Física Experimental I

2do. Cuat. 2018

Contenidos

1 Medición. Consideraciones básicas **6**

1.1 Modelo y objeto. Discrepancia . . . 6
1.2 El resultado de la medición como un intervalo . . . 6
1.3 Error e incertidumbre . . . 7
1.4 Tipos de mediciones . . . 9
1.5 Presentación de resultados. Redondeo . . . 9
1.6 Precisión y exactitud . . . 10
1.7 Incertidumbre de tipo instrumental . . . 10
1.8 Problemas . . . 11

2 Tratamiento estadístico de datos I **14**

2.1 Fluctuaciones al azar . . . 14
2.2 Descripción estadística de resultados . . . 14
2.3 Valores centrales y dispersión . . . 15
2.4 Problemas . . . 17

3 Incertidumbre de mediciones directas **19**

3.1 Incertidumbre del promedio . . . 19
3.2 Combinación de incertidumbres . . . 19
3.3 Número óptimo de mediciones . . . 20
3.4 Problemas . . . 21

4 Propagación del error **22**

4.1 Propagación del error. Una variable . . . 22
4.2 Propagación del error. Varias variables . . . 22
4.3 Aplicación al caso de mediciones aisladas . . . 23
4.4 Diseño de experimentos . . . 24
4.5 Problemas . . . 25

5 Incertidumbre en mediciones indirectas **27**

5.1 Magnitudes dependientes . . . 27

5.2 Magnitudes independientes . . . 28
5.3 Incertidumbre instrumental en mediciones indirectas . . . 29
5.4 Expresión final del resultado de una medición indirecta . . . 29
5.5 El método de mínimos cuadrados . . . 30
Regresión lineal . . . 31
Número óptimo de mediciones en la regresión lineal . . . 33
5.6 Problemas . . . 35

6 El modelo y el experimento **38**
6.1 Comparación modelo-experimento . . . 38
6.2 El experimento . . . 38
6.3 Gráficos . . . 39
6.4 Análisis de resultados . . . 41
6.5 Problemas . . . 42

7 Presentación de resultados científicos **43**
7.1 El artículo o informe . . . 43
7.2 Presentación oral. Poster . . . 47

8 Propuestas de experiencias: medición de g **49**
8.1 Caída libre . . . 49
8.2 Péndulo simple . . . 49
8.3 Péndulo físico . . . 50
8.4 Masa unida a un resorte . . . 50

9 Apéndice A: Probabilidades **51**
9.1 Introducción . . . 51
9.2 Definiciones . . . 51
9.3 Probabilidad condicional. Sucesos independientes . . . 52
9.4 La ley de los grandes números . . . 53
9.5 Variables aleatorias . . . 54
9.6 Funciones de variables aleatorias . . . 55

9.7 Variables aleatorias bidimensionales . . . 55
9.8 Variables aleatorias independientes . . . 56
9.9 Esperanza de una variable aleatoria . . . 56
9.10 Varianza de una variable aleatoria . . . 57
9.11 El coeficiente de correlación . . . 57
9.12 La distribución binomial . . . 58
9.13 La distribución normal o de Gauss . . . 59
9.14 Problemas . . . 60

10 Apéndice B: Tablas **62**
10.1 Tabla 1: Distribución de Gauss normalizada . . . 62
10.2 Tabla 2: Distribución de Student . . . 64

11 Apéndice C: Datos de instrumentos **65**
11.1 Calibre digital . . . 65

Bibliografía

[1] D.C. Baird, *Experimentación–Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos*, segunda edición, Prentice Hall, México, 1991.

[2] Salvador Gil y Eduardo Rodriguez, *Física recreativa–Experimentos de Física*, Prentice Hall, Buenos Aires, 2001.

[3] Maiztegui Alberto P. Maiztegui y Reinaldo J. Gleiser, *Introducción a las mediciones de laboratorio*, Ed. Guayqui, Córdoba, Argentina, 1976.

[4] Paul L. Meyer, *Probababilidades y aplicaciones estadísticas*. Segunda Edición. Addison Wesley Iberoamericana, 1992.

[5] Semyon G. Rabinovich, *Measurement errors and uncertainties–Theory and practice*. Tercera Edición. AIP Press, Springer, 2005.

1 Medición. Consideraciones básicas

1.1 Modelo y objeto. Discrepancia

El proceso de medición consiste en determinar el valor de una *magnitud* que caracteriza a un *objeto*. Para esto es necesario previamente haber definido un *modelo* idealizado del objeto bajo estudio y también el grado de incertidumbre con el que se desea determinar dicho valor.

Por ejemplo, la medición del diámetro de una mesa circular implica haber decidido que una circunferencia constituye un modelo adecuado para la mesa. Si ese no es el caso (por ejemplo, si la mesa es levemente elíptica), encontraremos fluctuaciones en el resultado de la medición del diámetro que pueden superar la precisión requerida. La elección del modelo adecuado es un punto básico del proceso de medición.

En algunos casos, la validez o utilidad de la definición del objeto de medición (modelo) puede depender de la precisión requerida. Por ejemplo, el concepto de litoral costero puede ser apropiado si se desea medir su longitud entre dos ciudades con una precisión de 1 km. Este no es el caso si la precisión deseada es de 1 cm (el movimiento del oleaje por sí solo puede volver imprecisa la definición del objeto en esa escala de longitudes).

Siempre existirá *discrepancia* entre el modelo adoptado y el objeto, que es necesario tener en cuenta al momento de evaluar el resultado de una medición.

1.2 El resultado de la medición como un intervalo

Supongamos que le pedimos a un carpintero que estime el alto de una puerta. Él nos contesta (a partir de una apreciación a simple vista) que la altura de la puerta es de 2 m. Al preguntarle si es posible que la altura de la puerta sea de 2.20 m nos contesta que no, que como mucho la puerta tiene una altura de 2.10 m. Si le preguntamos por la posibilidad de que la puerta mida 1.80 m, el carpintero nos contesta que a lo sumo puede medir 1.90 m. Es decir, la verdadera altura h de la puerta es tal que:

$$1.90 \text{ m} < h < 2.10 \text{ m}$$

Supongamos que le indicamos al carpintero que construya la puerta a partir de su estimación de h. Entonces vemos que vuelve a medir la puerta, esta vez con un instrumento: un metro de carpintero. Nos dice que la altura de la puerta es de 1.98 m. Nuevamente le preguntamos acerca de los límites dentro de los cuales él está seguro que se encuentra el verdadero valor de h. Esta vez nos dice que:

$$1.97 \text{ m} < h < 1.99 \text{ m}$$

Le preguntamos cómo sabe que h no es mayor que 1.99 y nos contesta que las "rayitas" de su metro de carpintero están separadas 1 mm, y que él puede observar que el borde de la puerta no cae más allá que la rayita correspondiente a la longitud de 1.99 m, ni más acá que la correspondiente a 1.97 m.

De manera general, el resultado de la medición de una magnitud (x, por ejemplo) es un intervalo, dentro del cual se encuentra el verdadero valor de x con cierto grado de confianza. Esto lo podemos expresar como antes:

$$x_{min} < x < x_{max} \tag{1}$$

Si consideramos que el valor central del intervalo es:

$$\tilde{x} = \frac{x_{min} + x_{max}}{2}$$

y que el semiancho del intervalo está dado por:

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$$

vemos que la desigualdad (1) se puede escribir como:

$$\tilde{x} - \Delta x < x < \tilde{x} + \Delta x$$

o, de manera similar:

$$x = \tilde{x} \pm \Delta x \tag{2}$$

El semiintervalo Δx se denomina *incertidumbre absoluta* de la medición. Muchas veces es útil definir la *incertidumbre relativa*, la cual se suele expresar como un porcentaje:

$$\Delta x_{rel} = \frac{\Delta x}{\tilde{x}} \times 100$$

1.3 Error e incertidumbre

Con frecuencia se utiliza el término *error* con el mismo significado que incertidumbre. Sin embargo, de manera rigurosa, no es lo mismo. El error es el apartamiento que tiene el resultado de una medición particular de una magnitud, con respecto al verdadero valor de la magnitud. Dado que este último no se conoce, el error tampoco puede conocerse. Sin embargo, el error existe y hace que tengamos incertidumbre acerca del resultado de la medición.

Los errores en una medición pueden tener varios orígenes:

- **El instrumento de medición**

  El instrumento puede introducir errores en el resultado de la medición debido a una calibración inadecuada, envejecimiento, medición fuera de las condiciones apropiadas de funcionamiento del instrumento, perturbación externa, etc.

- **La propia magnitud**

  A veces la propia magnitud fluctúa o no está precisamente definida, o el objeto a ser medido lo hace. Otras veces el modelo asumido para el objeto bajo medición presenta discrepancias que dan lugar a un error.

- **El proceso de medición**

  A veces no es posible controlar todos los aspectos de una medición (posicionamiento, otras condiciones) de manera que se introducen errores.

- **El entorno**

  A veces las condiciones externas en las que se realiza la medición influyen sobre el resultado de la medición.

- **El propio operador**

  La manera en que se mide o las propias habilidades del instrumentista dan lugar a errores.

Se dice que una medición tiene error por *exceso* (*defecto*) si su valor está por encima (debajo) del valor esperado de la magnitud.

De acuerdo a su comportamiento, los errores pueden clasificarse en:

- *errores absolutamente constantes*: toman el mismo valor en todas las mediciones o presentan un sesgo definido en alguna dirección (positiva o negativa). Una vez estimados pueden sustraerse del resultado de la medición. Un ejemplo típico de error sistemático lo constituyen los errores de calibración de los instrumentos y los errores introducidos por fórmulas derivadas del modelo adoptado. En general, pueden estimarse *a priori*, es decir, antes de la realización de la medición. Este tipo de errores también suelen denominarse *sistemáticos*.

- *errores condicionalmente constantes*: pueden tomar cualquier valor dentro de límites bien acotados. Los errores definidos por el fabricante del instrumento son un ejemplo de este tipo de errores. Los límites de este tipo de errores también pueden estimarse a priori.

- *errores o fluctuaciones al azar* (*random*, en inglés): aparecen cuando se realizan varias mediciones en las mismas condiciones y se observa una dispersión en los resultados sin que dichas diferencias puedan ser predichas individualmente. Sólo después de realizar muchas mediciones es posible determinar cierto comportamiento regular. Claramente, es un tipo de error que puede ser evaluado *a posteriori*, es decir, luego de realizadas varias mediciones. A diferencia de los errores condicionalmente constantes, los límites de las fluctuaciones al azar pueden no ser bien precisos.

Se dice que un conjunto de mediciones de la misma magnitud realizadas en las *mismas* condiciones muestran *repetitividad* cuando los resultados se encuentran muy agrupados. Esto implica que las fluctuaciones

al azar son pequeñas. Por otro lado, cuando se encuentran agrupados los resultados de mediciones de la misma magnitud realizadas en *distintas* condiciones (en otro laboratorio, mediante otra técnica, etc.) se dice que las mismas muestran buena *reproducibilidad*. Esto implica que no sólo los errores o fluctuaciones al azar son pequeños, sino que también los sistemáticos.

A veces, al realizar un conjunto de mediciones se observan datos muy apartados del conjunto general, los cuales son el resultado de mediciones mal realizadas, desarreglos en la configuración (*setup*) experimental o errores del investigador. Dichos datos pueden descartarse razonablemente mediante métodos estadísticos.

1.4 Tipos de mediciones

Es posible dividir los distintos tipos de mediciones en:

- *mediciones directas*: el instrumento actúa directamente con el objeto. Su lectura aporta directamente el resultado de la medición. Por ejemplo: se mide el diámetro d de una moneda con un calibre.
- *mediciones indirectas*: el resultado se obtiene a partir de una fórmula, cuyos argumentos son el resultado de mediciones directas. Por ejemplo: se calcula (mide) el área A de dicha moneda mediante la fórmula $A = \pi d^2/4$. Se mide le diámetro y se calcula A.

En algunos casos basta con realizar una única medición (*medición aislada*) mientras que en otros deben realizarse varias mediciones en idénticas condiciones (*mediciones múltiples*). En este último caso suelen aprovecharse los resultados de todas las mediciones mediante herramientas estadísticas.

Cuando la magnitud o parámetro que se desea medir puede considerarse constante durante todo el tiempo de medición (por ejemplo, durante la medición del ancho de una página A4) se dice que la medición es *estática*. En otro caso la medición es *dinámica*, debiéndose considerar entonces las características dinámicas del instrumento (tiempo de respuesta, deriva, etc.). Por ejemplo, la influencia del tiempo de respuesta de un termómetro puede hacerse evidente si la la temperatura de interés varía muy bruscamente.

1.5 Presentación de resultados. Redondeo

Con excepción de mediciones de alta precisión, no es necesario conservar más que una cifra significativa de la incerteza. Sin embargo, para no incluir errores de redondeo, en los cálculos en los que se utilice la incertidumbre conviene utilizar más de una cifra significativa.

El número de cifras significativas del resultado no debe ir más allá que la incertidumbre.

Una vez determinado el número de cifras significativas del resultado a conservar, adoptaremos las siguientes reglas de redondeo:

1. El último dígito *no se modifica* si el siguiente es menor que 5.
   Ejemplo: Si $A = 85.6342 \pm 0.04$, entonces escribiremos como resultado final $A = 85.63 \pm 0.04$.

2. El último dígito *aumenta en 1* si el siguiente es mayor o igual que 5.
   Ejemplo: Si conservamos 3 cifras significativas, 18590 se convierte en 18600 y 152.56 en 153.

3. Los dígitos faltantes se completan con ceros hasta la posición de la incerteza.

En general, cuando el resultado de una medición se presenta sin hacer referencia a su incertidumbre, se asume que la misma es del orden de una unidad en la última cifra significativa. Por ejemplo, si el resultado de la medición de una longitud es $L = 3.75$ mm, se asume que en realidad es $L = (3.75 \pm 0.01)$ mm. Si $L = 2.30$ micrones, entonces está implícito que $L = (2.30 \pm 0.01)$ micrones.

1.6 Precisión y exactitud

Los conceptos de precisión y exactitud suelen usarse sin mucha rigurosidad. Esto no suele representar un problema si cada vez se aclara el siginificado de su uso. Sin embargo, es posible definir el significado de cada concepto, como sigue a continuación.

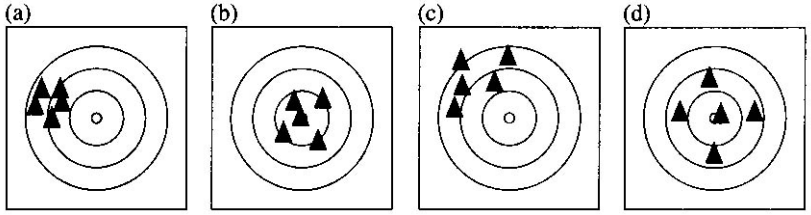
Cuando se realizan varias mediciones de la misma magnitud en iguales condiciones, suele ser común que los valores obtenidos no coincidan, sino que se encuentren distribuidos alrededor de un valor central. En este contexto, el concepto de precisión tiene que ver con cuán concentrados están dichos valores (repetitividad). Por otro lado, la exactitud tiene que ver con cuán cerca del *verdadero* valor se encuentran los resultados de las sucesivas mediciones.

1.7 Incertidumbre de tipo instrumental

Cuando realizamos una medición mediante un instrumento analógico o digital, el resultado está afectado por una *incertidumbre instrumental*, la cual es brindada por el fabricante en la planilla de datos que acompaña el equipo. Una componente importante de la incertidumbre instrumental es la resolución del instrumento, es decir, el valor de la mínima división de escala que puede apreciarse al leer el resultado de la medición. La incertidumbre instrumental puede estimarse *a priori*, es decir, antes de proceder a la medición.

1.8 Problemas

1. Diferencia entre precisión y exactitud. Observe la siguiente figura. Los triángulos representan los resultados de un conjunto de mediciones y su apartamiento con respecto al "valor verdadero" (el centro del círculo). Algunas determinaciones son más precisas o más exactas que otras. Ubíquelas de manera cualitativa en un gráfico Exactitud vs. Precisión.



2. En un laboratorio se están probando cinco relojes. Exactamente al mediodía, determinado por la señal de la radio, los relojes marcaron en los días sucesivos de una semana lo siguiente:

Reloj	Dom.	Lun.	Mar.	Mier.	Jue.	Vie.	Sáb.
A	12:36:40	12:36:56	12:37:12	12:37:27	12:37:44	12:37:59	12:38:14
B	11:59:59	12:00:02	11:59:57	12:00:07	12:00:02	11:59:56	12:00:03
C	15:50:45	15:51:43	15:52:41	15:53:39	15:54:37	15:55:35	15:56:33
D	12:03:59	12:02:52	12:01:45	12:00:38	11:59:31	11:58:24	11:57:17
E	12:03:59	12:02:49	12:01:54	12:01:52	12:01:32	12:01:22	12:01:12

   Teniendo en cuenta los conceptos de precisión y exactitud, trate de definir estimadores cuantitativos de ambas características de un conjunto de mediciones. Luego ubique cada reloj en un gráfico Exactitud vs. Precisión.

3. Se busca medir el espesor de una chapa metálica empleando un tornillo micrométrico que aprecia la centésima de milímetro. La lectura efectuada da como resultado $e = 4.25$ mm. ¿Puede asegurarse que el espesor de la chapa vale lo que se indica con una incertidumbre menor al 1 por mil? Fundamente.

4. Se desea medir la longitud de una varilla empleando una cinta métrica. Esta tiene un extremo, el del origen, truncado (le falta un trozo de 1 cm de longitud) y el experimentador lo advierte luego de haber realizado las mediciones.

   (a) Las lecturas efectuadas con esa cinta métrica obviamente estarán afectadas por un error (sí/no).

   (b) ¿Cómo es ese error? (por exceso/por defecto).

   (c) ¿Puede ser corregido? ¿Cómo?

5. Un cuerpo se cuelga del extremo de un resorte con el fin de calcular su peso a partir de la medición del estiramiento del resorte (dinamómetro). Se efectúa la lectura de la posición del extremo del resorte frente a una escala E situada detrás del mismo. El observador se ubica frente al resorte y efectúa las lecturas. Ellas están afectadas por incertidumbre.

   (a) ¿Qué fuentes de error aumentan la incertidumbre?

   (b) ¿Cuáles de estas fuentes de error pueden suprimirse o disminuirse? Fundamente.

   (c) ¿Cuál es la posición correcta para realizar las mediciones?

6. Supongamos un cronómetro analógico (una vuelta de la aguja $\equiv$ 1 minuto). Identifique el tipo de error presente en los dos casos siguientes y la manera (analítica) de corregir los valores medidos (calibración).

   (a) El cronómetro arranca siempre de 2/5 s y no de cero.

   (b) La aguja del cronómetro salta instantáneamente un número de divisiones que equivalen a 2/5 s cada vez que pasa por cero.

   En ambos casos dibuje de manera esquemática el gráfico Tiempo verdadero (T) vs. Tiempo medido (t) y proponga un procedimiento para calibrar la medición.

7. Una persona mide una soga y afirma haber obtenido el resultado 15.35 m. ¿Qué podemos conjeturar acerca de la incertidumbre de la medición efectuada?

8. Un cronómetro digital da una lectura de la hora de 09:46 (hh:mm). ¿Cuál es la incertidumbre absoluta de la medida?

9. Un cronómetro del laboratorio tiene un segundero que se mueve a pasos de un segundo. Se utiliza para medir un cierto intervalo de tiempo. Al principio del intervalo marcaba las 09:15:22 (horas:minutos:segundos) y, al final, las 09:18:16. ¿Cuál es la incertidumbre relativa del intervalo medido?

10. ¿Para medir una longitud del orden de los 5 cm con un error porcentual no mayor que el 4% será necesario utilizar una regla que aprecie como mínimo hasta el (medio/tercio/cuarto/quinto/décimo) de cm? Fundamente su respuesta.

11. Utilizar los prefijos adecuados (ver, p.e., la Tabla 1-2 del libro Física-Parte I, Resnick y Halliday) para expresar las siguientes cantidades:10^{6} Ohms, 10^{-6} m, 10^{1} litros, 10^{9} g, 10^{12} ton, 10^{-1} litros, 10^{-2} m, 10^{-9} Amperes, 10^{-12} Faradios.

12. Determine cuáles de los siguientes resultados están incorrectamente expresados y realice las correcciones que considere adecuadas:

a) 24567 ± 2928 m	e) 345 ± 3 m	i) 43.00 ± 0.06 m
b) 43 ± 0.06 m	f) 23.463 ± 0.165 cm	j) 345.20 ± 3.10 mm
c) 23.5 ± 0.2 cm	g) 345.2 ± 3 m	
d) 24567 ± 3000 cm	h) 24000 ± 3000	

13. Es probable que los instrumentos digitales utilicen una técnica de redondeo para mostrar el resultado final de una medición. Considere este hecho y evalúe si no es excesivo considerar la apreciación instrumental igual a una unidad de la última cifra significativa mostrada en el display del instrumento. Justifique.

14. Mediante una cinta métrica mida el largo de una pieza de lana para tejer pullóveres. Antes de comenzar, defina con detalle el procedimiento con el que realizará la medición. Tome unas 20 o 30 mediciones. Trate de evaluar los tipos y fuentes de incertidumbre teniendo en cuenta el procedimiento elegido.

15. Imagine que que se mide el diámetro de una mesa circular utilizando una regla plástica escolar con una escala de 30 cm. El diámetro de la mesa se estima en aproximadamente 5 m. ¿Qué tipos de error pueden estar presentes? ¿Si hay errores sistemáticos, serán por defecto o exceso?

16. Mida el espesor de un disco compacto con un calibre manual y luego con un micrómetro digital. Realice unas 20 mediciones con cada instrumento. Considere la incertidumbre instrumental de la medición en cada caso, si es posible a partir del manual provisto por el vendedor. ¿Qué fuentes de error pueden estar presentes?

2 Tratamiento estadístico de datos I

2.1 Fluctuaciones al azar

Cuando se realiza una medición aislada de una magnitud, la incertidumbre está principalmente asociada con la resolución del instrumento utilizado. Por ejemplo, supongamos que se mide el ancho l de una hoja A4 utilizando una regla escolar de 30 cm de longitud. Luego de la medición podremos decir que $l = 210.0 \pm 0.5$ mm, teniendo en cuenta el valor de la mínima división de escala de la regla (1mm) y nuestra capacidad visual. Si repetimos la medición posiblemente obtendremos el mismo valor.

Sin embargo, muchas veces al repetir la medición se observa que el resultado no toma siempre el mismo valor. Por el contrario, se observan fluctuaciones dentro de un rango varias veces mayor a la resolución del instrumento. En este caso ya no puede suponerse que la incertidumbre de la medición está relacionada con la incertidumbre de tipo instrumental.

Este tipo de fluctuaciones pueden estar asociadas al procedimiento con el que se realiza la medición (el cual incluye a veces al propio experimentador) y a fluctuaciones intrínsecas del sistema bajo estudio. En el caso del ejemplo, el traslado sucesivo de la regla produce fluctuaciones por exceso y defecto al azar con respecto a un valor *central*. Las fluctuaciones al azar dan lugar a lo que se conoce como incertidumbre *estadística*.

2.2 Descripción estadística de resultados

La manera inmediata de expresar el resultado de un conjunto de mediciones (*muestra*) realizadas en las mismas condiciones pero que arrojan valores diferentes es la *Tabla*. Ver el ejemplo de la Tabla 1, que reúne $n = 100$ mediciones de longitud ordenadas de menor a mayor (unidad: metro).

Una manera de optimizar la visualización de los datos es mediante la confección del *histograma*, el cual permite apreciar la *distribución* de los datos. Para construir el histograma se definen m *intervalos de clase* y se grafica el número F_j, $j = 1, ..., m$, de mediciones que caen dentro de cada intervalo (*frecuencias absolutas*). A veces es conveniente graficar las *frecuencias relativas* f_j, que no son otra cosa que el cociente entre las frecuencias absolutas y el número total de mediciones n ($f_j = F_j/n, j = 1, ..., m$). A partir de lo anterior queda claro que la suma de las F_j es igual al número total de mediciones (o a la unidad, si se utilizaron las

frecuencias relativas), es decir:

$$\sum_{j=1}^{m} F_j = n \tag{3}$$

$$\sum_{i=j}^{m} f_j = 1 \tag{4}$$

El número adecuado de intervalos de clase depende del número total de mediciones. El histograma correspondiente a la Tabla de más arriba puede verse en la Fig. 1.

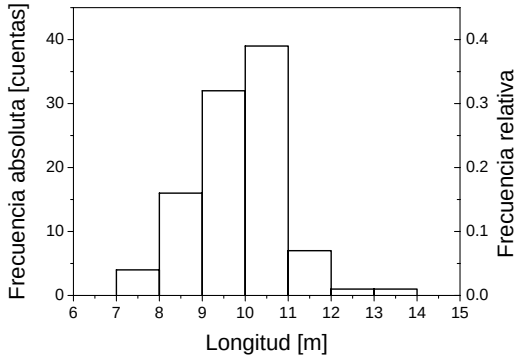


Figura 1: El gráfico de barras corresponde al histograma de los datos de la Tabla anterior. Se eligieron siete intervalos de clase.

2.3 Valores centrales y dispersión

El histograma permite estimar visualmente el valor central de la distribución, su dispersión y su sesgo (o asimetría). Sin embargo, estas magnitudes pueden definirse más precisamente de la siguiente manera.

a) **Moda**
Corresponde al valor de la variable que ocurre más veces, es decir, aquel en el que el histograma alcanza un máximo (10.5 en el histograma de la Fig. 1, es decir, el valor medio del intervalo de clase con mayor frecuencia).

b) **Mediana**
Si ordenamos todos los datos de manera creciente, la mediana es aquel situado en la mitad del conjunto. Si tenemos en cuenta la Tabla anterior, la mediana tendrá el valor 9.98.

c) **Media**
También se conoce como promedio, valor medio o media aritmética. Se define como:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{5}$$

A veces, se escribe la media como $\langle x \rangle$ en lugar de $\bar{x}$. Nosotros usaremos ambas notaciones indistintamente.

También es necesario precisar cuantitativamente la dispersión de la distribución alrededor de su valor central. Se define la *desviación estándar muestral* como:

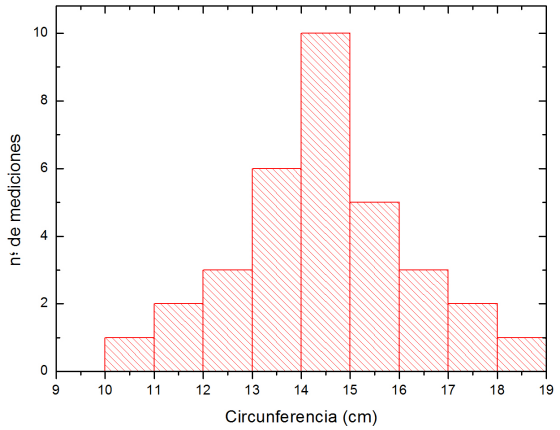
$$S_n(x) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2}{n}} \tag{6}$$

Para la muestra de $n = 100$ valores que ha servido de ejemplo hasta ahora, se obtiene que $\bar{x} = 9.85$ m y $S_n = 0.98$ m.

2.4 Problemas

1. Calcule $\bar{x}$, $S_n(x)$ y dibuje el histograma a partir de los datos de los Ej. 14 y 16 de la pág. 13. En cada caso determine los intervalos simétricos alrededor del promedio dentro de los cuales se encuentra el 68% y el 95% de los datos experimentales. Cómo resulta el semiancho de estos intervalos comparados con el valor de $S_n(x)$ en cada caso? Y con la incertidumbre instrumental?

2. En la siguiente figura se muestra el histograma de los resultados de la medición de la circunferencia de una pieza cilíndrica. Estime un valor aproximado para el promedio y la desviación estándar muestral del conjunto de datos.



3. De la página web de la materia se puede bajar una muestra de datos de la medición de la diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito, obtenida con un ritmo de muestreo (*sampling*) de 10^3 s^{-1}. Determine $\bar{x}$, $S_n(x)$ y dibuje el histograma. Determine también el valor de la mediana y la moda. Qué porcentaje de los datos experimentales se encuentran dentro de los intervalos centrados en $\bar{x}$ con semiancho $S_n(x)$?

4. Dada la siguiente tabla que corresponde a la masa en gramos de 50 balas:

2.5696	2.5625	2.5586	2.5725	2.5776	2.5745	2.5693	2.5819	2.5700	2.5780	2.5666
2.5678	2.5735	2.5595	2.5865	2.5816	2.5608	2.5730	2.5658	2.5637	2.5712	2.5788
2.5768	2.5587	2.5613	2.5713	2.5693	2.5655	2.5769	2.5778	2.5713	2.5669	2.5578
2.5715	2.5747	2.5632	2.5612	2.5687	2.5746	2.5694	2.5746	2.5690	2.5681	2.5643
2.5745	2.5660	2.5685	2.5742	2.5523	2.5513					

(a) Determine $\bar{x}$, $S_n(x)$ y grafique el histograma.

(b) Estime la incertidumbre instrumental y compárelo con $S_n(x)$.

5. Se quiere determinar el tiempo de reacción con el que un observador percibe el momento en que comienza a caer un objeto. Se diseñan el siguiente experimento: una persona toma una regla graduada por un extremo y la deja caer sorpresivamente. El observador, quien inicialmente coloca sus dedos en el punto correspondiente al cero de la regla pero sin tomarla, toma la regla en cuanto percibe que la misma comienza su caída libre. Luego se toma nota de a qué distancia del cero tomó la regla (la denominaremos x). Se propone que el tiempo de reacción se puede calcular a través de la expresión $t = \sqrt{2x/g}$, donde g es la aceleración de la gravedad.

   Realizar dicho experimento un buen número de veces (entre 20 y 50).

   (a) Determine $\bar{x}$, $S_n(x)$ y grafique el histograma.

   (b) Estime la incertidumbre instrumental u_x y compárela con $S_n(x)$. ¿Son del mismo orden?

   (c) Calcule el tiempo de reacción a partir de la fórmula cinemática $\bar{t} = \sqrt{2\bar{x}/g}$. Estime la incertidumbre u_t en la determinación de $\bar{t}$.

6. De acuerdo al ejercicio anterior, el tiempo $\bar{t} \pm u_t$ puede tomarse como el tiempo que transcurre entre el instante en que percibimos un estímulo y el instante en que realizamos una acción condicionada a este estímulo. Supongamos que se desea medir el tiempo de caida T de una pelotita desde cierto altura mediante un cronómetro manual con una resolución de 10^{-4} s. Se utilizan dos configuraciones experimentales distintas. En la primera una persona deja caer la pelotita y el operador del cronómetro sólo mide el tiempo. En la segunda, el operador del cronómetro mide el tiempo y también se ocupa de dejar caer la pelotita. Discuta si el tiempo de reacción introduce algún tipo de incertidumbre en la determinación de T. Determine si el error introducido es sistemático o no.

3 Incertidumbre de mediciones directas

3.1 Incertidumbre del promedio

Supongamos que tomamos muchas muestras del mismo tamaño, digamos $n = 100$, calculamos para cada una su promedio y construimos un histograma con dichos valores. Si ahora tomamos muchas muestras de mayor tamaño, por ejemplo $n = 10000$, calculamos el promedio de cada una y comparamos los histogramas, observamos que ambos se centran alrededor de un mismo valor (que podemos llamar μ), pero el ancho de cada uno es distinto. En particular, los promedios de muestras más grandes se encuentran más agrupados. Eso significa que su desviación estándar es menor. En particular, puede demostrarse que la desviación estándar del promedio de una muestra de tamaño n puede estimarse mediante:

$$S_{n-1}(\bar{x}) = \frac{S_{n-1}(x)}{\sqrt{(n)}} \tag{7}$$

Es importante notar que para todas las muestras, las de tamaño $n = 100$ y $n = 10000$, $S_{n-1}(x)$ tomará valores similares. Esto se debe a que $S_{n-1}(x)$ estima la dispersión alrededor de un valor central de *mediciones individuales*.

3.2 Combinación de incertidumbres

Supongamos que al realizar múltiples lecturas mediante un instrumento con incertidumbre instrumental U_i observamos fluctuaciones al azar. Encontramos que su promedio $\bar{x}$ tiene una incertidumbre caracterizada por la desviación estándar $S_{n-1}(\bar{x})$. Puede demostrarse que la desviación estándar combinada o total será:

$$S^2 = S_A^2 + S_B^2 \tag{8}$$

donde S_A y S_B son las incertidumbres obtenidas por medios estadísticos y por otros medios, respectivamente. Es decir:

$$S_A = S_{n-1}(\bar{x})$$

y:

$$S_B = U_i/\sqrt{3}.$$

Teniendo en cuenta que hemos acordado considerar sólo una cifra significativa para la expresión final de la incertidumbre de una medición, en cuanto alguno de los dos términos es un orden de magnitud menor que el otro, puede despreciarse.

Es posible que exista más de una contribución a la incertidumbre tipo B. En ese caso es:

$$S_B^2 = S_{B,1}^2 + S_{B,2}^2 + ...$$

De esta manera, el modo adecuado de expresar el resultado de una medición directa de una magnitud x es el siguiente:

$$x = \bar{x} \pm (kS)$$

donde k se denomina factor de cobertura. Al multiplicar la desviación estándar combinada por k estamos aumentando el factor de confianza α de que el intervalo $\pm(kS)$ contenga al valor más probable de la magnitud x. Puede demostrarse que, bajo ciertas condiciones generales, $\alpha = 95\%$ si $k = 2$ y $\alpha = 99\%$ si $k = 3$. El factor de cobertura más utilizado es $k = 2$.

Por ejemplo, se mide varias veces la longitud L de una barra y se determina el promedio $\bar{L}$ y la desviación estandar combinada S. Entonces escribimos:

se determinó que la longitud de la barra de aluminio fue de 20 cm ± 1 *cm. La incertidumbre se obtuvo a partir de la desviación estándar combinada multiplicada por un factor de cobertur* $k = 2$*. En el anexo se detalla la metodología utilizada para obtener la desviación estándar combinada.*

3.3 Número óptimo de mediciones

A partir de la ec. (7) podemos suponer que la desviación estándar $S_{n-1}(\bar{x})$ con la que se determina $\bar{x}$ puede hacerse tan pequeña como se quiera con tan sólo aumentar el tamaño n de la muestra. Sin embargo, no tiene sentido reducir $S_{n-1}(\bar{x})$ más allá de la incertidumbre de origen instrumental U_i. Es decir, el valor óptimo para n es tal que:

$$U_i \simeq \frac{S_{n-1}(x)}{\sqrt{n}} \tag{9}$$

3.4 Problemas

1. Considere lo realizado en el Ej. 14 (pág. 13). Exprese de manera formal el resultado de la medición. Haga lo mismo con el Ej. 16 (pág. 13).

2. Se mide el valor de una longitud mediante un instrumento. Se realizan mediciones en dos condiciones distintas. En el primer caso se realizan 100 mediciones y se obtiene $\bar{x} = 5.2$ m y $S_{n-1}(x) = 0.03$ m. En el segundo caso se realizan 500 mediciones y se obtiene $\bar{x} = 53.7$ m y $S_{n-1}(x) = 0.08$ m. ¿Cuál de las dos muestras permite determinar *mejor* el valor de la magnitud en cada caso particular? ¿Bajo qué criterios podríamos realizar esta comparación?

3. Se mide una longitud y se determina que $\bar{x} = 5.2$ m y $S_{n-1}(x) = 0.03$ m. Teniendo en cuenta que se realizaron 900 mediciones, se expresa el resultado como:

$$x(95\%) = \left(5.2 \pm 2\frac{0.03}{\sqrt{900}}\right) \text{ m} = (5.2 \pm 0.00196) \text{ m}$$

   ¿Cuántas mediciones habría que realizar para que el mismo intervalo ($u_{\bar{x}} = 0.00196$ m) contenga al verdadero valor de la longitud con un 99% de confianza?

4 Propagación del error

4.1 Propagación del error. Una variable

Supongamos que la magnitud z se calcula a partir de la magnitud medida x de acuerdo a la función (es decir, si realizamos una medición *indirecta*):

$$z = z(x)$$

Supongamos también se ha cometido un error $\pm\Delta x$ al medir x (el error cometido puede tener cualquier signo). ¿Cuánto valdrá Δz? Es decir, ¿cómo se *propaga* el error que se cometió al medir x en el resultado del cálculo de z? Por ejemplo, veamos qué pasa si $z(x) = x^2$:

$$z \pm \Delta z = (x \pm \Delta x)^2 = x^2 \pm 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

Si Δx es pequeño con respecto a x, $(\Delta x)^2$ lo es aún más, por lo que puede despreciarse:

$$\Delta z = 2x\Delta x$$

(*Ejercicio*: ¿Qué error se comete al despreciar $(\Delta x)^2$ si $x = 5$ y $\Delta x/x = 1\%$?)

De manera general una buena estimación de Δz se obtiene a partir del desarrollo en serie de Taylor de $z(x)$:

$$z \pm \Delta z = z(x) + z'(x)(\pm\Delta x) + \frac{1}{2!}z''(x)(\pm\Delta x)^2 + ... \tag{10}$$

Si despreciamos aquellos términos en los cuales aparecen potencias de Δx superiores a la unidad obtenemos:

$$z \pm \Delta z \simeq z(x) \pm z'(x)\Delta x \tag{11}$$

con lo que una buena aproximación de Δz es:

$$\Delta z \simeq z'(x)\Delta x \tag{12}$$

4.2 Propagación del error. Varias variables

Supongamos que:

$$z = x + y,$$

donde x e y fueron medidas con los errores Δx y Δy, respectivamente. Entonces:

$$z \pm \Delta z = (x \pm \Delta x) + (y \pm \Delta y).$$

La combinación más *pesimista* en la incertidumbre de z ocurre cuando ambos errores se suman:

$$\Delta z = \Delta x + \Delta y$$

Lo mismo ocurre si $z = x - y$. En este caso, sin embargo, el error relativo Δz puede tomar valores muy importantes si x e y toman valores muy cercanos.

En el caso general en que $z = z(x, y)$ el cálculo de Δz se realiza de la misma manera que en el caso de la ec. (12) para obtener:

$$\Delta z \simeq \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \tag{13}$$

4.3 Aplicación al caso de mediciones aisladas

Tanto en (12) como en (13) las derivadas se evalúan en los valores *verdaderos* de cada variable, es decir, en μ_x y en μ_y. Dado que estos valores no se conocen, se reemplazarán por sus mejores estimadores, es decir, por los resulados de las mediciones aisladas $\tilde{x}$ y $\tilde{y}$:

$$\Delta z \simeq \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\tilde{x}} \Delta x + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\tilde{y}} \Delta y \tag{14}$$

De igual manera, tampoco se conocen los errores Δx y Δy. Sin embargo, estos errores pueden acotarse por sus límites U_x y U_y. Podemos entonces estimar el máximo error U_z que cometemos al calcular $z = z(x, y)$ a partir de la ec. (13):

$$U_z \simeq \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\tilde{x},\tilde{y}} U_x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\tilde{x},\tilde{y}} U_y \tag{15}$$

y el resultado final de la medición indirecta podrá escribirse como:

$$z = z(\tilde{x}, \tilde{y}) \pm U_z \tag{16}$$

En la ec. (15) se han tomado los valores absolutos en las derivadas parciales para considerar la combinación más pesimista de los signos de los errores de cada variable.

Es usual utilizar la expresión (15) en aquellos casos en que la magnitud z se determina a partir de mediciones aisladas de x e y, o cuando x e y no presentan fluctuaciones si se miden repetidas veces. En estos casos U_x y U_y son las incertidumbres de origen instrumental (error de apreciación o lectura, etc.) y la expresión (16) expresa que el verdadero valor de z se encuentra con seguridad en el intervalo definido por la cota U_z.

4.4 Diseño de experimentos

La ec. (15) brinda una herramienta para decidir las características de los instrumentos y metodologías óptimos para realizar mediciones indirectas. Por un lado brinda una estimación del error máximo que cometemos durante la medición pero, por otro lado, permite determinar qué error máximo podemos admitir en la medición de cada magnitud x, y, etc., si estipulamos de antemano el error máximo u_z con el que necesitamos medir $z = z(x, y)$.

4.5 Problemas

1. Dadas las funciones $z = axy$, $z = a(x/y)$, $z = ax^n$ y $z = axyw$ (a es una constante), estime el error relativo de z en función de los errores relativos de las otras variables.

2. Supongamos que se conoce la incertidumbre de la magnitud x^{-1}, es decir, $\Delta(x^{-1})$. Determine Δx.

3. Un cono debe cubrirse de una lámina de oro. Si se mide el radio de su base circular circular y su altura con una incertidumbre del 2%, con qué incertidumbre podremos determinar de manera indirecta su superficie?

4. Determine experimentalmente el valor de π. Para esto mida el diámetro y la circunferencia de un objeto circular cualquiera utilizando una regla pequeña y un hilo de longitud conocida. Estime el error absoluto máximo para cada medición y determine, considerando la propagación de errores, el intervalo de incerteza en la determinación de π. ¿Se encuentra el "verdadero valor" dentro de dicho intervalo de incerteza?

5. Estime la incerteza con la que mide el calibre digital del laboratorio y suponga que está bien calibrado. Suponga que se utiliza para medir el diámetro de una esfera metálica, para luego calcular su volumen. ¿Qué error relativo máximo se comete en el cálculo si el diámetro de la esfera es 20 cm? Suponga que queremos calcular el diámetro con una incerteza menor al 1% . ¿Cuál es el diámetro mínimo que debe entonces tener la esfera?

6. Según el fabricante, el lado de una cámara cúbica que será utilizada en un experimento mide 42.56 cm. Calcular el volumen de la misma (no olvide expresar la incerteza de la medición indirecta).

7. La misma situación ahora, pero con un recipiente cilíndrico cuya altura y diámetro de la base miden 10.01 cm y 5.03 cm, respectivamente. Suponiendo que la única fuente de error es la apreciación del instrumento, ¿con cuántas cifras significativas debe tomarse π para que el volumen sea calculado con una incertidumbre menor al 1%?.

8. Una esfera que se encuentra en el laboratorio es de una aleación con peso específico $\rho = 7.78$ Kg/dm^3. Si su diámetro, medido con el calibre digital, es de 5 mm, ¿puede estimarse el peso de las mismas con una incertidumbre menor del 1%?

9. La distancia focal f de una lente delgada se va a medir usando la ecuación $o^{-1} + i^{-1} = f^{-1}$, donde $o = 0.154 \pm 0.002$ m es la distancia lente-objeto, y $i = 0.382 \pm 0.002$ m es la distancia lente-imagen. ¿Cuál es el valor calculado de la distancia focal, su incertidumbre absoluta y su incertidumbre relativa? Si resulta conveniente, utilizar los resultados del Ej. 2.

10. Se ha medido con el calibre del Ej. 5 el diámetro de dos esferas idénticas en tamaño pero de distinto material. Si el diámetro de las mismas es de aproximadamente unos 10 cm, calcule el error porcentual

máximo en la determinación del peso específico de las esferas, sabiendo que el peso de las mismas es:

$$\begin{aligned} P_1 &= (66.717 \pm 0.001)\text{g} \\ P_2 &= (16.287 \pm 0.001)\text{g} \end{aligned}$$

11. Se trata de medir el módulo de Young por tracción con un error máximo del 1%. El módulo de Young E está dado por:

$$E = \frac{LP}{\pi r^2 d} \text{ Kg mm}^{-2}$$

donde L es la longitud del alambre, r su radio y P el peso que produce un alargamiento d. Suponga que los valores aproximados para cada variable son: $L = 1000$ mm, $P = 2$ Kg, $r = 0.5$ mm y $d = 0.3$ mm.
Analizar la influencia de los errores que se cometen en la medición de cada variable en el error de E. Determinar los valores máximos de error de apreciación para los diferentes instrumentos que se utilizarán, para lograr un error total no mayor del 1% en el cálculo de E.

12. Un péndulo simple se usa para medir la aceleración de la gravedad g, usando $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. El período T medido fue de 1.24 ± 0.02 s y la longitud $l = 0.381 \pm 0.002$ m. ¿Cuál es el valor resultante de g con su incertidumbre absoluta y relativa?

13. Se quiere medir la potencia eléctrica que disipa una resistencia con el menor error posible y se dispone en el laboratorio de un amperímetro, un voltímetro y un óhmetro a los que el fabricante ha asociado una incertidumbre porcentual del 5%, 2% y 1%, respectivamente. Realice un análisis de la incertidumbre para los distintos métodos de medición a fin de seleccionar el que introduzca el menor error. Recuerde que la potencia eléctrica puede calcularse de las siguientes formas:

$$\begin{aligned} P &= VI \\ P &= V^2/R \\ P &= I^2R \end{aligned}$$

14. Se mide g de manera indirecta mediante un experimento de caída libre. Si se asume g constante tendremos que $g = 2h/t^2$, donde t es el tiempo que le lleva a un cuerpo caer una altura h. Sin embargo, sabemos que g no es constante. ¿Con qué incertidumbre experimental habría que medir h y t para que el carácter no-constante de g se haga evidente?

5 Incertidumbre en mediciones indirectas

Cuando se realizan mediciones indirectas, es decir, cuando una magnitud z se obtiene a partir de una relación funcional $z = z(x, y)$, donde x e y son las magnitudes que realmente se miden, debe prestarse atención a la dependencia mutua de x e y, pues el tratamiento estadístico es distinto (supondremos que z depende de dos variables, aunque es inmediata la generalización a más variables).

5.1 Magnitudes dependientes

Este es el caso en el que se espera que las fluctuaciones de x afecten el valor de y. De manera general, x e y se medirán de a pares. Luego, para cada par se calculará $z(x, y)$, de acuerdo al siguiente esquema:

$$\begin{aligned} \text{Medición } 1 &: (x,y)_1 \to z_1 \\ \text{Medición } 2 &: (x,y)_2 \to z_2 \\ &\ldots \\ \text{Medición } n &: (x,y)_n \to z_n \end{aligned}$$

A partir de aquí, seguiremos los pasos que vimos anteriormente tomando a z como una magnitud que se midió de manera directa. Es decir, podremos calcular $\bar{z}$ y $S_{n-1}(\bar{z})$ y expresar el resultado como:

$$z(\alpha) = \bar{z} \pm u_\alpha$$

donde $u_\alpha = z_\alpha S_{n-1}(\bar{z})$ es la incertidumbre estadística de z para un valor elegido de probabilidad de confianza α.

Por ejemplo, supongamos que se monta el siguiente experimento para determinar el valor de la aceleración de la gravedad g: mediante un cañón a resorte se dispara n veces un proyectil hacia arriba, y de alguna manera se mide la altura máxima h a la que llega el proyectil y el tiempo t que transcurre desde el disparo hasta que el proyectil alcanza la altura h. A partir de h y t es posible calcular g mediante:

$$g = \frac{2h}{t^2}$$

Podemos esperar que en cada disparo el impulso dado por el cañón no sea el mismo, de manera que la altura h no sea la misma. Ahora bien, el valor de t dependerá claramente del valor de h, es decir, h y t son *magnitudes dependientes*. Por tal motivo, deben medirse de a pares, en exactamente las mismas condiciones. Para cada par (h_i, t_i) se calculará el correspondiente g_i.

5.2 Magnitudes independientes

Este es el caso en el que las magnitudes x e y a partir de las cuales se calcula z no ejercen influencia una sobre la otra. Este es el caso, por ejemplo, cuando se calcula la densidad de un material, realizando n mediciones de su volumen y su peso.

Supongamos que hemos calculado $\bar{x}$, $\sigma_{\bar{x}}$, $\bar{y}$ y $\sigma_{\bar{y}}$. ¿Cómo podemos calcular $\bar{z}$ y $\sigma_{\bar{z}}$? Asumiremos que $\bar{z}$ puede calcularse mediante:

$$\bar{z} = z(\bar{x}, \bar{y}) \tag{17}$$

Ahora bien, ¿qué ocurre con $\sigma_{\bar{z}} = \sigma_z/\sqrt{n}$? Primero, estimemos la desviación estándar de z, σ_z, mediante la ec. (**??**):

$$\sigma_z \simeq S_{n-1}(z) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta z^2}{n-1}}$$

De acuerdo a la ec. (14), el error en cualquier medición será:

$$\Delta z \simeq \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\tilde{x}} \Delta x + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\tilde{y}} \Delta y$$

Combinando las ecuaciones anteriores, tendremos:

$$S_{n-1}^2(z) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right)^2 + 2\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right]$$

Teniendo en cuenta que las derivadas parciales se evalúan en $\tilde{x} = \bar{x}$ y $\tilde{y} = \bar{y}$, es decir, que son números:

$$S_{n-1}^2(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta x^2}{n-1} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta y^2}{n-1} + \frac{2}{n-1}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\sum_{i=1}^{n} \Delta x \Delta y =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 S_{n-1}^2(x) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 S_{n-1}^2(y) + \frac{2}{n-1}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\sum_{i=1}^{n} \Delta x \Delta y$$

Ahora bien, como x e y son *independientes*, se espera que el productos de sus fluctuaciones al azar se cancelen mutuamente, con lo cual:

$$S_{n-1}^2(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 S_{n-1}^2(x) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 S_{n-1}^2(y)$$

Si dividimos por n y tomamos raíz cuadrada:

$$S_A(\bar{z}) = S_{n-1}(\bar{z}) = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 S_{n-1}^2(\bar{x}) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 S_{n-1}^2(\bar{y})} \tag{18}$$

Mediante la expresión (**??**) es posible obtener $u_{\alpha,z}$ para un valor dado de α.

5.3 Incertidumbre instrumental en mediciones indirectas

Los distintos instrumentos contribuyen a la incertidumbre instrumental mediante incertidumbres de tipo B de acuerdo a la siguiente expresión:

$$S_B = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 S_{B,x}^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 S_{B,y}^2} \tag{19}$$

donde $S_{B,x}$ y $S_{B,y}$ se obtienen a partir de:

$$S_{B,x} = U_{i,x}/\sqrt{3}$$

y:

$$S_{B,y} = U_{i,y}/\sqrt{3}$$

siendo $U_{i,x}$ y $U_{i,y}$ los valores límite para la incertidumbre introducida por los instrumentos utilizados para medir x e y.

Luego, aplicamos la ec. (8) para combinar la incertidumbre instrumental S_B con la estadística S_A:

$$u_t^2 = S_A^2 + S_B^2$$

5.4 Expresión final del resultado de una medición indirecta

La expresión final del resultado de una medición indirecta de una magnitud z que combina incertidumbres de tipo A y B es la siguiente:

$$z(\alpha) = \bar{z} \pm k u_t \tag{20}$$

siendo k el factor de cobertura elegido, el cual provee un nivel de confianza α determinado. En general se puede asumir normalidad, con lo cual α tomará los valores de 68%, 95% y 99% para k igual a 1, 2 o 3, respectivamente.

5.5 El método de mínimos cuadrados

Muchas veces ocurre que dos magnitudes x e y están relacionadas funcionalmente mediante algún modelo, es decir:

$$y = y(x, \alpha, \beta, ...)$$

donde $\{\alpha, \beta, ...\}$ son un conjunto de *parámetros* que dependen del modelo asumido.

Por ejemplo, la distancia d recorrida por un cuerpo que desliza hacia abajo con rozamiento por un plano inclinado un ángulo θ con respecto a la horizontal, en función del tiempo t, está dada por:

$$d(t) = \frac{1}{2}\left[g\left(\text{sen }\theta - \mu\cos\theta\right)\right]t^2$$

donde g es la aceleración de la gravedad y μ el coeficiente de rozamiento dinámico entre el plano y el cuerpo. En la expresión anterior, d y t son las magnitudes o variables del modelo, mientras que $\{g, \theta, \mu\}$ es el conjunto de parámetros. Si suponemos que no hay rozamiento, el modelo se simplifica, dando lugar a la expresión:

$$d(t) = \frac{1}{2}g\text{ sen }\theta t^2 \tag{21}$$

Supongamos que se realiza n veces el experimento de dejar caer el cuerpo por el plano inclinado durante un tiempo t_i, midiéndose la distancia recorrida d_i $(i = 1, ..., n)$. Supongamos, además, que este procedimiento se lleva a cabo para distintos intervalos de tiempo, es decir, los tiempos t_i no son todos iguales (ver Fig. 2).

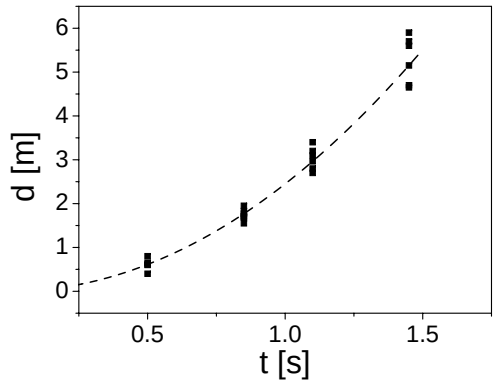


Figura 2: Resultado de medir la distancia que recorre un cuerpo por un plano inclinado, para distintos tiempos de caída. Mediante el método de cuadrados mínimos se determina el valor de $(g \text{ sen } \theta)$ que mejor ajusta el modelo a los datos experimentales (línea a trazos).

Supongamos que ahora deseamos, a partir de los datos de la Fig. 2, encontrar el valor de g. Para esto debemos *acomodar* de la *mejor manera* la expresión (21) a los datos mostrados en la figura. Es decir, queremos *ajustar* la curva a los datos experimentales.

Uno de los métodos más utilizados es el *método de cuadrados mínimos*, que consiste en encontrar los valores de los parámetros que minimizan la *distancia* entre los puntos experimentales y la curva de ajuste. Mediremos esta distancia mediante la siguiente expresión general:

$$S^2_{n-2}(\alpha, \beta, ...) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - y(x_i, \alpha, \beta, ...)\right]^2}{n-2} \tag{22}$$

donde $\{\alpha, \beta, ...\}$ son los *parámetros de ajuste*. Para encontrar los valores óptimos de dichos parámetros debemos encontrar la solución al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial S^2}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial S^2}{\partial \beta} = 0 \tag{23}$$

En el caso en el que el modelo es lineal, es decir, $y = \alpha x + \beta$, la solución puede encontrarse unívocamente a través del método de *regresión lineal*. Sin embargo, en los casos no-lineales, debe recurrirse a métodos numéricos más complicados.

Regresión lineal

Como dijimos, en este caso es:

$$y(x, \alpha, \beta) = \alpha x + \beta$$

Cuando resolvemos el sistema de ecuaciones (23) para la expresión anterior, encontramos que los valores óptimos son:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}, \qquad \text{en donde } \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{24}$$

$$\beta = \bar{y} - \alpha\bar{x}, \qquad \text{en donde } \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \tag{25}$$

Por otra parte, si asumimos que la dispersión de los valores de y alrededor de la recta posee una distribución normal con desviación estándar σ, la mejor estimación de este parámetro es justamente S_{n-2}, es decir:

$$\sigma^2 \simeq S^2_{n-2}(\alpha, \beta, ...) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - y(x_i, \alpha, \beta, ...)\right]^2}{n-2} \tag{26}$$

Además, α y β también estarán afectadas de incertidumbre. Sus desviaciones estándar podrán aproximarse mediante:

$$\sigma_\alpha^2 \simeq \frac{S_{n-2}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \tag{27}$$

$$\sigma_\beta^2 \simeq \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}\right] S_{n-2}^2 \tag{28}$$

El coeficiente de correlación lineal r, definido mediante:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})}} \tag{29}$$

estima *cuán lineal* es la relación entre x e y. Si $r = \pm 1$, la relación es lineal unívocamente. Ahora bien, si $r = 0$, x e y no están correlacionadas para nada.

Ejemplo: Supongamos que se realizan $n = 18$ mediciones de dos variables, x e y, como se muestra en la tabla siguiente:

x	y	x	y	x	y
18.30	18.41	18.16	17.13	20.28	19.70
19.08	18.47	18.16	17.49	20.43	20.62
17.98	16.46	17.73	16.97	18.37	18.40
20.43	18.79	18.36	19.45	20.71	20.25
16.96	15.77	18.33	17.93	19.97	19.38
18.46	17.56	17.69	17.04	19.59	19.13

A partir de estos datos es posible calcular, utilizando las expresiones anteriores, los valores óptimos de los parámetros de ajuste:

$$\alpha = \frac{n\sum y_i x_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = 1.04711$$

$$\sigma_\alpha \simeq 0.14255$$

$$\beta = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = -1.44501$$

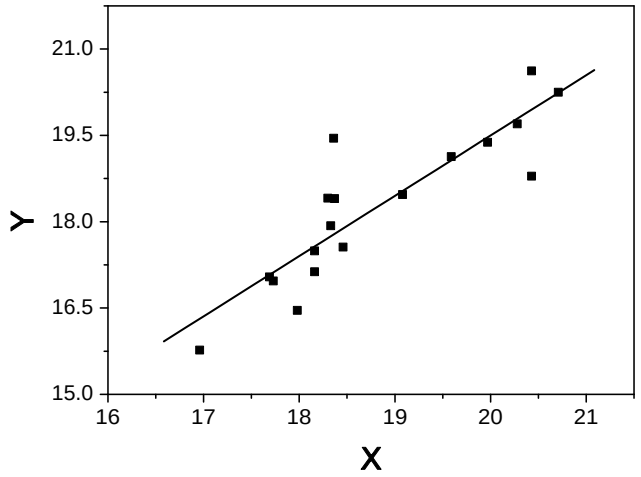
$$\sigma_\beta \simeq 2.68911$$

$$r = 0.87823$$

$$\sigma \simeq 0.6598$$

$$p < 0.0001$$

El parámetro p no fue definido más arriba pero es muy importante en todo procedimiento de ajuste o eva-luación de la validez de un modelo contra un conjunto de datos. Básicamente expresa cuál es la probabilidad de que los datos obtenidos no se correspondan con el modelo propuesto. En nuestro caso, cuál es la probabilidad de que $r = 0$. En la figura siguiente se pueden observar los datos y la recta de ajuste.



Número óptimo de mediciones en la regresión lineal

Podemos asumir que los apartamientos de y alrededor de la recta $y = \alpha x + \beta$ se originan en fluctuaciones al azar. Es decir:

$$y = \alpha x + \beta + \epsilon \tag{30}$$

Notar que hemos asumido que x no tiene ninguna componente de fluctuación al azar. Por este motivo, el marco teórico de la regresión lineal es válido siempre que la variable elegida como x presente fluctuaciones despreciables con respecto a las de la magnitud y.

Si suponemos que ϵ está distribuida normalmente con valor medio nulo y desviación estándar σ_ϵ el valor óptimo de mediciones podrá estimarse de una manera similar a como lo hicimos para obtener la ec. (9). Es decir, cuando la incertidumbre instrumental $u_{i,y}$ con la que se mide la magnitud y sea del orden de $\sigma_\epsilon/\sqrt{n}$:

$$u_{i,y} \simeq \sigma_\epsilon/\sqrt{n}$$

Este límite puede evaluarse si se tiene en cuenta que la ec. (22) es la que brinda una estimación de σ_ϵ:

$$\sigma_\epsilon \simeq S_{n-2}$$

5.6 Problemas

1. Los alumnos de Física Experimental I realizan el experimento de tiro vertical para determinar el valor de la acelaración de la gravedad g. Mediante un cañón de resorte arrojan hacia arriba una bala esférica. Como el cañón está orientado de manera vertical con mucha exactitud, la bala no se desplaza horizontalmente. Por este motivo, su altura h en función del tiempo t estará dada por (v_0 es la velocidad inicial de la bala):

$$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

y su velocidad por:

$$v(t) = v_0 - gt$$

Supongamos que cuando $t = T$ la bala está en el punto más alto de su trayectoria, es decir, $h(T) = h_{max} = H$. En ese instante, su velocidad es nula:

$$0 = v_0 - gT$$

con lo cual:

$$v_0 = gT$$

Reemplazando la ecuación anterior en la primera cuando $t = T$, tenemos que:

$$H = (gT)T - \frac{1}{2} g T^2 = \frac{1}{2} g T^2$$

Teniendo en cuenta la ecuación anterior, si se mide el valor de H y T es posible calcular el valor de la aceleración de la gravedad:

$$g = \frac{2H}{T^2} \tag{31}$$

Los alumnos repiten el experimento $n = 10$ veces, y en cada caso miden H y T. Obtienen los siguientes pares de puntos (H, T):

i	H_i [m]	T_i [s]
1	0.924	0.436
2	0.430	0.299
3	0.781	0.401
4	0.606	0.356
5	0.692	0.379
6	0.730	0.384
7	0.771	0.395
8	0.871	0.423
9	1.021	0.453
10	0.727	0.379

(a) Suponga que H y T son magnitudes independientes. Calcule el valor de g y su incertidumbre a partir de los resultados de la tabla.

(b) Calcule el valor de g y su incertidumbre suponiendo que H y T son magnitudes dependientes.

(c) Compare y discuta sobre la validez de los resultados anteriores.

(d) Estime la importancia de las incertidumbres instrumentales y la posible influencia sobre los resultados anteriores.

2. Se deja caer $n = 8$ veces un cuerpo por un plano inclinado un ángulo $\theta = (30 \pm 5)^{\circ}$ con respecto a la horizontal. Entre el cuerpo y el plano se genera un colchón de aire que minimiza el rozamiento entre ambos. En la tabla se muestran los resultados:

Tiempo t_i [s]	Distancia d_i [m]
1.93	9.22
1.66	7.01
1.69	6.91
1.67	6.85
1.68	7.16
1.63	6.72
1.29	3.50
1.51	5.18

Determine a partir de las mediciones el valor de la aceleración de la gravedad g, junto con su incertidumbre.

3. Suponga que se realizan $n = 11$ mediciones del volumen y la masa de un cuerpo, obteniéndose los siguientes resultados:

Masa m_i [10^{-3} kg]	Volumen V_i [10^{-6} m^3]
252.9119	195.3799
252.9133	195.3830
252.9151	195.3790
252.9130	195.3819
252.9109	195.3795
252.9094	195.3788
252.9113	195.3792
252.9115	195.3794
252.9119	195.3791
252.9115	195.3791
252.9118	195.3794

Considerando que m y V son variables independientes, determinar la densidad ρ del cuerpo, y la incertidumbre asociada. Determinar el número óptimo de mediciones.

4. Plantee las ecuaciones de minimización para el modelo lineal y obtenga las ecuaciones:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}, \qquad \text{en donde } \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\beta = \bar{y} - \alpha\bar{x}, \qquad \text{en donde } \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

5. Realice los cálculos correspondientes al ejemplo regresión lineal de la pág. 32 y determine el número óptimo de mediciones.

6 El modelo y el experimento

6.1 Comparación modelo-experimento

Al analizar un fenómeno que presenta aspectos desconocidos o aún no muy bien aclarados, es necesario primero identificar el conjunto de *variables relevantes* que lo caracterizan (en muchos casos, luego de la observación inicial es necesario redefinir este conjunto). Un *modelo* del fenómeno es una estructura idealizada que relaciona estas variables de alguna manera. En general, no es otra cosa que una relación matemática que involucra las magnitudes relevantes y un conjunto de parámetros adicionales. A veces la expresión matemática, incluyendo los parámetros, nacen de una interpretación completamente teórica del fenómeno. En dicho caso decimos que el modelo es *teórico*. Otras veces, la relación matemática y los parámetros no tienen una base teórica rigurosa, pero de todos modos describen muy bien la relación observada entre las magnitudes relevantes del fenómeno. En este caso el modelo se dice que es *empírico*.

Cuando se está estudiando un fenómeno novedoso a veces es posible encontrar un modelo que permita *interpretar* lo observado. Otras veces, las observaciones sirven para *poner a prueba* un modelo. En otros casos, debido a lo novedoso del fenómeno o a la complejidad del mismo, no se cuenta con un modelo convincente. Aquí sólo nos contentamos con analizar el comportamiento de la variables, para quizá sugerir relaciones cualitativas entre las mismas o, a lo sumo, plantear un modelo empírico para el fenómeno.

Es importante señalar que luego de obtener el conjunto de observaciones, se pasa a un proceso de *comparación* entre los datos y el/los modelos existentes. De este proceso de comparación suele surgir que el modelo utilizado explica lo observado con cierto grado de aproximación, el cual puede resultar o no satisfactorio. En el último caso puede dar lugar al desarrollo de un nuevo modelo o a un perfeccionamiento del modelo inicial.

Es necesario destacar que a todo modelo (teórico o empírico) está ligado un conjunto de hipótesis o suposiciones iniciales que determinan un *rango de validez* del mismo. Por este motivo, suele ocurrir que para interpretar el mismo fenómeno de manera satisfactoria a distintas escalas es necesario recurrir a modelos que implican marcos teóricos muy distintos.

De manera general, se espera que un modelo permita *predecir* el comportamiento de las variables que caracterizan un fenómeno, dentro un rango de validez.

6.2 El experimento

Antes de comenzar con las observaciones, es necesario prestar atención a los siguientes pasos:

a) Identificar el sistema bajo estudio y las variables relevantes.

b) Recopilar información acerca de experiencias previas, como así también todo conocimiento adicional que pueda ser útil tanto durante la preparación, realización y análisis del experimento.

c) De ser posible, postular un modelo para el fenómeno bajo estudio.

d) Determinar los rangos de interés para las distintas variables y la precisión de cada una.

e) Definir un programa de medición que contemple el protocolo de medición a seguir, el papel de los participantes, la manera en que se registrarán los resultados, etc.

Cuando es posible, resulta útil realizar algunas observaciones preliminares que permiten anticipar de manera grosera el desarrollo del experimento. Durante el experimento es necesario, dentro de lo posible, no modificar las condiciones del mismo. También, es imprescindible llevar anotaciones rigurosas de hasta el más mínimo detalle, tanto con vistas al análisis de los resultados como así también a la repetición de las observaciones en iguales condiciones.

Luego de finalizadas las observaciones, es necesario realizar un análisis de los resultados. En este proceso tendrá un papel importante el modelo supuesto. A veces sólo es necesario comparar los resultados con el modelo. Otras veces, el modelo involucra parámetros que pueden variarse hasta obtener el mejor ajuste (*fitting*) entre los valores observados y los predichos por el modelo. En todos los casos, el uso de gráficas para representar los resultados es de gran utilidad.

Como paso final, es necesario analizar las observaciones, determinando cuán satisfactorio es el modelo elegido, las causas de los posibles apartamientos del modelo con respecto a las observaciones, el rol jugado por distintos aspectos del experimento en dichas desviaciones (instrumentos, método de medición, desviaciones sistemáticas, etc.), rangos de validez del modelo. Finalmente, suele ser útil evaluar todo el conjunto para determinar aquellos aspectos en los que el trabajo realizado ha sido satisfactorio y aquellos en los que no, con vistas a futuras investigaciones.

6.3 Gráficos

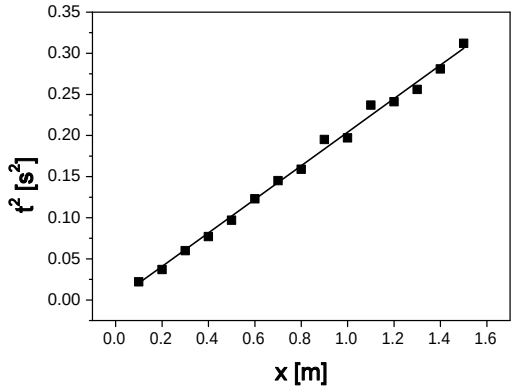
Es muy común recurrir al gráfico como la manera más directa para mostrar los resultados de un conjunto de observaciones. Cuando estas se contrastan contra un modelo resulta de ayuda modificar las variables graficadas de modo que la expresión correspondiente al modelo tome una forma lineal. Veamos un ejemplo. Supongamos que se mide el tiempo t de caída de un proyectil (una bolita de plomo) desde distintas alturas (x). Supongamos que se obtienen los siguientes resultados:

x_i [m]	t_i [s]	x_i [m]	t_i [s]
0.100	0.147	0.900	0.441
0.200	0.191	1.000	0.444
0.300	0.244	1.100	0.486
0.400	0.277	1.200	0.491
0.500	0.311	1.300	0.506
0.600	0.351	1.400	0.530
0.700	0.381	1.500	0.559
0.800	0.399		

El modelo más simple para este experimento es el de caída libre en el vacío de un proyectil, acelerado por $g = 9.8$ ms^{-2}, en cuyo caso esperamos que:

$$t(x) = \sqrt{\frac{2}{g}x}$$

Si bien resulta inmediato comparar los pares (x_i, t_i) contra $t(x_i)$, resulta más provechoso linearizar la ecuación anterior, y comparar los pares (t_i^2, x_i) contra la recta $t^2(x_i) = (2/g)x_i$, como puede verse en la figura siguiente.

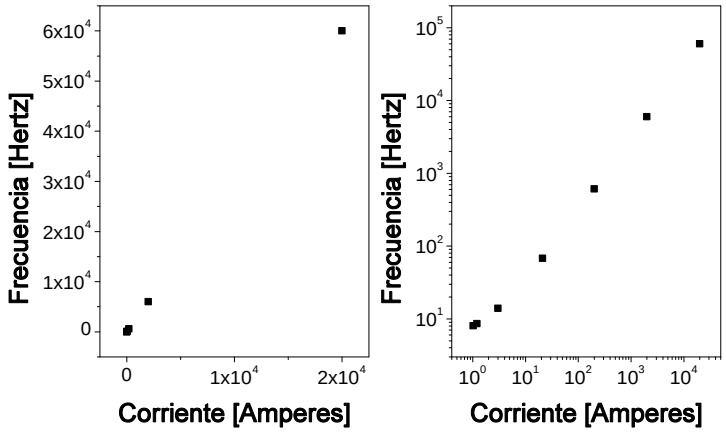


En general, mediante la linearización de la expresión correpondiente al modelo, es posible realizar una mejor comparación visual entre este último y las observaciones.
Ejercicio: Analice la manera de linearizar las siguientes expresiones (es decir, qué hay que graficar en función de qué, para que la gráfica sea una recta):

a) $y(x) = ax^b$

b) $y(x) = a \exp(bx)$

Cuando alguna de las variables graficadas toma valores que se extienden por varios órdenes de magnitud, conviene graficarla en un eje *logarítmico*. De no proceder de esa manera, muchos los datos de menor valor quedarán concentrados en una región del gráfico. A veces sólo uno de los ejes es logarítmico (gráfico *semilog*) y a veces ambos (gráfico *log-log*). A modo de ejemplo vea la siguiente figura, en la que en el gráfico de la izquierda se grafican con ambos ejes en escala lineal siete puntos experimentales, mientras que a la derecha se hace lo mismo mediante un gráfico log-log.



6.4 Análisis de resultados

Toda experimento se realiza con ciertos objetivos motivadores. Las observaciones y los resultados obtenidos a partir de ellas deben analizarse a la luz de estos objetivos, intentando dar respuesta a las preguntas planteadas al comienzo. Luego de haber respondido total o parcialmente dichas preguntas, es necesario reflexionar sobre la validez de las respuestas. En este punto suele ser de interés ahondar en las hipótesis asumidas por el modelo considerado como así también en la calidad de las observaciones. También puede ser necesario, si existen discrepancias entre el modelo y las observaciones, discutir el posible origen de las mismas. Finalmente, suele ser útil proponer mejoras deseables en futuras experiencias.

6.5 Problemas

1. En todos los casos que siguen, enuncie las variables o combinaciones de variables que deben medirse y graficarse, y diga cómo puede encontrarse la incógnita (pendiente, ordenada al origen, etc.):

   (a) La frecuencia fundamental de vibración de una cuerda está dada por:

   $$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

   donde n, l y T son las variables medidas. Determine m.

   (b) La velocidad de flujo de salida de un fluido ideal por un orificio en el lado de un tanque está dada por:

   $$v = \sqrt{\frac{2P}{\rho}}$$

   donde v y P son las variables medidas. Determine ρ.

   (c) La descarga de un capacitor está descrita por:

   $$Q = Q_0 \exp\left(-t/RC\right)$$

   donde q y t son variables medidas, y R es fija y conocida. Determine C.

   (d) Las longitudes de onda de las líneas en las serie de Balmer del espectro del hidrógeno están dadas por:

   $$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)$$

   donde λ y n son variables medidas ($n = 1, 2, \ldots$). Determine R (constante de Rydberg).

2. Las siguientes mediciones se efectuaron durante una investigación de fenómenos para los cuales no hay modelos disponibles. En cada caso identifique una función adecuada y evalúe sus constantes.

v	i
0.1	0.61
0.2	0.75
0.3	0.91
0.4	1.11
0.5	1.36
0.6	1.66
0.7	2.03
0.8	2.48
0.9	3.03

T	f
100	0.161
150	0.546
200	0.995
250	1.438
300	1.829
350	2.191
400	2.500
450	2.755
500	2.981

7 Presentación de resultados científicos

Existen tres maneras generales de presentar resultados científicos particulares, sean estos investigaciones originales, experiencias de laboratorio, etc.[1]:

a) artículo o informe científico

b) presentación oral

c) poster

Daremos a continuación una descripción de cada tipo de presentación, haciendo hincapié en la primera. Esta descripción no debe tomarse como una regla rígida para la confección de cada tipo de presentación. En la medida de lo posible los autores deberán pensar en un estilo personal, claro, atractivo y convincente.

7.1 El artículo o informe

En este caso el destinatario de la información no tendrá contacto con el/los autor/es. Por tal motivo, debe hacerse especial énfasis en que la presentación sea clara y autocontenida. Más allá de el amplio rango de estilos posibles para la escritura del informe, la calidad de la edición es de la *mayor importancia*.

El objetivo del informe es reportar resultados novedosos acerca de un problema particular y su solución total o parcial. En el mismo debe estar claramente identificado el problema, sus antecedentes, el procedimiento utilizado para su solución, los resultados obtenidos y, a partir del análisis de los mismos, las conclusiones finales. Debe figurar la información suficiente para que cualquier persona en cualquier lugar del mundo pueda reproducirlo, si cuenta con los medios adecuados.

Es habitual utilizar la voz pasiva para la redacción de reportes científicos. Sin embargo, es cada vez más común el empleo de la primera persona, lo cual brinda un lenguaje más cercano sin pérdida de rigurosidad. Por ejemplo: "... en este trabajo *empleamos* un modelo lineal para la interpretación de los resultados", en lugar de "*se empleó* un modelo..." [1].

Es común que los profesores ofrezcan *guías de trabajo* para la realización de las prácticas de laboratorio, las cuales incluyen datos tales como el nombre de la experiencia, sus objetivos, los materiales necesarios para realizarlas, una breve base teórica, un procedimiento secuencial para su realización y otros detalles de importancia. Si bien la información contenida en la guía es de importancia en la confección del informe, éste

[1] Excluimos de la lista las tesis, libros y otros tipos de reportes de gran extensión.

no tiene porqué tener la misma estructura ni ser una réplica un poco más extensa de la misma. De hecho, el informe debe ahondar en los aspectos de cada experiencia particular, de los resultados y problemas surgidos durante su realización.

El informe científico posee una estructura característica, la cual debe permitirle al lector (habitualmente apurado) profundizar de manera *secuencial* en el grado de detalle de la información brindada en el artículo. Este objetivo debe tenerse continuamente en mente durante la redacción del informe.

Podemos identificar las siguientes partes en un informe modelo:

a) **Título:** El título del informe debe ser claro, atractivo y tan corto como sea posible. Debe situar rápidamente al lector en el tema del artículo. Debe evitarse que el título comience con un artículo ("*El...*" o "*La...*").

b) **Autores:** Debe escribirse el nombre de los autores y su filiación, es decir, a qué institución pertenecen (instituto, departamento, facultad, universidad, etc.). En el caso de informes de laboratorio, suele ser conveniente anotar simplemente los nombres de los autores y las direcciones de email de uno o todos ellos.

c) **Resumen:** Si el informe es extenso se suele incluir un resumen del mismo (no más de 200 palabras) el cual debe servirle al lector para discriminar rápidamente si el informe científico es o no de su interés. El resumen debe responder de manera *muy resumida* a la preguntas: *¿qué hicimos? ¿qué se obtuvo?* En principio, si en el resumen no se incluye la respuesta (resumida) a la última pregunta, el lector debería encontrarla en las Conclusiones.

d) **Palabras clave:** A veces suele incluirse una lista de tres a cinco palabras clave que tienen que ver con el problema. Es habitual que los interesados realicen búsquedas por palabra clave de artículos científicos.

e) **Introducción:** En esta sección se incluye la clara identificación del problema y todos los datos necesarios para comprenderlo. Debe figurar aquí la introducción teórica (dejando claras sus aproximaciones y limitaciones) y los antecedentes (otros estudios que abordaron el mismo problema, si los hay).

   En su parte final, la Introducción debe contener un párrafo con una explicación resumida de cómo se abordó en este caso el problema (un resumen del procedimiento), resaltando los aspectos originales del mismo, y en qué se diferencia de lo hecho hasta el momento por otros investigadores. En definitiva, los objetivos del trabajo son incluidos en este punto.

   La Introducción debería responder a todas o algunas de las siguientes preguntas: *¿cuál es el problema?, ¿cuál es su importancia?, ¿qué se ha hecho hasta ahora para resolverlo?, ¿qué aspectos quedan por resolver?, ¿qué preguntas se intentan responder en este trabajo y cómo?*

   Leyendo la Introducción, el lector debería ser capaz de pasar directamente a las Conclusiones para ver cuáles fueron los resultados del estudio.

f) **Procedimiento/Detalles experimentales:** Si el lector está leyendo esta parte del informe es porque tiene posiblemente mucho interés en conocer *detalles*. Por tal motivo, debemos describir rigurosamente

cómo se hicieron las mediciones, con qué aparatos (incluyendo su precisión, modelo, marca de fabricante, etc.), cómo se dispuso el arreglo experimental (*setup*), cómo se prepararon las muestras, etc. Recordemos que se deben incluir todos los datos necesarios para que el experimento pueda ser reproducido con facilidad.

Si una magnitud del experimento se midió empleando alguna técnica muy conocida o desarrollada por otro/s, se puede llamar por su nombre o haciendo referencia a la fuente bibliográfica donde se puede consultar. Por ejemplo: "Las resistencias se midieron usando un puente de Wheatstone con una exactitud de 0.01". Deben evitarse detalles circunstanciales que no son de utilidad práctica, del tipo: "... conectamos el terminal B, encendimos la fuente C, leímos el voltímetro D, ...", etc. Este tipo de información debe brindarse mediante esquemas, siempre que sea posible.

g) **Resultados:** En general, se estudiará la variación de alguna magnitud respecto a otra. Los resultados sin duda podrán apreciarse mejor en una tabla (siempre que sea de poca extensión) o gráfico. No resulta aconsejable incluir en esta sección tablas conteniendo el resultado individual de un gran número de mediciones. Estas tablas conviene colocarlas en un Apéndice para no entorpecer la lectura.

Cada vez que en un gráfico o tabla se indique una magnitud, debe utilizarse la misma nomenclatura que en el texto y aclarando las unidades empleadas. Suele ser común incorporar, junto a cada entrada numérica de una magnitud, su incertidumbre respectiva. Se debe especificar claramente la clase de incertidumbres que estamos considerando. Es muy probable que se trate de límites extremos estimados o de parámetros estadísticos tales como la desviación estándar. En el caso de parámetros estadísticos no debemos dejar de señalar la cantidad de observaciones en la muestra de la que se obtuvieron los resultados. El análisis de incertidumbres (propagación de errores) debe hacerse por separado (en un Apéndice) y en la tabla sólo se coloca el resultado numérico o un bastón de error en los gráficos.

Si nuestro experimento ha sido bien diseñado, debemos haber obtenido nuestro resultado final casi seguramente mediante algún procedimiento gráfico. Llegamos a expresiones como estas: "el valor medido de la resistencia eléctrica se obtuvo de la pendiente de la gráfica V vs I (que se ilustra en la Fig. 5)".

Los gráficos deben estar libres de información superflua o en *código* que dificulte su interpretación. Los ejes deben estar bien identificados. En el epígrafe de cada gráfica debe estar la información mínima para entenderla. Si dicha explicación es muy extensa, deber remitirse al texto.

Esta sección del informe debe responder detalladamente a la pregunta: *¿qué obtuvimos*? (cuando seguimos los procedimientos descritos en la sección anterior).

h) **Análisis:** El análisis es una parte integral del informe, y no una reflexión posterior [1]. Aquí debemos desligarnos de nuestras esperanzas y aspiraciones sobre el experimento y aceptar objetivamente el resultado final. En esta etapa del informe debemos hacer una afirmación franca y desprejuiciada del resultado. Lo deseable es un enunciado simple y directo de la situación real; por ejemplo: "El comportamiento del modelo lo representa la ecuación (1), en la cual la variación del flujo Q con la presión P es una línea recta que pasa por el origen. En nuestro experimento, los resultados sí mostraron una variación lineal sobre parte del rango, pero en vez de pasar por el origen, la línea que mejor se ajusta a las observaciones tiene

una ordenada al origen no nula. Además de esto, en la parte superior de la escala P, las observaciones muestran una desviación sistemática de la linealidad en una cantidad que evidentemente excede la incertidumbre de la medición". Luego debemos analizar qué consecuencias tienen estas discrepancias respecto al modelo.

Mucha de la habilidad en la experimentación consiste en la preservación de nuestros resultados finales de esas fuentes de error. De todas formas finalicemos insistiendo en que estas pautas no se deben tomar como lineamientos rígidos, y que lo importante del asunto es hacer una presentación que le interese al lector al cual deseamos llegar.

A veces, es posible señalar qué aspectos del experimento podrían mejorarse, qué nuevos experimentos podrían diseñarse para abordar mejor el mismo problema, o qué aspectos del problema quedan aún sin resolver.

i) **Conclusiones:** Aquí se incluirán los aportes esenciales obtenidos como resultado del trabajo. De alguna manera, el Resumen, la parte final de la Introducción y las Conclusiones deberían formar una unidad cerrada.

j) **Bibliografía o Referencias:** Cada vez que en el informe se incluye información (fórmulas, resultados previos, etc.) que no es parte *original* del trabajo, debe a continuación figurar una cita bibliográfica del tipo "[1]". Al final del informe, en la sección Bibliografía (o Referencias), la cita se explicita *en detalle* de manera que el lector pueda identificarla y eventualmente conseguirla sin dificultad:

[1] M. Alonso, E. J. Finn, Física Vol. I: Mecánica, Fondo Educativo Interamericano, México, 1986, pág. 77-86 (o Cap. 3).

Las referencias bibliográficas al final del informe en general se ordenan de acuerdo al orden de aparición en el texto, o bien alfabéticamente según el primer autor. Las referencias a sitios Web (URLs) deben incluir la fecha.

Las secciones anteriores pueden contener subsecciones si la extensión o complejidad del informe las hace indispensables para la comprensión del tema.

A veces, los Resultados por sí mismos son suficientemente claros como para no hacer necesario un Análisis. Otras veces, el análisis de los resultados y las conclusiones conviene incluirlos en una única sección. Esto queda a criterio del autor.

El discurso debe tener continuidad. Si nos parece que tenemos que incluir alguna descripción particular larga, extensa y detallada que pudiese romper la libre continuidad de la argumentación principal conviene anexarla como Apéndice al final del informe.

Las fórmulas matemáticas suelen incluirse centradas y en renglón aparte, numerándose de manera creciente entre paréntesis a la derecha. Este número se utilizará para hacer referencia a la expresión a lo largo del texto. En las expresiones matemáticas, en el texto y en las figuras, las variables matemáticas y parámetros se notan generalmente en itálica, mientras que los números, paréntesis, corchetes y llaves, como

así también las funciones predefinidas (seno, coseno, logaritmo natural, etc.) se notan en una fuente recta, de la siguiente manera:

$$h(t) = h_0 + v_0 t + \left[\frac{1}{2} g t^2 + \cos(\omega t)\right] \tag{32}$$

Es importante conservar la notación utilizada para nombrar las variables en la Introducción a lo largo del resto del informe. Cada símbolo utilizado en el informe debe definirse claramente cuando se utiliza por primera vez.

Las figuras deben aparecer en la página donde se las cita por primera vez, o en las siguientes. En general conviene que estén numeradas, aunque también puede escribirse "en la figura siguiente...", evitando numerar la figura. Sin embargo, esto trae problemas a la hora de hacer referencia a la misma.

Los diversos procesadores de texto disponibles permiten automatizar ciertos aspectos durante la edición de los informes, tales como el formateo automático del texto (título, resumen, títulos de secciones, etc.), las referencias cruzadas, las citas bibliográficas, la numeración automática de ecuaciones, el posicionamiento de figuras, etc. Entre ellos podemos nombrar: Word (Microsoft), OpenOffice (libre), Lyx (libre), LaTeX (libre), etc.

7.2 Presentación oral. Poster

La presentación oral y el poster poseen en común que el expositor está cara a cara con el público. Esto permite obviar en el reporte ciertas piezas de información, dado que las mismas pueden ser obtenidas por los interados de manera personal. Esto mismo obliga a la vez a sintetizar muy hábilmente la información ofrecida, para que el contenido de la misma llegue de manera clara y entretenida.

La presentación oral es la exposición de resultados científicos mediante diapositivas frente a un auditorio. En general, las diapositivas se proyectan sobre una pantalla. Las diapositivas se suelen editar mediante algún software apropiado, tal como Powerpoint de Microsoft Office, o su similar del OpenOffice. También es común editar las diapositivas mediante cualquier procesador de texto para luego crear un documento PDF, el cual es finalmente proyectado en pantalla completa. En general, no es aconsejable proyectar más 20 a 25 diapositivas, con el fin de no aburrir al auditorio. Es importante cuidar que el tamaño de las fuentes no sea muy pequeño y que las diapositivas no estén atestadas. Los textos incluidos en cada diapositiva deben servir de referencia para el expositor y el auditorio, casi a modo de *ayuda-memorias*. Las piezas de texto extensas sólo distraen o cansan a la audiencia. Si se considera que cierta información importante puede llegar a ser necesaria para aclarar algunos puntos, pueden incluirse en diapositivas que no son expuestas en el cuerpo de la charla, pero que están disponibles en caso de que se produzcan preguntas relacionadas. El fondo oscuro suele ser más atractivo para el auditorio que un fondo de diapositiva muy luminoso. Conviene indicar en cada diapositiva el número de diapositiva sobre el número total de las mismas.

La presentación debe comenzar con el título y el nombre del expositor. Luego se pasa al cuerpo de la exposición. En una diapositiva se ofrece una vista previa de los puntos a ser tocados durante la charla

(*outline*). Se suele volver a esta diapositiva cada vez que se completa una parte de la charla, para que el auditorio guarde referencia acerca del desarrollo de la misma. En lo demás, la estructura es muy similar a la del informe escrito, sin embargo conviene que cada parte de la exposición sea cerrada sobre sí misma, evitando que el auditorio deba guardar muchos datos en su memoria para comprender los contenidos. Al final suele hacerse hincapié en los trabajos futuros (*outlook*). Debe recurrirse, siempre que sea posible, al uso de gráficos. También es posible incluir otros medios audiovisuales, tales como videos, animaciones, etc. Suele ser común dedicar unas palabras finales al grupo de investigación involucrado en el trabajo, explicitando claramente una manera eficaz de ponerse en contacto con el mismo (email, URL, etc.). Conviene que algunos datos de la exposición (título, autores, etc.) estén presentes en cada diapositiva a modo de marco inferior o superior y también al final, para que los asistentes que llegan tarde a la charla puedan saber rápidamente de qué charla se trata.

En el caso del poster, la información relevante (título, autores, filiación, contactos, resumen, procedimiento, resultados, conclusiones, referencias, etc.) se ordena en un afiche, junto al cual el expositor aguarda las consultas de los interesados. Suele ser común ofrecer versiones reducidas (tamaño A4) del poster, las cuales están disponibles junto al poster para que los apurados puedan llevarse y releer más tarde. Es común encontrar en los congresos desde pósters que no son otra cosa que un conjunto de hojas A4 agrupadas, hasta otros finamente diseñados e impresos en papel plastificado. En cualquier caso, es importante tener en cuenta que el objetivo del poster es transmitir cierta información de manera clara, y que los recursos de diseño deben ayudar y no entorpecer a este fin.

8 Propuestas de experiencias: medición de g

8.1 Caída libre

Un cuerpo de masa m cae desde una altura h y se mide el tiempo t de caída hasta que toca el piso. Si se hacen las siguientes hipótesis:

a) Se desprecia el rozamiento del aire

b) No se considera la rotación de la tierra (efecto Coriolis)

c) Se considera al cuerpo como una masa puntual

se tiene que:

$$h(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

donde h se mide desde el punto superior de la trayectoria. Si el cuerpo cae una cierta distancia h_0 antes de caer la altura h, tenemos que:

$$h(t) = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$$

Como $v_0^2 = 2gh_0$:

$$h(t) = \sqrt{2gh_0}t + \frac{1}{2}gt^2$$

8.2 Péndulo simple

Una masa m pendula con amplitud θ_0 de una cuerda de largo l. Si se hacen las siguientes hipótesis:

a) Se desprecia el rozamiento del aire

b) No se considera la rotación de la tierra (efecto Coriolis)

c) Se considera al cuerpo como una masa puntual

d) θ_0 es pequeño

se tiene que el período de oscilación es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

con lo cual:

$$g = (2\pi)^2 \frac{l}{T^2}$$

8.3 Péndulo físico

Un cuerpo plano de masa m y momento de inercia $I = mr^2$ con respecto a su centro de masa pendula de un punto situado a una distancia h del centro de masa. El cuerpo pendula con amplitud θ_0. Si se hacen las siguientes hipótesis:

a) Se desprecia el rozamiento del aire

b) No se considera la rotación de la tierra (efecto Coriolis)

c) θ_0 es pequeño

se tiene que es:

$$\frac{dL}{dt} = hmg\text{sen}\theta \tag{33}$$

donde L es el momento de inercia, con lo cual:

$$\frac{d}{dt}\left[\omega m(r^2 + h^2)\right] = hmg\text{sen}\theta \tag{34}$$

$$\left(\frac{r^2 + h^2}{hg}\right)\frac{d^2\theta}{dt^2} \simeq \theta \tag{35}$$

Es decir, el péndulo oscilara con período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^2 + h^2}{hg}} \tag{36}$$

8.4 Masa unida a un resorte

Un cuerpo de masa m cuelga en reposo de un resorte de constante k. La elongación x del resorte con respecto a su posición de equilibrio x_0 está relacionada con el peso del cuerpo a través de :

$$mg = k(x - x_0) \tag{37}$$

9 Apéndice A: Probabilidades

9.1 Introducción

Hemos visto en Física I cómo las Leyes de Newton permiten predecir la trayectoria de una partícula si se conocen las fuerzas que actúan sobre ella, y las condiciones iniciales del movimiento. De igual manera, la Ley de Ohm permite predecir el valor de la corriente que circulará por un resistor si se conoce la diferencia de potencial a la que está sometido. En todos los casos, conociendo las condiciones en las que se realiza el experimento se puede anticipar su resultado. Este tipo de fenómenos se denominan *determinísticos*. Sin embargo, es posible encontrar situaciones o experimentos en los cuales el desenlace final de los mismos no se puede determinar con total exactitud *antes* de que la misma se concrete: el resultado de tirar una moneda, el número en una tirada de dados, etc. En estos experimentos el azar determina el resultado y se denominan *aleatorios, no-determinísticos* o *estocásticos*. En este tipo de experimentos toma relevancia el concepto de probabilidad. Dado que las mediciones experimentales se ven afectadas por variaciones al azar aún en situaciones determinísticas como las dos nombradas al principio, resulta importante conocer algunos aspectos relacionados con el tema.

9.2 Definiciones

Se denomina *experimento aleatorio* a un experimento que reúne las siguientes características:

a) se puede repetir indefinidamente sin cambiar las condiciones.

b) si bien no se puede predecir cuál será el resultado particular de cada experimento, sí se conoce el conjunto de todos los resultados posibles. Este conjunto se suele llamar *espacio muestral*.

Aunque los resultados son caprichosos al principio, luego de realizar el experimento un gran número de veces es posible observar cierto comportamiento característico o regularidad. Es este comportamiento el que resulta interesante y a veces permite confeccionar un modelo matemático para describir el experimento observado.

Denominaremos *suceso* o *evento* a todo subconjunto del espacio muestral. Diremos que:

a) Si A y B son sucesos, entonces $A \cup B$ es el suceso que ocurre si ocurre A o B o ambos.

b) Si A y B son sucesos, entonces $A \cap B$ es el suceso que ocurre si ocurren A y B.

Se dice que dos sucesos son *mutuamente excluyentes* si, cuando ocurre uno, el otro no puede ocurrir ($A \cap B = \emptyset$).

Supongamos ahora que relizamos n repeticiones de un experimento aleatorio. Llamaremos *frecuencia relativa* f_A al cociente n_A/n, donde n_A es el número de veces que ocurrió el evento A. Nuestra experiencia marca que a medida que n crece, f_A converge a un valor definido: la *probabilidad* $P(A)$ de que ocurra el evento A. Es decir:

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} f_A$$

Es posible definir las condiciones para que $P(A)$ sea una función de probabilidad:

a) $0 \leq P(A) \leq 1$

b) Si S es el espacio muestral, entonces $P(S) = 1$

c) Si A y B son sucesos excluyentes, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

¿Es posible estimar $P(A)$ sin necesidad de realizar n experimentos aleatorios? En muchos casos la respuesta es afirmativa, si se cumplen ciertas condiciones. Cuando se sabe que los elementos del espacio muestral S son *equiprobables*, entonces la probabilidad de que ocurra cada evento elemental ϵ es igual a $1/M$, donde M es el número de elementos de S. De esta manera, si un suceso A es favorable cuando ocurren k eventos elementales, la probabilidad de que ocurra A será:

$$P(A) = \frac{k}{M} \tag{38}$$

o, escrito de otra manera:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{numero total de casos}}$$

9.3 Probabilidad condicional. Sucesos independientes

Es posible encontrar el caso en que queremos calcular la probabilidad de que ocurra el evento B si *ya sabemos que ocurrió el evento* A. Notaremos esta probabilidad como $P(B|A)$, que se dice: "probabilidad de B dado A". Como ejemplo, supongamos que se cuenta con un lote de 100 autos, algunos son nuevos (N) y otros usados (U), algunos son diesel (d) y otros nafteros (n), con la siguiente distribución:

	d	n	
N	40	30	70
U	20	10	30
	60	40	100

Se escoge un auto al azar y resulta que es nuevo, ¿cuál es la probabilidad de que también sea diesel? Lo que queremos calcular es $P(d|N)$. Teniendo en cuenta de que hay 70 autos nuevos, resulta que:

$$P(d|N) = \frac{40}{70} = \frac{40/100}{70/100} = \frac{P(d \cap N)}{P(N)}$$

De manera general podemos definir la probabilidad condicional $P(B|A)$ como:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{39}$$

Se dice que dos sucesos son *independientes* si $P(B|A) = P(B)$. Es decir, la probabilidad de ocurrencia de B no depende de si ocurrió o no A. De otra manera:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{40}$$

(*Ejercicio:* ¿son independientes los sucesos de la tabla anterior?).

9.4 La ley de los grandes números

Este teorema cuantifica de alguna manera lo que sabemos intuitivamente acerca de la relación entre el concepto de probabilidad y la frecuencia relativa de ocurrencia de un evento dado.

Supongamos un experimento aleatorio que se repite n veces y se toma nota del número n_A de veces que ocurre el evento A. Como antes, llamemos $f_A = n_A/n$ a la frecuencia relativa de ocurrencia del evento A. Supongamos que $p = P(A)$. Puede demostrarse que [4, p. 253]:

$$\text{Prob}\left[|f_A - p| \geq \epsilon\right] \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

o, lo que es lo mismo:

$$\text{Prob}\left[|f_A - p| < \epsilon\right] \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

donde ϵ es un número positivo cualquiera.

Por ejemplo, ¿cuántas repeticiones de un experimento aleatorio deben realizarse para tener una probabilidad mayor que 0.95 de que la frecuencia relativa difiera de $P(A)$ en menos de un 1%? En este caso debemos utilizar la segunda desigualdad con $\epsilon = 0.01$, de modo que:

$$0.95 = 1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

con lo cual n debe cumplir:

$$n \geq \frac{p(1-p)}{(0.05)(0.01)^2}$$

Si A es que obtengamos un 6 al tirar un dado, entonces $p = 1/6$, obteniendo:

$$n \geq \frac{\frac{1}{6}\frac{5}{6}}{(0.05)(0.01)^2} = 27778$$

Cuando p no se conoce, basta con suponer la cota mayor, que ocurre cuando el producto $p(1-p)$ es mayor, es decir, cuando $p = 1/2$.

9.5 Variables aleatorias

En muchos casos, el resultado de un experimento aleatorio es directamente un número (tirar un dado, medir el período de un péndulo, etc.) o bien el resultado puede expresarse como un número. Formalmente, estamos asignando a cada elemento ϵ del espacio muestral S un número mediante una función $X = X(\epsilon)$, el cual puede ser natural, entero, real, etc. Dicho número, por ser el resultado de un experimento aleatorio se denomina *variable aleatoria*. A veces, a partir de un único experimento aleatorio pueden definirse varias variables aleatorias. En todos los casos, todos los valores posibles x_i $(i = 1, 2, ..., N)$ que puede tomar X definen un nuevo espacio muestral de N elementos, al cual también se le suele llamar *recorrido* de X. Llamemos $P(X = x_i)$, o más directamente $P(x_i)$ o P_i, a la probabilidad de que la variable aleatoria X tome el valor particular x_i. Como estamos hablando de una probabilidad, se deben cumplir las siguientes condiciones:

a) $0 \leq P(x_i) \leq 1$

b) $\sum_{i=1}^{N} P(x_i) = 1$

En el caso anterior estamos hablando de una variable aleatoria cuyo recorrido es un conjunto *ordenable* de N de valores, por lo que se dice que es una variable aleatoria *discreta*. Puede darse el caso de variables aleatorias que pueden tomar cualquier valor sobre un intervalo real dado. Es el caso, por ejemplo, del experimento aleatorio en el que se mide el alcance de un proyectil. En este caso la variable aleatoria es *continua*, y hablamos de la probabilidad $P(x)dx$ de que, luego de realizar el experimento aleatorio, X tome algún valor entre x y $x + dx$. En este caso, a $P(x)$ se la denomina *función de densidad de probabilidad*. Las propiedades anteriores toman la siguiente forma para el caso de una variable aleatoria continua:

a) $P(x) \geq 0$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx = 1$

Además, la probabilidad de que X tome algún valor entre $x = a$ y $x = b$ se calcula mediante:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{b}^{a} P(x)dx$$

9.6 Funciones de variables aleatorias

A veces resulta de interés definir magnitudes que son funciones de una variable aleatoria, y hallar la probabilidad de ocurrencia de sus posible valores. Por ejemplo, si definimos $Y = f(X)$, Y es también una variable aleatoria. A partir de la forma explícita de la función $f(x)$ es posible definir el recorrido de Y, y luego, a partir de la distribución de probabilidades de X, se obtiene la de Y.

Supongamos que para la variable aleatoria X tenemos la siguiente distribución de probabilidades y que definimos la nueva variable aleatoria $Y = f(X)$ con $f(x) = x^2$:

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0.2	0.2	0.05	0.05	0.2	0.3
$y_i = (x_i)^2$	4	1	0	1	4	9

Vemos que el recorrido de Y está dado por $\{0, 1, 4, 9\}$. Si tenemos en cuenta las veces que se repite algún valor $f(x_i)$ y las probabilidades asociadas a cada uno de ellos, podemos construir la siguiente tabla para Y:

y_i	0	1	4	9
$P(Y = y_i)$	0.05	0.25	0.4	0.3

9.7 Variables aleatorias bidimensionales

Puede ocurrir que un mismo experimento aleatorio de lugar a dos variables aleatorias, por lo que puede ser útil definir una variable aleatoria *bidimensional*, es decir, un par (X, Y). En este caso $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$ será la distribución de probabilidades *conjunta*, donde cada variable tendrá su propio recorrido. En este caso deberá cumplirse que:

a) $0 \leq p_{ij} \leq 1$

b) $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$

Por ejemplo, supongamos que se analizan las fallas del sistema informático de una empresa por la mañana (3 horas) y por la tarde (3 horas). Podemos definir la variable X como la hora de la mañana a la que se produce una falla, y como Y la hora de la tarde a la que se produce una falla. Es posible construir la siguiente tabla, que detalla los valores de las distintas probabilidades:

$Y \backslash X$	1	2	3	Marginal de Y
1	0.05	0.05	0.15	0.25
2	0.15	0.1	0.1	0.35
3	0.05	0.1	0.25	0.4
Marginal de X	0.25	0.25	0.5	1

(*Ejercicio*: ¿La probabilidad de que ocurra qué evento está dada por $P(1,3)$?).

Se han incluido en la tabla anterior las *probabilidades marginales*, definidas como:

$$P(X = x_i, Y = \text{cualquiera}) = \sum_j p_{ij} \tag{41}$$

$$P(X = \text{cualquiera}, Y = y_j) = \sum_i p_{ij} \tag{42}$$

9.8 Variables aleatorias independientes

Así como hemos definido el concepto de sucesos independientes, también es posible definir la independencia entre variables aleatorias. Siguiendo con el razonamiento utilizado anteriormente, diremos que X e Y son *variables aleatorias independientes* si se cumple que:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

Es decir, $p_{i,j}$ es igual al producto de las probabilidades marginales correspondientes.

9.9 Esperanza de una variable aleatoria

Dada una variable X, a veces interesa saber cuál es el valor esperado de X o *esperanza*, que suele denotarse como $E(X)$ o, también, $\langle X \rangle$. Teniendo en cuenta la relación que existe entre $P(X = x_i)$ y la frecuencia relativa de ocurrencia del valor x_i después de un gran número de experimentos, parece natural definir $E(X)$ como:

$$E(X) = \langle X \rangle = \sum_i x_i p(x_i) \tag{43}$$

En el caso de una variable aleatoria continua, la expresión anterior toma la forma:

$$E(X) = \langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x)dx \tag{44}$$

La definición puede extenderse, por ejemplo:

$$E(X^2) = \left\langle X^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x)dx$$

y, en general, si consideramos la variable aleatoria $Y = h(X)$, entonces:

$$E(Y) = \langle Y \rangle = \begin{cases} \sum_i h(x_i)p(x_i) & X \text{ discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} h(x)P(x)dx & X \text{ continua} \end{cases}$$

De manera similar, si tenemos una variable aleatoria bidimensional (X, Y) y $Z = h(X, Y)$, entonces:

$$E(Z) = \begin{cases} \sum_{i,j} h(x_i, y_j) p(x_i, y_j) & X, Y \text{ discretas} \\ \iint_{-\infty}^{\infty} h(x, y) P(x, y) dx dy & X, Y \text{ continuas} \end{cases} \tag{45}$$

Como se ve, no es necesario conocer la distribución de probabilidades de $Y(X)$ o $Z(X, Y)$ para calcular la esperanza.

Algunas propiedades de $E(X)$:

1. $E(cX) = cE(X)$, donde c es una constante
2. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$, donde X e Y son dos variables aleatorias cualquiera
3. si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional y X e Y son independientes, entonces $E(XY) = E(X)E(Y)$

9.10 Varianza de una variable aleatoria

Se define la varianza $V(X) = \sigma_x^2$ de la variable aleatoria X como (σ_x es la *desviación estándar* de X):

$$V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = \left\langle (X - \langle X \rangle)^2 \right\rangle \tag{46}$$

Algunas propiedades de $V(X)$:

1. $V(cX) = c^2 V(X)$, donde c es una constante
2. $V(X + c) = V(X)$, donde c es una constante
3. si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional y X e Y son independientes, entonces $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Puede demostrarse que:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \left\langle X^2 \right\rangle - \langle X \rangle^2 \tag{47}$$

9.11 El coeficiente de correlación

El *coeficiente de correlación* ρ_{xy} mide el grado de asociación entre dos variables aleatorias X e Y. Se define como:

$$\rho_{xy} = \frac{E\left\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\right\}}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \tag{48}$$

Algunas observaciones:

a) Cuando no hay dudas sobre su significado, se escribe ρ en lugar de ρ_{xy}.

b) ρ es adimensional.

c) El numerador de la Ec. (48) se suele denotar como σ_{xy}, o *covarianza* de X e Y, con lo que dicha ecuación se puede escribir como:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Puede demostrarse que la Ec. (48) se puede escribir como:

$$\rho_{xy} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \tag{49}$$

Algunas propiedades de ρ:

a) Si X e Y son independientes se cumple que $\rho = 0$, pues $E(XY) = E(X)E(Y)$.

b) Si $\rho = \pm 1$, entonces $Y = aX + b$, es decir, existe una relación lineal entre ambas variables aleatorias.

9.12 La distribución binomial

Supongamos que de una línea de producción se obtienen artículos defectuosos (evento D) con una probabilidad $P(D) = p = 0.2$ y no defectuosos (evento N) con una probabilidad $P(N) = 1 - p = 0.8$. Supongamos que tomamos tres artículos al azar y contabilizamos el número X de artículos defectuosos. X es una variable aleatoria discreta que puede tomar los valores $\{0, 1, 2, 3\}$, con probabilidades de acuerdo a la siguiente tabla:

x_i	0	1	2	3
Casos	NNN	DNN, NDN, NND	DDN, DND, NDD	DDD
P_i	$(0.8)^3$	$3 \times (0.8)^2(0.2)$	$3 \times (0.8)(0.2)^2$	$(0.2)^3$

Puede comprobarse que la suma de las P_i es igual a la unidad.

De manera general, consideremos N repeticiones de un experimento en el que sólo dos resultados son posibles en cada repetición, A y $\bar{A}$, con probabilidades p y $1 - p$, respectivamente. Se toma como variable aleatoria el número k de veces que ocurrió A. Puede demostrarse que:

$$P_{N,p}(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{50}$$

donde:

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

9.13 La distribución normal o de Gauss

Esta distribución resulta de gran importancia dado que, entro otros motivos, suele servir como una excelente aproximación a un gran número de distribuciones. Supongamos la variable aleatoria continua X, que puede tomar cualquier valor en el intervalo $-\infty \leq x \leq \infty$. Se dice que X tiene una distribución *normal* o *gaussiana* si su función densidad de probabilidad está dada por:

$$P(x) = N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \tag{51}$$

donde μ y σ^2 son la esperanza y la varianza de la distribución (51), respectivamente, calculadas mediante:

$$\mu = E(X) = \int_{\infty}^{-\infty} xP(x)dx$$

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{\infty}^{-\infty} (x-\mu)^2 P(x)dx$$

La probabilidad de que X tome un valor entre $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$ es:

$$P(\mu - \sigma, \mu + \sigma) = P(\mu \pm \sigma) = \int_{\mu+\sigma}^{\mu-\sigma} P(x)dx = 0.68$$

Esto significa que el 68% de las veces X tomará un valor dentro de dicho intervalo. Por otro lado, $P(\bar{x} \pm 2\sigma) = 0.95$.

Muchos magnitudes físicas medidas experimentalmente presentan fluctuaciones estadísticas de acuerdo a la distribución normal. Ello ocurre cuando el valor medido es el resultado de un conjunto de apartamientos infinitesimales aleatorios en ambas direcciones a partir de un valor central (ver Ref. [1], pág. 164).

9.14 Problemas

1. Suponga los siguientes experimentos aleatorios:

   (a) se arroja un dado y se anota el número de la cara superior

   (b) se lanza una moneda cuatro veces y se anota el número total de caras obtenidas

   (c) se tiran dos dados a la vez y se anota el valor X de la suma

   (d) se toman lámparas de una línea de producción y se anota la duración de la misma

   (e) se arroja una pelota de goma desde cierta altura y se toma nota de la altura que alcanza después de robotar

   Determine los elementos del espacio muestral

2. En el experimento aleatorio correspondiente al Prob. 1c identifique los elementos que hacen que los siguientes eventos ocurran :

   (a) $A = \{X \text{ es un número par}\}$

   (b) $A = \{X < 5\}$

   (c) $A = \{X \text{ es un número primo}\}$

3. Suponga un experimento aleatorio en el que sólo son posibles tres resultados: a_1, a_2 y a_3. La ocurrencia de a_1 es dos veces más probable que la de a_2, la cual, a su vez, es dos veces más probable que la de a_3. Calcule $P(a_1)$, $P(a_2)$ y $P(a_3)$.

4. Calcule $P(A)$ en los tres casos del Problema 2.

5. Dos fichas rojas se mezclan con dos azules en una caja. Se extraen las fichas una a una, hasta encontrar las azules.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar la última ficha azul en la segunda extracción?

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar la última ficha azul en la tercera extracción?

   (c) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar la última ficha azul en la cuarta extracción?

   (d) Sume las probabilidades anteriores. Trate de explicar el resultado.

6. Suponga el caso de una caja con 5 bolillas rojas y 10 bolillas azules, de la cual sacamos dos bolillas consecutivas (sin reposición). Si llamamos evento R a sacar una bolilla roja y evento A a sacar una azul, ¿cuál es la probabilidad de sacar una bolilla roja si la primera fue azul, es decir, cuánto vale $P(R|A)$? Calcule la misma probabilidad pero suponiendo que el experimento es con reposición. ¿Son independientes en este caso los eventos A y R? Confeccione en ambos casos una tabla como la de la pág. 52.

7. Cinco fichas numeradas del 1 al 5 se encuentran en una caja. Se toman dos fichas, cuyos valores determinan el par (X, Y). Calcule $P(X + Y = 3)$. ¿Cambia el resultado si la extración se hace con y sin reposición?

8. Se arroja una moneda tres veces. Determine el espacio muestral. Suponga la variable aleatoria $X =$ número de caras. Determine el recorrido de X y la probabilidad de obtener cada uno de los posibles valores de X. Suponga primero que la probabilidad de obtener cara (C) es la misma que la de obtener seca (S), y luego que $P(C) = 2P(S)$. Dibuje un gráfico de $P(x_i)$ en ambos casos.

9. Se arroja un dado dos veces seguidas y se definen las siguientes variables aleatorias:

   (a) número total veces que salió el número uno

   (b) suma de las dos tiradas

   Determine el espacio muestral en cada caso y las probabilidades asociadas a cada elemento de los mismos.

10. Suponga que la variable aleatoria continua X, definida en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$, posee la siguiente densidad de probabilidad:

$$P(x) = Ax^2$$

   (a) Determine el valor que debe tener la constante de normalización A para que $P(x)$ esté correctamente definida (normalización).

   (b) Calcule $E(X)$ y $V(X) = \sigma^2$.

   (c) Calcule $P(X \pm \sigma)$, $P(X \pm 2\sigma)$ y $P(X \pm 3\sigma)$.

11. Dada la tabla de probabilidades de la pág. 55, suponga que $Y = (X - 1)^2$. Encuentre el espectro de Y y su distribución de probabilidades.

12. Teniendo en cuenta las Ecs. (45) y (47), exprese la varianza de la variable $Y = h(X)$ en función de la distribución de probabilidades de X.

13. Dada la tabla de probabilidades de la pág. 55, calcule la probabilidad condicional $P(X = 2|Y = 1)$. También determine si X e Y son independientes.

14. Determine $E(X)$ en los dos casos del Prob. 8.

10 Apéndice B: Tablas

10.1 Tabla 1: Distribución de Gauss normalizada

En la siguiente tabla, tomada de [5], se muestran los valores:

$$\Phi(z) = \int_0^z N_{1,0}(z')dz' = (2\pi)^{-1} \int_0^z \exp\left(-z'^2/2\right)dz'$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.0279	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.0438	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.1293	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.1591	0.16276	0.1664	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.2054	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.2224
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.2549
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.2673	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.2823	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.3665	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.379	0.381	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.4032	0.4049	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.4222	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.4452	0.4463	0.44738	0.44845	0.4495	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.4608	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.4732	0.47381	0.47441	0.475	0.47558	0.47615	0.4767
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.4803	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.483	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.485	0.48537	0.48574
2.2	0.4861	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.4884	0.4887	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.4901	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.4918	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.4943	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.4952
2.6	0.49534	0.49547	0.4956	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.4972	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.4976	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861

Los valores de $\Phi(z)$ para $z = 3.0 - 4.5$ son:

3.0	0.49865	3.4	0.49966	3.8	0.49993
3.1	0.49903	3.5	0.49977	3.9	0.49995
3.2	0.49931	3.6	0.49984	4.0	0.499968
3.3	0.49952	3.7	0.49989	4.5	0.499997

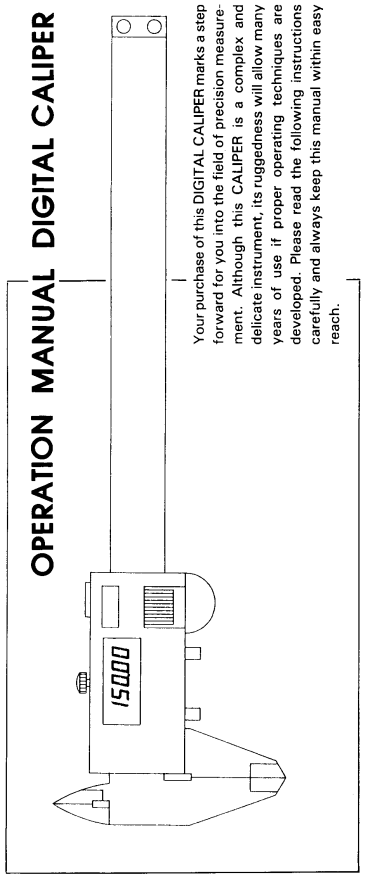
10.2 Tabla 2: Distribución de Student

TABLE A.2. Percentile points of Student's distribution.

Number of degrees of freedom ν	Significance level $q = (1 - \alpha) \times 100\,(\%)$		
	10	5	1
1	6.31	12.71	63.66
2	2.92	4.30	9.92
3	2.35	3.18	5.84
4	2.13	2.78	4.60
5	2.02	2.57	4.03
6	1.94	2.45	3.71
7	1.90	2.36	3.50
8	1.86	2.31	3.36
9	1.83	2.26	3.25
10	1.81	2.23	3.17
12	1.78	2.18	3.06
14	1.76	2.14	2.98
16	1.75	2.12	2.92
18	1.73	2.10	2.88
20	1.72	2.09	2.84
22	1.72	2.07	2.82
24	1.71	2.06	2.80
26	1.71	2.06	2.78
28	1.70	2.05	2.76
30	1.70	2.04	2.75
∞	1.64	1.96	2.58

11 Apéndice C: Datos de instrumentos

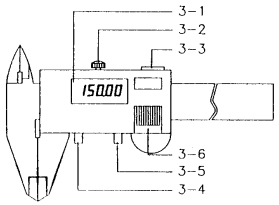
11.1 Calibre digital



1. GENERAL SPECIFICATIONS

Display	: 4.7mm (0.19'') LCD, 5 digits & another small digit ''5'', ''–'' for minus sign, ''mm'' for mm measuring unit, ''IN'' for inch measuring unit.
Measurement range	: 0 to 150mm (0 to 6 inch).
Resolution	: 0.01 mm/0.0005 inch.
Accuracy	: 0.03 mm/0.0015 inch.
Max. measuring speed	: 1.5 m/sec., 60 inch/sec.
Measuring unit	: Inch & mm, changed by pushing the button, true conversion.
Zero setting	: Zero setting at any position within the meauring range.
Polarity	: Automatic switching, '–' indicates negative polarity.
Power Off	: When the LCD displays ''0'', power will automatically switch off within 10 minutes.
Operating Temp.	: 0°C to 40°C (32°F to 104°F).
Storage Temp.	: –20°C to 70°C (–4°F to 194°F)
Operating Humidity	: Max. 80% RH.
Power Supply	: One battery, 1.5V, silver oxide.
Power Consumption	: Approx. DC 18 uA. Battery approx. 5000 hours for continuous use.
Data output	: Serial output for computer interface & printer.
Dimension	: Length 237 mm (9.4 inch).
Weight	: Approx. 145 g/0.32 lb.
Standard Accessories	: Instruction Manual .....1 pc. Carring case .....1 pc. Battery (1.5V, silver oxide) .....2 pcs.

2. FRONT PANEL DESCRIPTION



3-1 Display
3-2 Fix screw for slider assembly
3-3 Data output socket/cover
3-4 mm/inch button (true convertion)
3-5 Zero setting button (zero setting at any position within the meauring range)
3-6 Battery cover/compartment

3. MEASURING CONSIDERSATIONS

(1) When the LCD displays "0" (push the Zero setting button), the circuit will automatically switch off within 10 minutes.
Moving the slider will again switch on the display.
(2) Loose the "Fix screw" (3-2) during the measurement.
(3) Keep body face clean, prevent liquid material from getting into slider as this will damage the internal electronics.
(4) Face should be cleaned with pure alcohol and body lubricated with fine oil. Acetone or harsh clearanses should not be used.
(5) Don't remove the "Data output cover" (3-3) if the output interface is not connected, as metal dust such as iron filings making contact with this socket may damage the circuit.
(6) Other notes refer the conventional type caliper.

4. REPLACEMENT OF BATTERY

(1) When the LCD display flashes, it indicate a normal battery output of less than approx. 1.4 V. It is necessary to replace the battery.
(2) To replace the battery, remove the "Battery cover" (3-6) on the front panel.
(3) Take out the battery, install a new one, paying attention to the observed polarity positions and reinstate the battery cover again.

5. COMMON FAULT & REMEDIES

Fault	Cause	Remedy
Display flashes.	Battery voltage is below 1.4 V	Remove battery cover & replace battery.
Display not counting	Circuit latched	Remove battery for 30 sec to reset circuit.
Only digits or in/mm mode shown on Display	Function buttons and slider contacts shorted	Remove front cover & place function button spring into position
Function buttons not operating	Button springs not in position	As above.
Display measurement error over full length is >0.1mm	Dirt in sensor	Remove cover and slider assembly, clean sensor face with pure alchohol and use compressed air (<5kg/cm²) to dry surface
No Display	Battery contact poor or battery voltage under 1.1 V	Remove battery cover and clean contacts or if need be replace battery.

7,10	8,72	9,05	9,33	9,59	9,98	10,14	10,31	10,70	10,99
7,16	8,8	9,07	9,36	9,60	9,98	10,14	10,38	10,74	11,02
7,84	8,8	9,12	9,38	9,61	10,00	10,16	10,41	10,76	11,11
7,97	8,84	9,24	9,40	9,67	10,01	10,18	10,43	10,77	11,26
8,31	8,84	9,24	9,48	9,68	10,03	10,21	10,49	10,79	11,28
8,39	8,89	9,28	9,48	9,71	10,04	10,22	10,51	10,81	11,30
8,59	8,9	9,29	9,52	9,76	10,06	10,24	10,54	10,86	11,41
8,62	8,96	9,30	9,53	9,82	10,07	10,26	10,56	10,89	11,70
8,67	8,96	9,32	9,56	9,87	10,09	10,28	10,56	10,92	12,19
8,69	8,99	9,32	9,59	9,88	10,10	10,28	10,67	10,97	13,05

Tabla 1: Resultado de $n = 100$ mediciones de longitud, ordenadas de menor a mayor.