0.482	2.75	7.05	14.57	17.03	15.80	23
	2.57	7.38	15.56	16.25	15.91	23
	2.33	6.81	17.16	17.62	17.39	25
	2.37	7.97	16.90	15.06	15.98	23
0.793	0.80	3.25	49.71	36.91	43.31	75 ± 6
	1.20	3.23	33.29	37.11	35.20	61 ± 5
	0.93	3.25	43.23	36.92	40.08	70 ± 6
	0.95	2.95	42.06	40.66	41.36	71
0.795	1.12	2.70	35.75	44.41	40.08	70
	1.06	2.99	37.76	40.14	38.95	68
	0.85	3.05	47.03	39.37	43.20	75
	0.98	3.34	40.69	35.90	38.30	67 ± 5
0.856	0.72	2.68	55.77	44.79	50.28	90 ± 7
	0.63	3.05	63.23	39.38	51.31	92
	1.09	2.84	36.57	42.31	39.44	71 ± 6
	0.95	2.65	42.15	45.30	43.72	78
0.956	0.90	2.60	44.56	46.18	45.37	86 ± 7
	0.55	2.30	73.02	52.09	62.55	120 ± 10
	1.00	2.10	40.20	57.21	48.70	92 ± 8
	1.09	2.61	36.86	45.92	41.39	78 ± 7
1.203	0.56	1.71	72.06	70.22	71.14	150 ± 10
	0.33	1.72	122.44	69.61	96.03	200 ± 20
	0.41	1.90	97.19	63.03	80.11	170 ± 10
	0.55	1.50	72.22	79.86	76.04	160 ± 20
1.502	0.36	1.33	111.46	90.00	100.73	240
	0.22	1.23	181.07	97.57	139.32	330 ± 30
	0.36	0.98	110.86	121.97	116.42	280
	0.83	0.89	48.04	134.41	91.22	220 ± 20

La estimación de las incertidumbres correspondientes a v_1 , v_2 y v_l y V_l se detalla a continuación.

2. Propagación de incertidumbres

Para determinar la propagación de la incertidumbre de origen instrumental en la determinación de la velocidad límite debe tenerse en cuenta que:

$$V_l = \frac{d_1/t_1 + d_2/t_2}{2} \left(1 + 2.4 \frac{r}{R}\right)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V_l}{V_l} &= \frac{\Delta (d_1/t_1 + d_2/t_2)}{d_1/t_1 + d_2/t_2} + \frac{\Delta (1 + 2.4 \frac{r}{R})}{1 + 2.4 \frac{r}{R}} = \\ &= \frac{\Delta (d_1/t_1) + \Delta (d_2/t_2)}{d_1/t_1 + d_2/t_2} + \frac{\Delta (1 + 2.4 \frac{r}{R})}{1 + 2.4 \frac{r}{R}} \end{aligned}$$

La incertidumbre en la determinación de α a partir de la regresión lineal sobre los puntos mostrados en la Fig. 3, se obtuvo mediante la fórmula para la desviación estándar de la pendiente de la recta de mejor ajuste σ_α [2]:

$$\Delta\alpha = \sigma_\alpha \simeq \sqrt{\frac{S_{n-2}^2}{\sum_{i=1}^n (r_i^2 - \bar{r}^2)^2}}$$

donde:

$$S_{n-2}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n [V_{l,i} - (\alpha r_i^2 + \beta)]^2}{n - 2}$$

En la ecuación anterior, β es la ordenada al origen de la recta de mejor ajuste obtenida a partir de los puntos de la Fig. 2, y n es el número de muestras. En esta experiencia, es $n = 4 \times 10 = 40$.

La incertidumbre en la determinación del coeficiente de viscosidad η se obtuvo teniendo en cuenta la ecuación 3:

$$\eta = \frac{2}{9} \frac{g}{\alpha} (\rho - \rho')$$

con lo cual:

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\rho + \Delta\rho'}{\rho - \rho'}$$

Tomando:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta g}{g} &= \frac{0.1}{9.8} \simeq 1\% \\ \frac{\Delta\alpha}{\alpha} &= \frac{4}{119} \simeq 3\% \\ \frac{\Delta\rho + \Delta\rho'}{\rho - \rho'} &= \frac{0.1 + 0.01}{7.8 - 1.26} \simeq 2\% \end{aligned}$$

tenemos que:

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = 1\% + 3\% + 2\% = 6\%$$

Entonces:

$$\Delta\eta = \eta \times 6\% = 0.7181 \simeq 0.7 \text{ P}$$