Medición de la aceleración de la gravedad

Experiencia de Laboratorio, Física Experimental I, 2008

Garcia, Daiana — dana_e17@hotmail.com
Larregain, Pedro — pedrolarregain@yahoo.com
Machado, Alejandro — machado.alejandro@yahoo.com

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas, UNICEN

Objetivos

El objetivo de este trabajo es determinar experimentalmente el valor de la aceleración de la gravedad en la Facultad de Ciencias Exactas. Para ello se utiliza el método del péndulo simple.

Introducción

La fuerza de gravedad, descrita formalmente por Isaac Newton durante la segunda mitad del siglo XVII, es un fenómeno por el cual todos los objetos con una masa determinada se atraen entre ellos. Esta atracción depende de las masas de los objetos en cuestión; mientras más masa, mayor será la fuerza de atracción.

Según resultados de experimentos de Galileo, todos los cuerpos sobre la superficie de la tierra caen con la misma aceleración independientemente de sus masas. Esto complementándolo con la segunda ley de Newton (la fuerza que atrae a los objetos es proporcional a sus masa), lleva a concluir que es la fuerza de gravedad la que actúa sobre los cuerpos en caída libre y la aceleración del movimiento es la aceleración de la gravedad [1].

El péndulo simple es un ente matemático sin representación física posible. No obstante, una aproximación aceptable consiste en una masa suspendida de un hilo inextensible y peso despreciable. Cuando la masa se deja en libertad desde cierto ángulo inicial respecto a la vertical, comienza a oscilar a un lado y otro periódicamente. Cuando el ángulo de desviación máximo respecto de la vertical es pequeño el péndulo oscila con movimiento armónico simple alrededor del punto de equilibrio. En esta situación el periodo resulta ser independiente del ángulo inicial, es decir, el ángulo donde se libera el péndulo, y depende únicamente de la longitud del péndulo y de la aceleración de la gravedad. Debido a la relación entre el periodo T y la aceleración de la gravedad g el péndulo simple es un dispositivo preciso y adecuado para medir la aceleración de la gravedad, puesto que la longitud y el período pueden medirse fácilmente [2].

Este modelo es válido bajo las siguientes consideraciones: se desprecia el rozamiento y el efecto de Coriolis, se supone que las oscilaciones son iguales, se considera al cuerpo una masa puntual y se asume que el centro de masa del sistema se encuentra en el centro de masa del cuerpo suspendido.

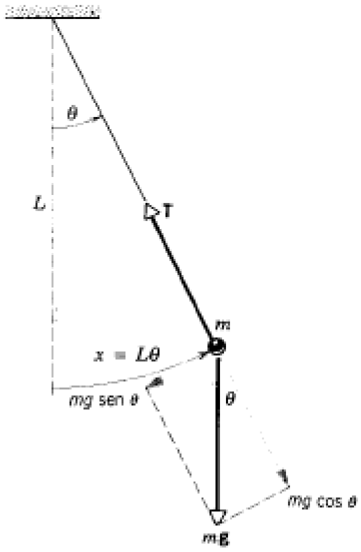

Fig. 1. Péndulo Simple

En la figura 1 se muestra un péndulo de longitud L y de masa m, desplazado de la posición de reposo formando un ángulo θ con la vertical. Las fuerzas que actúan sobre la masa son el peso $m\mathbf{g}$ y la tensión $\mathbf{T}$ en el cordón. El movimiento tendrá lugar a lo largo de un arco de círculo de radio L. El peso $m\mathbf{g}$ se descompone en una componente radial de magnitud $m\mathbf{g}\ cos\ \theta$ y una componente tangencial de magnitud $m\mathbf{g}\ sen\ \theta$. Las componentes radiales de las fuerzas suministran la aceleración centrípeta necesaria para mantener la partícula moviéndose en un arco circular. Esta última actúa sobre m tendiendo a regresarla a la posición de equilibrio. La fuerza centrípeta responde a la siguiente ecuación: [3]

$$F_T = -mg.sen\theta \tag{1}$$

Esta fuerza es opuesta a la dirección de θ creciente, por lo que su signo es negativo, y la misma no es proporcional al desplazamiento angular θ, sino a $sen\ \theta$. Por lo que el movimiento resultante no es armónico simple. Sin embargo, si el ángulo θ es pequeño, $sen\ \theta$ es aproximadamente igual a θ en radianes. En el Apéndice se encuentra la Tabla 1 que muestra la diferencia porcentual entre θ *y* $sen\theta$ para distintos ángulos.

La ecuación de movimiento tangencial es $F_T = ma_T$, donde a_T es la aceleración tangencial. Como la masa se mueve a lo largo de una circunferencia de radio L, tenemos que:

$$a_T = l\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{2}$$

Teniendo en cuenta lo anterior la ecuación para el movimiento tangencial es:

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg.sen\theta \tag{3}$$

o

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}sen\theta = 0 \tag{4}$$

Si la amplitud del ángulo inicial, θ_0 es pequeña, entonces será sen $\theta \simeq \theta$, así:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{5}$$

El ángulo θ puede expresarse de la siguiente forma:

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \alpha) \tag{6}$$

La frecuencia angular del movimiento será

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \tag{7}$$

Sabiendo que el período es $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, se lo puede expresar como:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{8}$$

En esta experiencia se utiliza la ecuación (8) para determinar g a partir de la medición del período de un péndulo de distintas longitudes.

Procedimiento

<u>Elementos utilizados:</u>

Esfera

Soporte

Tanza

Cable de cobre

Foto sensor (Pasco) Resolución $\pm$ 0.0001 seg.

Cinta métrica Resolución $\pm$ 0.001 m

Placa adquisidora y Software Pasco Scientific

Hilo

Encendedor

Gramil digital de precisión. Resolución 0.01 mm

Procedimiento experimental:

El péndulo se conformó por una tanza y una esfera metálica, de densidad alta, de 93.70 mm de diámetro unidos a un soporte anclado en el techo del laboratorio.

Basándose en pruebas previas, y considerando que el modelo elegido es válido para ángulos pequeños, se eligió el ángulo más pequeño posible y que mostrara tener menor dispersión (5°). Para marcar el ángulo inicial, se utilizaron 2 hilos que funcionaban como guía, los cuales estaban sujetos al soporte del péndulo en un extremo y al piso en el otro a ambos lados de la esfera con una distribución simétrica. Para determinar la distancia desde la vertical (posición en reposo del péndulo) al punto en el cual se debía fijar el hilo, utilizamos la siguiente relación trigonométrica tg *θ=cateto opuesto/cateto adyacente*.

Para medir el período se utilizó el sensor Pasco (que consiste en una orquilla que cuenta con una luz de diodo, conectado a una PC con el software Pasco Scientific a travez de una placa adquisidora), el cual se colocó bajo la vertical del péndulo. Por ser la esfera más grande que el arco del sensor, se le incorporó un tornillo en la parte inferior para que esta pudiera ser detectada por el sensor.

Se apartó la esfera desde su posición de reposo 5°, sosteniéndola con un hilo enganchado en una pequeña protuberancia de la misma. El mecanismo utilizado para librar la esfera consistió en quemar el hilo con un encendedor para evitar transmitirle perturbaciones.

Se utilizaron para la experiencia 5 longitudes distintas, las cuales se midieron utilizando un cable de cobre desde el soporte hasta la unión con la esfera y se midió con un gramil esta última para obtener la longitud hasta el centro de gravedad de la misma, el cual se supuso ubicado en su centro geométrico.

Las longitudes utilizadas fueron:

- 2,293 metros
- 2,094 metros
- 1,916 metros
- 1,728 metros
- 1,512 metros

Por cada longitud se dejó oscilar el péndulo 25 períodos. La Tabla de Resultados de las mediciones se encuentra en el Apéndice.

Fig. 2a y 2b. Péndulo experimental

Resultados

Para expresar los resultados y contrastarlos con el modelo, resultó conveniente linealizar la expresión

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Obteniendo

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}l \tag{9}$$

Graficando T^2 en función de l obtenemos lo siguiente.

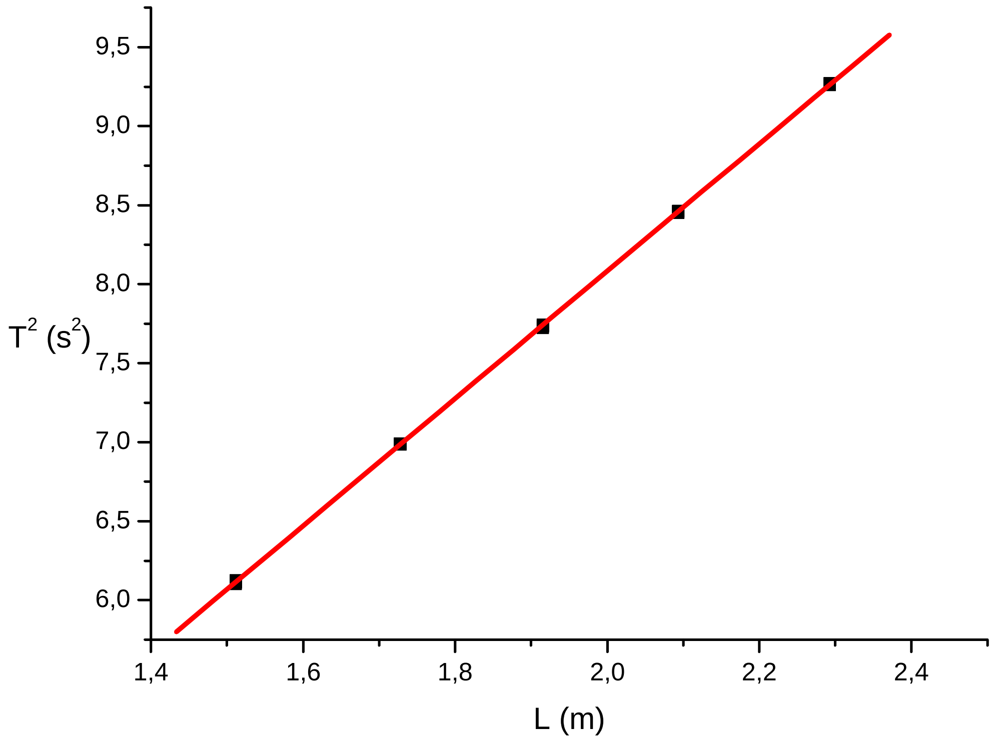

Gráfico 1. Regresión lineal, los bastones de error instrumental no se observan porque son demasiado pequeños para la escala utilizada.

De la regresión lineal se obtienen los siguientes resultados.

α (Pendiente) = 4,02996 σ_α (desvío de α) = 0,00152

β(ordenada al origen) = 0,02114 σ_β (desvío de β) = 0,00294

r (coeficiente de regresión lineal)= 0,99999

σ(desvío estándar) = 0,00465

Se calculó el valor de la gravedad utilizando la siguiente ecuación.

$$g = \frac{4\pi^2}{\alpha} \tag{10}$$

Considerando a σ_α como error absoluto de α, utilizamos la siguiente ecuación para obtener la incertidumbre de g.

$$\Delta g = \frac{\partial g}{\partial \alpha}\Delta \alpha = (-1)\frac{4\pi^2}{\alpha^2}\Delta \alpha \tag{11}$$

g = (9.796 $\pm$ 0.004) m/s^2

Análisis de resultados

El valor obtenido de la aceleración de la gravedad fue de 9.796 m/s^2 con una incertidumbre de 0.004 m/s^2 lo que resulta en un intervalo (9.792 – 9.800) m/s^2.

El valor de *g* obtenido con métodos más precisos es de 9.799165 m/s^2 [4], se encuentra dentro del intervalo obtenido experimentalmente, por lo que se puede decir que es muy preciso ya que dicho intervalo es pequeño (0.008 m/s^2).

A su vez, por ser su error porcentual 0.03 %, se puede decir que es bastante exacto.

Si se analiza el resultado de la regresión lineal, se observa que el valor de la ordenada al origen es no nulo (0,02114 s^2) y que su desviación (0,00294 s^2) no contiene al cero. Esto indica que posiblemente existe un error sistemático que no ha sido considerado. En este caso se puede deber a dos factores, que se haya medido la longitud del péndulo por defecto o que se haya determinado el período por exceso. Sin embargo, el valor de r (0.99999) indica que la relación entre T^2 y l es claramente lineal.

Conclusión

El resultado obtenido **g = (9.796 $\pm$ 0.004) m/s^2,** comparado con el valor obtenido mediante métodos mas precisos (9.799165 m/s^2), resulta ser satisfactorio. De todas maneras, tras haber efectuado una regresión lineal, se observa la presencia de errores sistemáticos que se los puede atribuir a que el cable no era perfectamente inextensible y que esto provocó que el péndulo tuviera una longitud mayor a la que fue medida. Otro factor influyente pudo haber sido la implementación de un tornillo en la esfera, y que el mismo no haya estado perfectamente alineado con el péndulo, lo que habría generado alteraciones en la medición del período.

Se puede decir que la cantidad de valores empleados en la regresión lineal (con 5 longitudes distintas), fue determinante para obtener un valor favorable. A su vez, se observó que el método de liberación de la esfera podría mejorarse para reducir perturbaciones en el recorrido del péndulo. También se ha notado que el "hilo" cumple un rol importante en la medición de *g*, por lo que se debería tratar de utilizar un elemento lo más inextensible posible.

Referencias

[1] Introducción a la física, Alberto P. Maiztegui, Jorge A. Sabato; Novena edición; Capítulo 10, "Caída de los cuerpos"

[2] Introducción a la física, Alberto P. Maiztegui, Jorge A. Sabato; Novena edición; Capítulo18, "Movimiento oscilatorio"

[3] Física, Volumen I: Mecánica, Alonso Marcelo, Finn Edward; Edición de 1967; Capítulo 12, "Movimiento oscilatorio"

[4] Medición obtenida por el Dr. Introcaso Antonio del Grupo de Geofísica - Instituto de Física Rosario

Apéndice

Tabla 1

θ_0 (rad)	θ (rad)	sen θ	$\left(\frac{\theta - \text{sen}\theta}{\theta}\right)\cdot 100$
0,1	0,00174533	0,00174533	5,077E-05
0,5	0,00872665	0,00872654	1,269E-03
1	0,01745329	0,01745241	5,077E-03
2	0,03490659	0,0348995	2,031E-02
5	0,08726646	0,08715574	0,1269
10	0,17453293	0,17364818	0,5069
15	0,26179939	0,25881905	1,138
20	0,34906585	0,34202014	2,018
30	0,52359878	0,50000000	4,507
45	0,78539816	0,70710678	9,968
60	1,04719755	0,8660254	17,30
70	1,22173048	0,93969262	23,08
75	1,30899694	0,96592583	26,21
80	1,3962634	0,98480775	29,47

Tabla de Resultados

L ± 0,001	T ± 0,0001	T^2 ± 0,0006
2,293	3,0432	9,2611
2,293	3,043	9,2599
2,293	3,0439	9,2653
2,293	3,0445	9,2690
2,293	3,0448	9,2708
2,293	3,0446	9,2696
2,293	3,0443	9,2678
2,293	3,0438	9,2647
2,293	3,0434	9,2623
2,293	3,0429	9,2592
2,293	3,043	9,2599
2,293	3,043	9,2599
2,293	3,0435	9,2629
2,293	3,0436	9,2635
2,293	3,0439	9,2653
2,293	3,0438	9,2647
2,293	3,0439	9,2653
2,293	3,0437	9,2641
2,293	3,044	9,2659
2,293	3,0442	9,2672
2,293	3,0444	9,2684
2,293	3,0442	9,2672
2,293	3,0443	9,2678
2,293	3,044	9,2659
2,293	3,0442	9,2672

L ± 0,001	T ± 0,0001	T^2 ± 0,0006
2,094	2,9072	8,4518
2,094	2,9085	8,4594
2,094	2,909	8,4623
2,094	2,9086	8,4600
2,094	2,9082	8,4576
2,094	2,9078	8,4553
2,094	2,9074	8,4530
2,094	2,9076	8,4541
2,094	2,908	8,4565
2,094	2,9084	8,4588
2,094	2,9086	8,4600
2,094	2,9088	8,4611
2,094	2,9087	8,4605
2,094	2,9087	8,4605
2,094	2,9084	8,4588
2,094	2,9082	8,4576
2,094	2,9082	8,4576
2,094	2,9084	8,4588
2,094	2,9084	8,4588
2,094	2,9086	8,4600
2,094	2,9084	8,4588
2,094	2,9084	8,4588
2,094	2,9082	8,4576
2,094	2,9082	8,4576
2,094	2,9082	8,4576

L ± 0,001	T ± 0,0001	T^2 ± 0,0006
1,916	2,7823	7,7412
1,916	2,7796	7,7262
1,916	2,7788	7,7217
1,916	2,7806	7,7317
1,916	2,7821	7,7401
1,916	2,7815	7,7367
1,916	2,7815	7,7367
1,916	2,7821	7,7401
1,916	2,7811	7,7345
1,916	2,781	7,7340
1,916	2,7814	7,7362
1,916	2,7813	7,7356
1,916	2,7813	7,7356
1,916	2,782	7,7395
1,916	2,7819	7,7390
1,916	2,7817	7,7379
1,916	2,7816	7,7373
1,916	2,7817	7,7379
1,916	2,7814	7,7362
1,916	2,7816	7,7373
1,916	2,7817	7,7379
1,916	2,7817	7,7379
1,916	2,7819	7,7390
1,916	2,7818	7,7384
1,916	2,7819	7,7390

L ± 0,001	T ± 0,0001	T^2 ± 0,0005
1,728	2,6433	6,9870
1,728	2,6438	6,9897
1,728	2,643	6,9855
1,728	2,6426	6,9833
1,728	2,6428	6,9844
1,728	2,6431	6,9860
1,728	2,643	6,9855
1,728	2,643	6,9855
1,728	2,6431	6,9860
1,728	2,6431	6,9860
1,728	2,6431	6,9860
1,728	2,6434	6,9876
1,728	2,6436	6,9886
1,728	2,6435	6,9881
1,728	2,6432	6,9865
1,728	2,6429	6,9849
1,728	2,6428	6,9844
1,728	2,6429	6,9849
1,728	2,643	6,9855
1,728	2,6431	6,9860
1,728	2,6432	6,9865
1,728	2,6432	6,9865
1,728	2,6432	6,9865
1,728	2,6434	6,9876
1,728	2,6433	6,9870

L ± 0,001	T ± 0,0001	T^2 ± 0,0005
1,512	2,4746	6,1237
1,512	2,4701	6,1014
1,512	2,4718	6,1098
1,512	2,4732	6,1167
1,512	2,4725	6,1133
1,512	2,4723	6,1123
1,512	2,4732	6,1167
1,512	2,4737	6,1192
1,512	2,4729	6,1152
1,512	2,4726	6,1138
1,512	2,4732	6,1167
1,512	2,4732	6,1167
1,512	2,4734	6,1177
1,512	2,4734	6,1177
1,512	2,4734	6,1177
1,512	2,4735	6,1182
1,512	2,4731	6,1162
1,512	2,473	6,1157
1,512	2,473	6,1157
1,512	2,4732	6,1167
1,512	2,4734	6,1177
1,512	2,4733	6,1172
1,512	2,4734	6,1177
1,512	2,4734	6,1177
1,512	2,4734	6,1177

Propagación de errores

$\Delta T^2 = 2.T.\Delta T$

$\Delta L = \Delta calibre + \Delta cinta\ métrica$