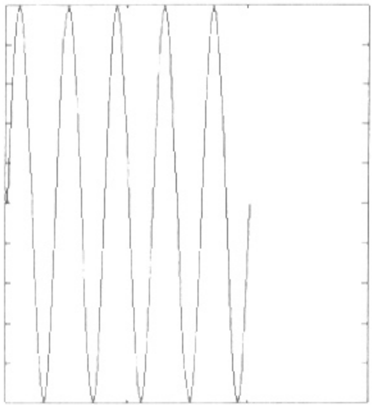
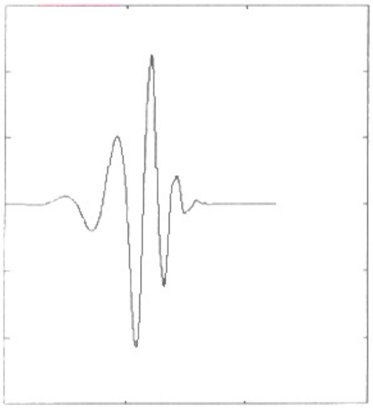
Desarrollo en Wavelets



onda (wave)



ondita (wavelet)

$$f(t) = \sum_k a_k \psi_k(t)$$

Si la base del desarrollo es una base ortonormal:

$$\langle \psi_k(t), \psi_l(t) \rangle = \int \psi_k(t) \cdot \psi_l(t) dt = 0 \qquad k \neq l$$

$$a_k = \langle f(t), \psi_k(t) \rangle = \int f(t) \cdot \psi_k(t) dt$$

Para un desarrollo en wavelets se incluyen dos parámetros j , k :

$$f(t) = \sum_k \sum_j a_{j,k} \psi_{j,k}(t) \qquad (j,k \in \mathbf{Z})$$

$\psi_{j,k}$ $\rightarrow$ base ortonormal completa

coeficientes $a_{j,k}$ $\rightarrow$ *Transformada Discreta en Wavelets* (*DWT*).

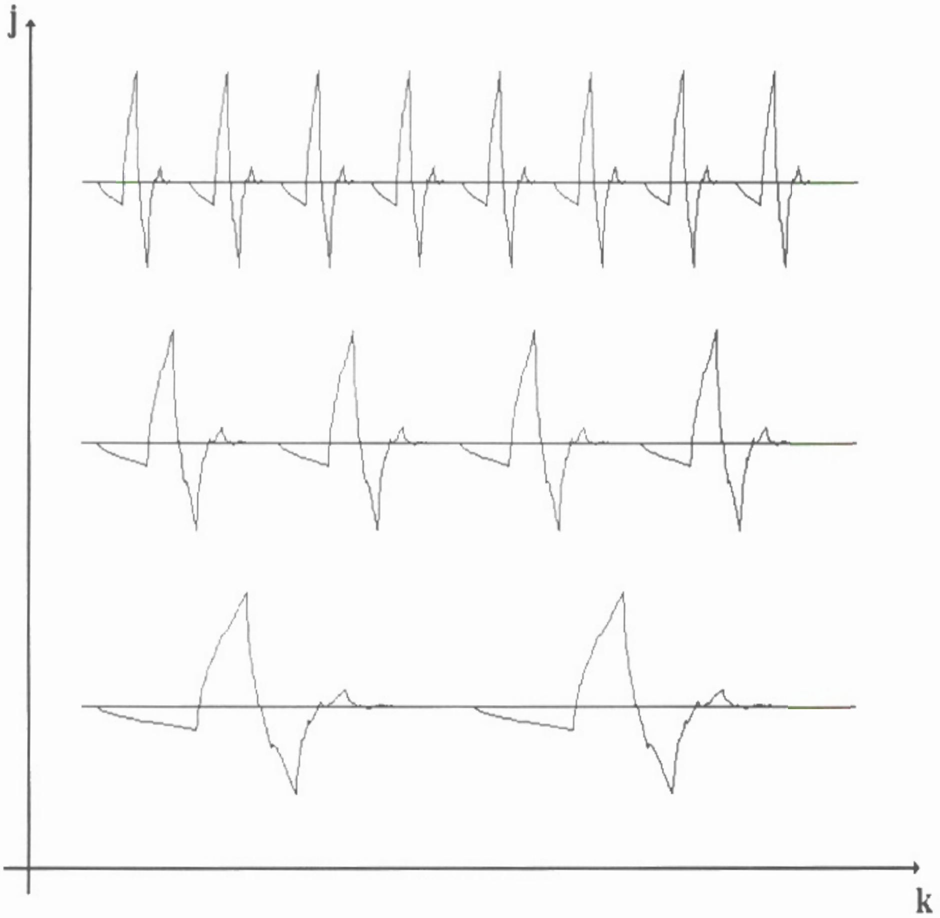
Características:

1. Las funciones $\psi_{j,k}$ se generan a partir de una única función generadora simplemente mediante ***translaciones*** **y** ***escalado***:

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) \qquad j,k \in \mathbf{Z}$$

2. Los sistemas formados por wavelets satisfacen las condiciones de ***multirresolución***.

3. Los coeficientes que pertenecen a una resolución menor se pueden calcular a partir de los coeficientes de resolución mayor. Este proceso se puede representar mediante un esquema en árbol denominado ***filter bank***.



- El análisis con wavelets permite un grado de libertad adicional: existe infinidad de funciones wavelet diferentes → podemos utilizar las funciones que mejor se ajusten a nuestro problema.

Análisis Multirresolución

Consideremos el espacio formado por las funciones de cuadrado integrable de variable real $L^2(\mathbf{R})$

Definimos como ***función de escala*** $\varphi(t)$ a una función que perteneciendo a dicho espacio satisface lo siguiente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = 1$$

$$\|\varphi(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)|^2 dt = 1$$

$$\langle \varphi(t), \varphi(t-n) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \cdot \varphi(t-n) dt = \delta(n)$$

- El conjunto formado por las translaciones de la función de escala forma una base ortonormal:

$$\varphi_k(t) = \varphi(t - k) \qquad k \in \mathbf{Z} \qquad \varphi(t) \in L^2$$

- El subespacio de $L^2(\mathbf{R})$ formado por dichas funciones se define como:

$$V_0 = \{\varphi_k(t)\}_{k \in \mathbf{Z}}$$

$$f(t) \in V_0 \Rightarrow f(t) = \sum_k c_k \varphi_k(t)$$

- La familia bidimensional formada mediante sucesivas translaciones y escalados de la función de escala base permite definir los subespacio V_j :

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k)$$

$$V_j = \{ \varphi_{j,k}(t) \}_{k \in Z}$$

- Si una función pertenece al subespacio V_j , ésta puede poner como:

$$f(t) \in V_j \Rightarrow f(t) = \sum_k c_k \varphi_{j,k}(t)$$

- Con esta notación:

$j > 0 \Rightarrow$ funciones base estrechas y translaciones pequeñas.
(detalles finos)

$j < 0 \Rightarrow$ funciones base anchas y translaciones grandes.
(detalles gruesos)

- El conjunto de subespacios $\{V_j\}_{j\in Z}$ representa una aproximación **multirresolución** del espacio $L^2(\mathbf{R})$ si cumple las propiedades siguientes:

$$\ldots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset L^2$$

$$V_j \subset V_{j+1} \quad \text{para todo}\, j \in \mathbf{Z}$$

$$\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j \quad \text{es densa en } L^2(\mathbf{R})$$

$$V_{\infty} = L^2$$

$$\bigcap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{\varnothing\}$$

$$V_{-\infty} = \{\varnothing\}$$

- Debido a la definición de los subespacios V_j , se debe satisfacer la siguiente condición:

$$f(t) \in V_j \iff f(2t) \in V_{j+1}$$

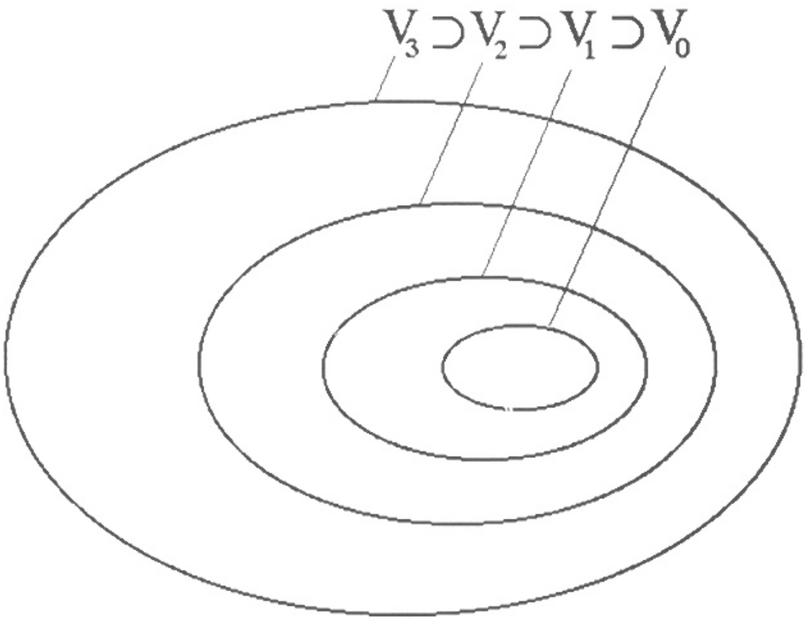
- Si $\varphi(t) \in V_0 \Rightarrow \quad \varphi(t) \in V_1$

  Dado que V_1 está desarrollado por las funciones $\varphi(2t)$, podemos poner $\varphi(t)$ como combiunación de dichas funciones:

$$\boxed{\varphi(t) = \sum_n h(n)\sqrt{2}\varphi(2t-n)\,,\, n \in \mathbf{Z}}$$

ecuación de dilatación o *de refinamiento*

- Los coeficientes $h(n)$ se denominan *coeficientes de escala*
- El término √2 mantiene la norma de las funciones de escala



- La aproximación de una función $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ en una resolución j puede definirse como la proyección de dicha función sobre el subespacio V_j

$$P_j f(t) = \sum_n c_{j,n} \varphi_{j,n}(t)$$

- El conjunto $\{\varphi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ no es una base completa de $L^2(\mathbf{R})$

$$\Downarrow$$

Se pierde información al proyectar la función $f(t)$ sobre el subespacio V_j

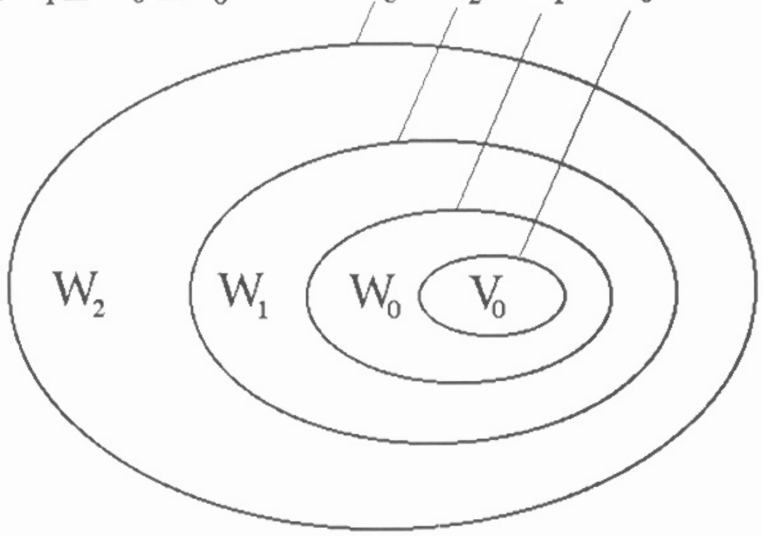
- Esta información perdida se puede interpretar como los detalles de la función $f(t)$ que son más finos que la resolución j

- Una función $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ se puede poner como

$$f(t) = P_j f(t) + \sum_{k=j}^{\infty} D_k f(t)$$

- Definimos el subespacio W_j como el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1}

$W_2 \perp W_1 \perp W_0 \perp V_0$ $\qquad$ $V_3 \supset V_2 \supset V_1 \supset V_0$



- Denominamos ***funciones wavelet*** $\psi(t)$ al conjunto de funciones $\{\psi_{j,k}(t)\}_{k\in Z}$ que forman una base ortogonal del subespacio W_j satisfaciendo las siguientes propiedades:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)dt = 0$$

$$\|\psi(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(t)|^2 dt = 1$$

$$\langle\psi(t),\psi(t-n)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\cdot\psi(t-n)dt = \delta(n)$$

$$\langle\psi(t),\varphi(t-n)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\cdot\varphi(t-n)dt = 0$$

- La relación entre los diferentes subespacios se puede expresar de la siguiente forma:

$$V_j \cap W_j = \{0\}$$

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1}$$

- En general podemos poner:

$$W_{-\infty}\oplus\cdots\oplus W_{-1} = V_0$$

$$L^2 = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus\cdots$$

$$L^2 = \cdots\oplus W_{-2}\oplus W_{-1}\oplus W_0\oplus W_1\oplus W_2\oplus\cdots$$

- Dado que las funciones $\{\psi_{j,k}(t)\}_{k\in Z}$ forman una base ortogonal del subespacio W_j

$$f(t)\in W_j \Rightarrow f(t)=\sum_k d_{j,k}\psi_{j,k}(t)$$

- La ecuación de refinamiento para las funciones wavelets se obtiene teniendo en cuenta que $W_j \subset V_{j+1}$

$$\boxed{\psi(t)=\sum_n g(n)\sqrt{2}\varphi(2t-n)\,,\, n\in \mathbf{Z}}$$

- Debido a la ortogonalidad entre los subespacios W_j y V_j , existe una relación entre los coeficientes $g(n)$ y $h(n)$

$$g(n)=(-1)^n h(1-n)$$

RESUMEN

$$V_j + W_j = V_{j+1}$$
$$V_j \cap V_k = V_j \qquad k > j$$
$$W_j \cap W_k = \{0\} \qquad k \neq j$$
$$V_j \cap W_k = \{0\} \qquad j \leq k$$

1. Las funciones de escala de un nivel de resolución j son ortonormales a las funciones de escala del mismo nivel de resolución, pero no lo son a otras de diferente nivel de resolución:

$$\left\langle \varphi_{j,n}, \varphi_{j,m} \right\rangle = \delta_{n,m}$$

2. Las funciones de escala son ortogonales a cualquier función wavelet de un nivel de resolución superior, mientras que las funciones wavelet son ortonormales a todas las demás funciones wavelet de cualquier nivel de resolución:

$$\left\langle \varphi_{j,n}, \psi_{k,m} \right\rangle = 0 \qquad j \leq k$$
$$\left\langle \psi_{j,n}, \psi_{k,m} \right\rangle = \delta_{j,k}\delta_{n,m}$$

3. Cualquier función de escala de nivel j se puede desarrollar como combinación de funciones wavelet de todos los niveles de resolución inferior:

$$\varphi_{j,n}(t) = \sum_{k=-\infty}^{j-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_{k,m}^{j,n} \psi_{k,m}(t)$$

4. Cualquier función $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ se puede expresar como suma de series convergentes de la forma:

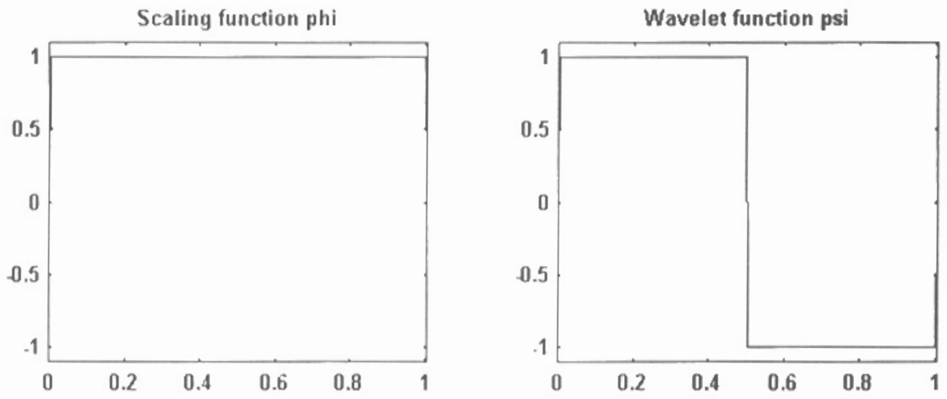
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varphi_{j_0,n}(t) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_{j,n} \psi_{j,n}(t)$$

5. Si la función wavelet $\psi(t)$ tiene r derivadas continuas, entonces es ortogonal a todos los polinomios de grado $k \leq r$:

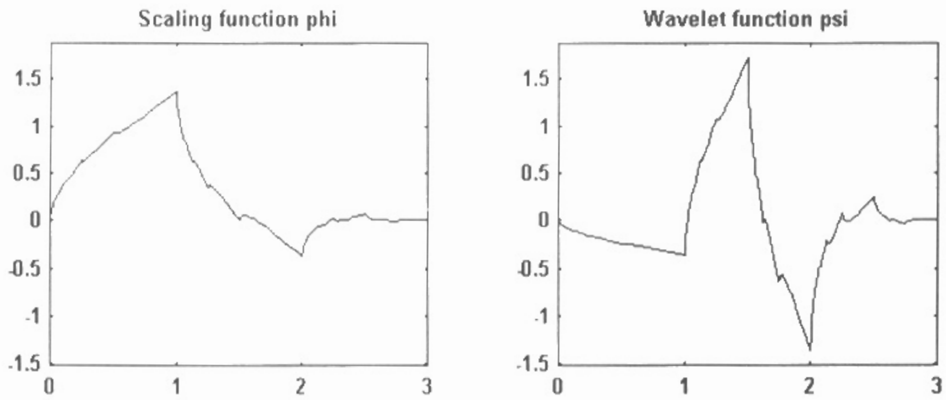
$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi_{j,n}(t) dt = 0 \qquad k = 0, 1, \ldots, r$$

6. La transformada de Fourier de la función de escala es una función *pasa-baja*, mientras que la transformada de Fourier de la función wavelet es una función *pasa-alta*. Esto implica que en un desarrollo multirresolución las funciones de escala se pueden utilizar para obtener el contenido de baja frecuencia de una señal mientras que las funciones wavelet nos dan el contenido de alta frecuencia.

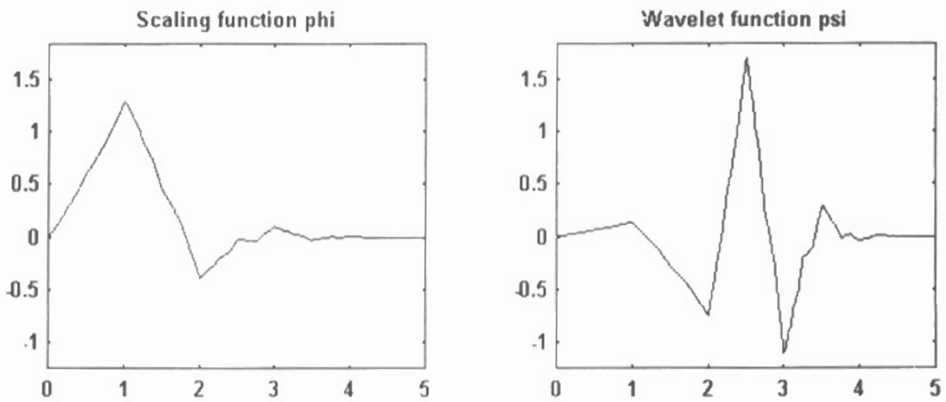
Tipos de Wavelets



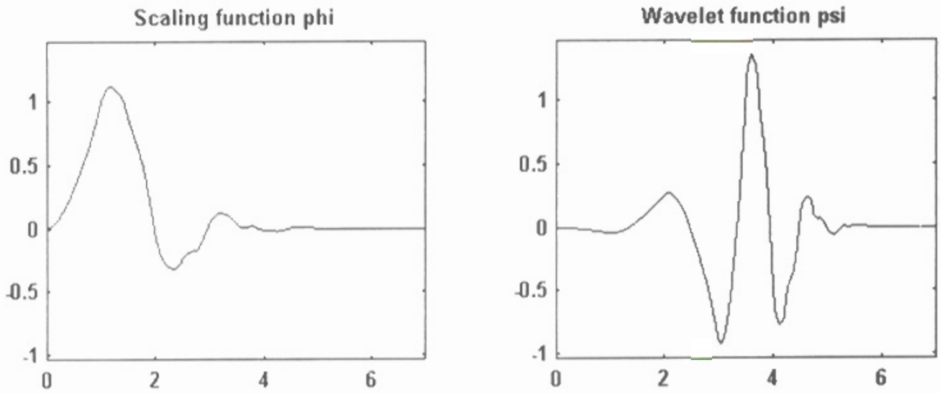
Haar wavelets



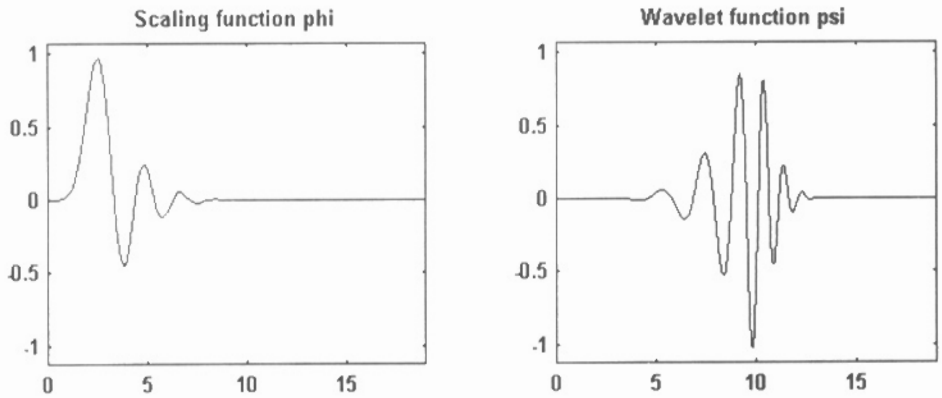
Daubechies 4 wavelets



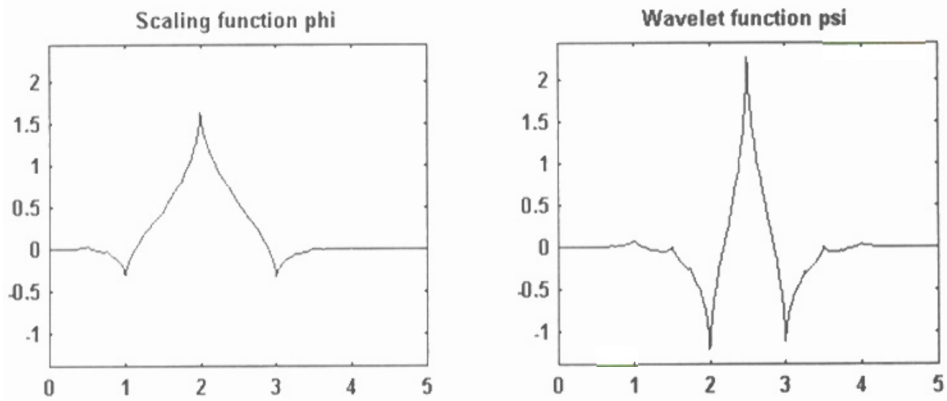
Daubechies 6 wavelets



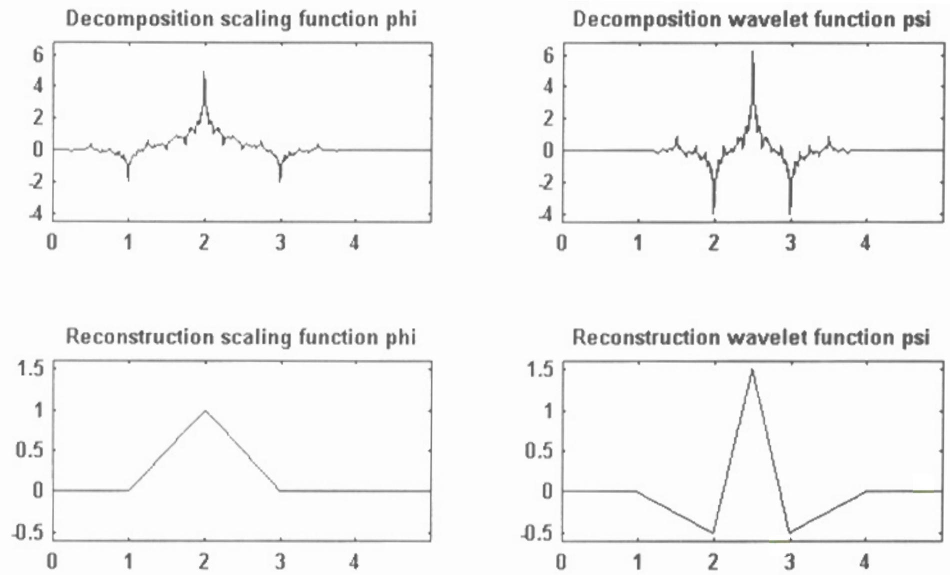
Daubechies 8 wavelets



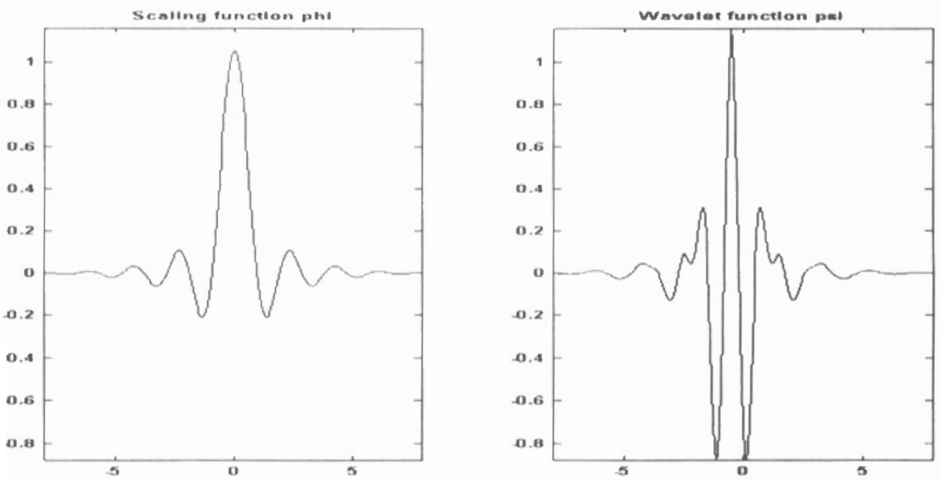
Daubechies 20 wavelets



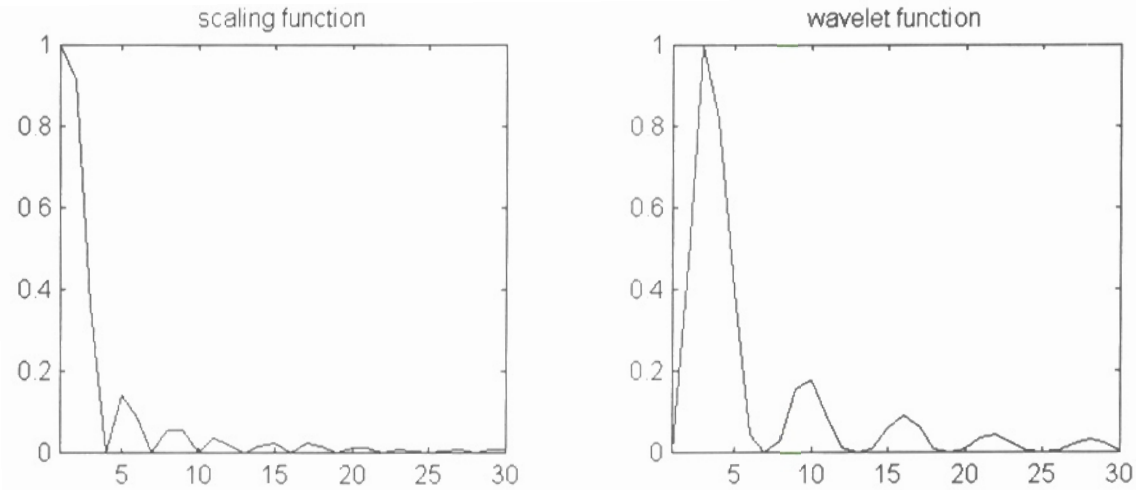
Coiflet 6 wavelets



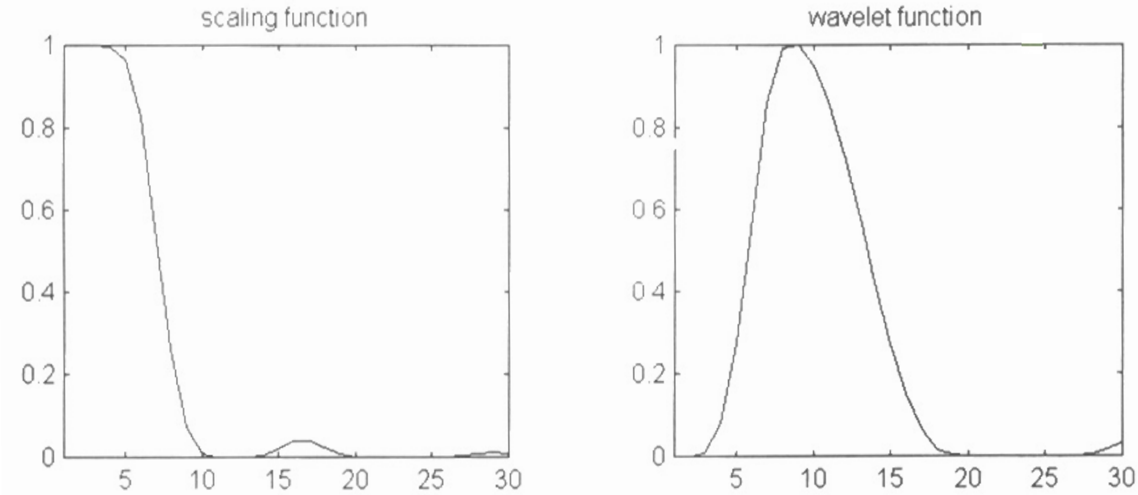
Biorthogonal wavelets



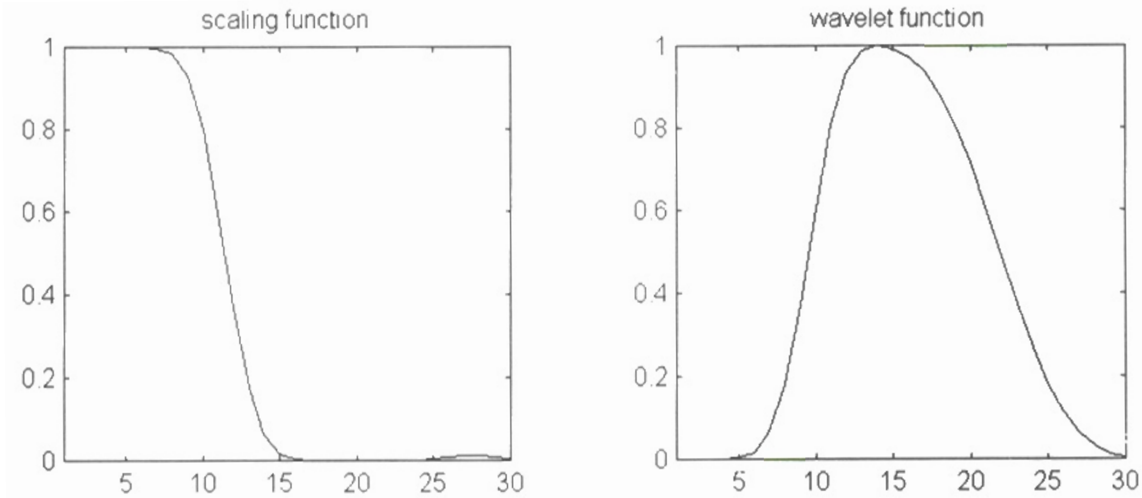
Meyer wavelets



Daubechies 4 magnitude spectra



Daubechies 12 magnitude spectra

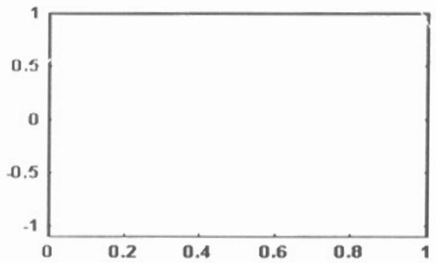


Daubechies 20 magnitude spectra

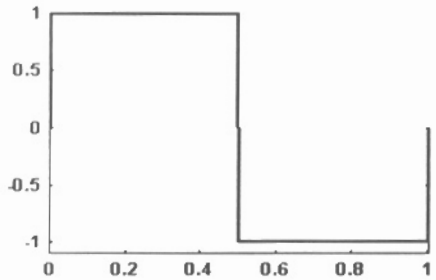
Ejemplo

Vamos a ilustrar el planteamiento matemático utilizando las funciones wavelets más sencillas: ***Haar Wavelets***.

$$\varphi(t) = \begin{Bmatrix} 1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{Bmatrix}$$



$$\psi(t) = \begin{Bmatrix} 1 & \text{si } 0 < t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} < t < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{Bmatrix}$$

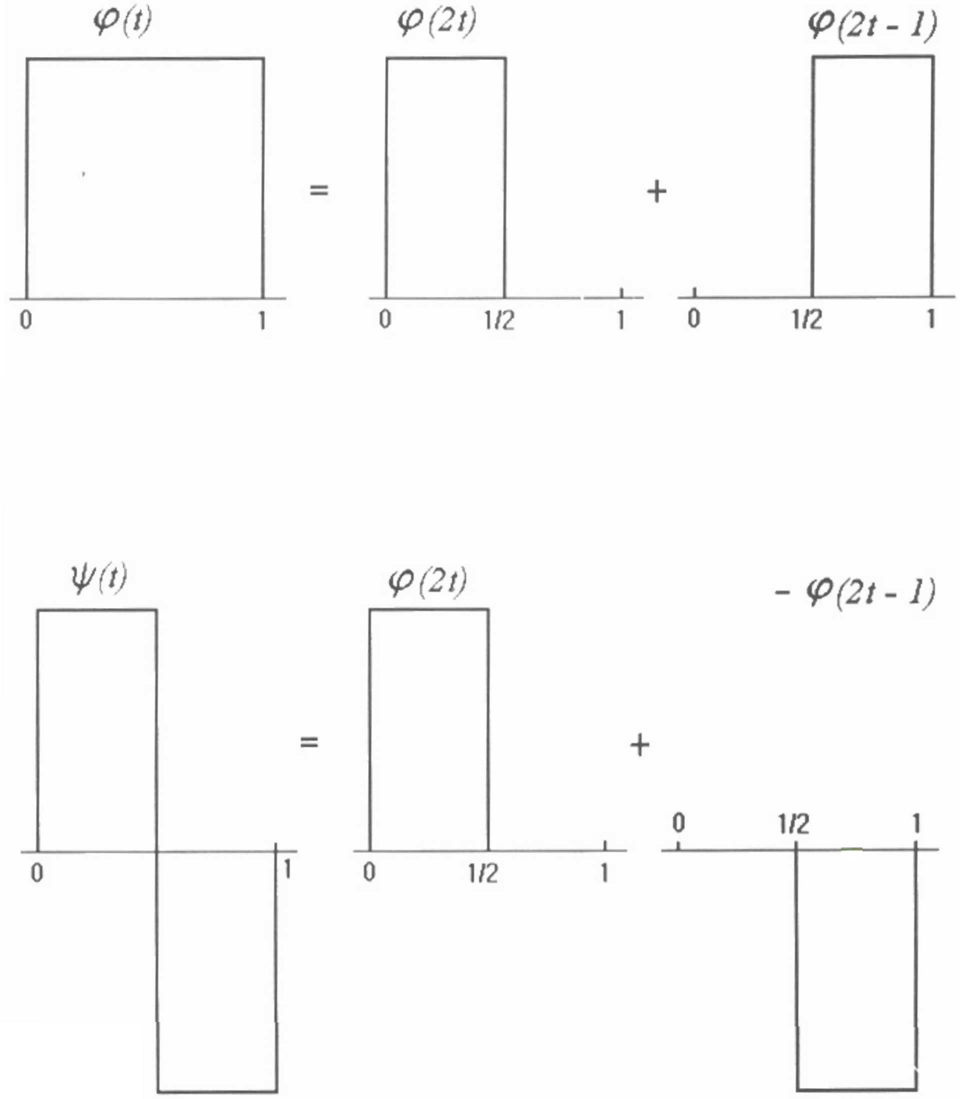


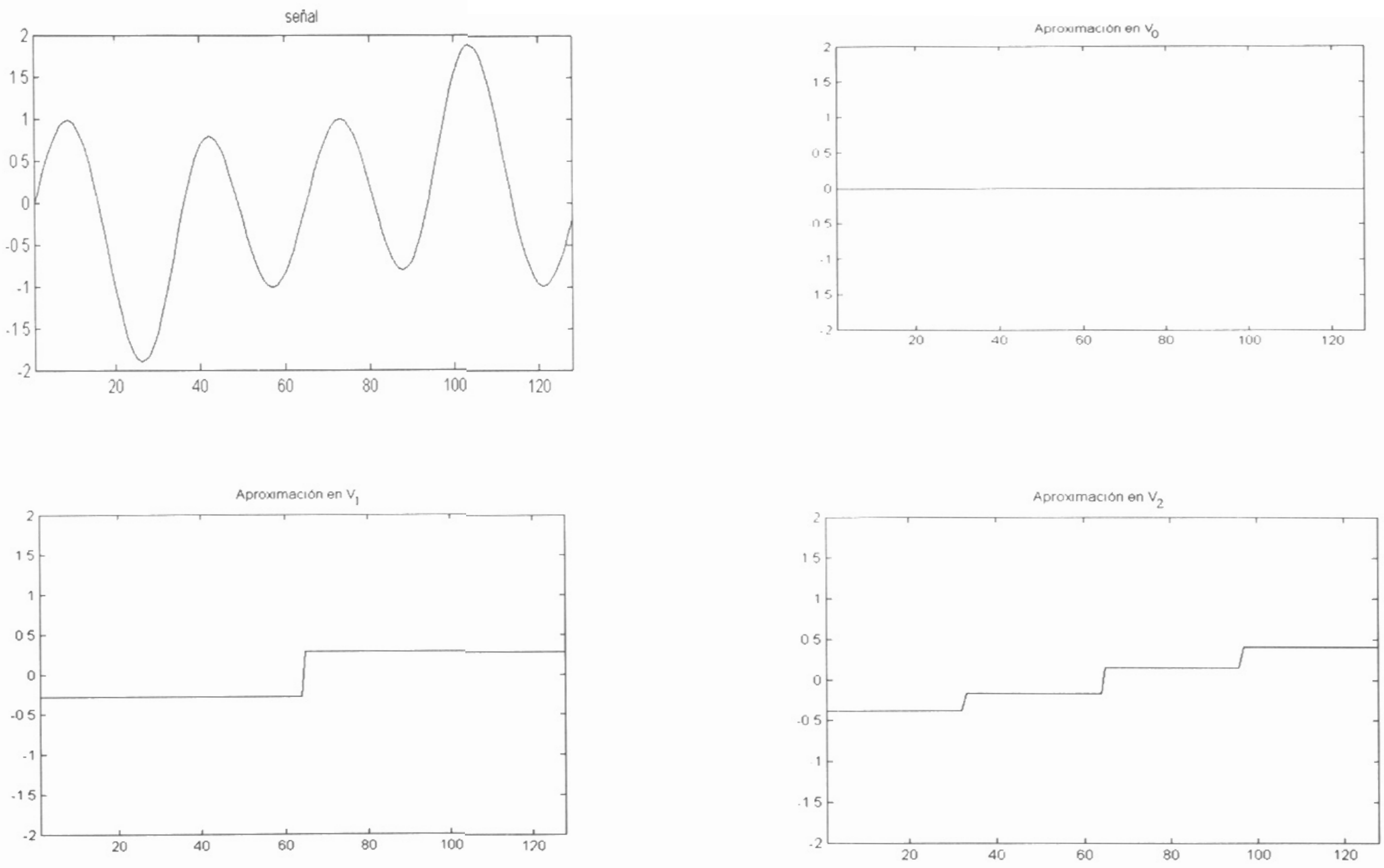
- Los coeficientes correspondientes a sus respectivas ecuaciones de refinamiento distintos de cero son únicamente dos:

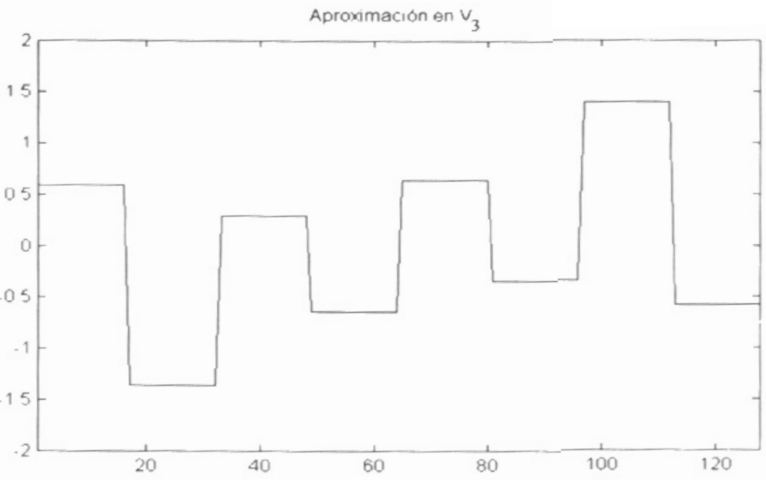
$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{1} h(n)\sqrt{2}\varphi(2t-n)$$

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{1} g(n)\sqrt{2}\varphi(2t-n)$$

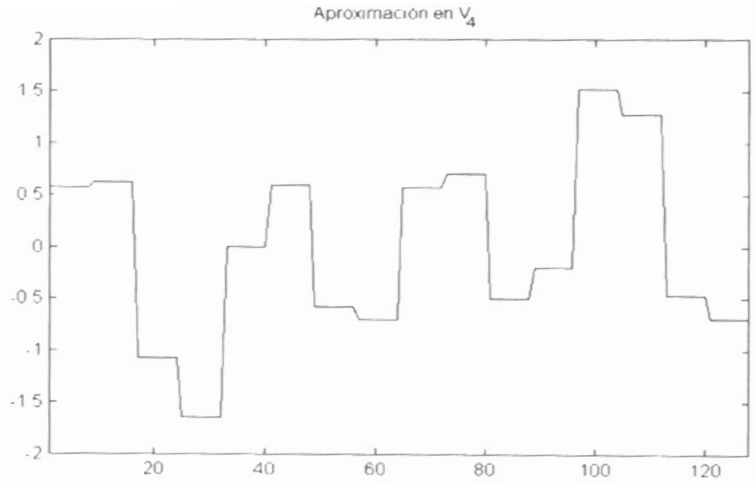
donde $h(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $h(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $g(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $g(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$


φ(t)
=
φ(2t)
+
φ(2t - 1)
0
1
0
1/2
1
0
1/2
1
ψ(t)
=
φ(2t)
+
- φ(2t - 1)
0
1
0
1/2
1
0
1/2
1

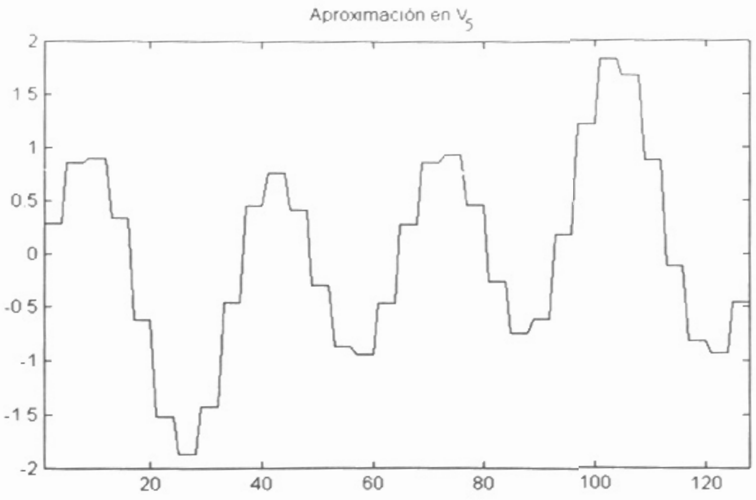

señal
Aproximación en V_0
Aproximación en V_1
Aproximación en V_2



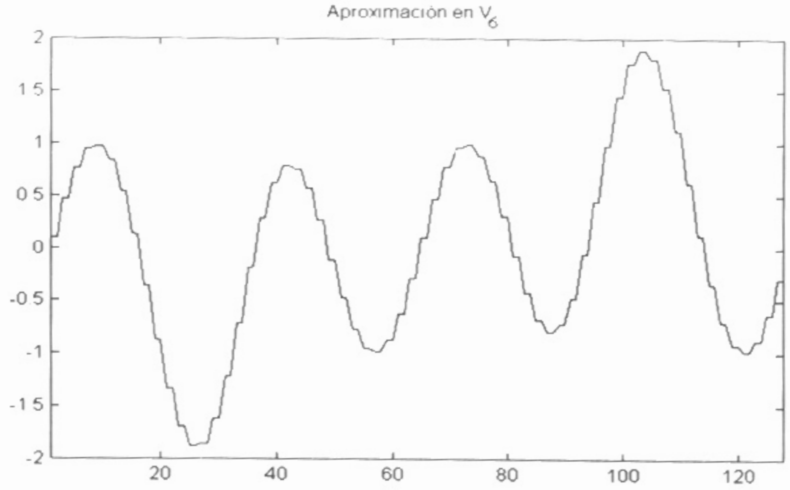
Aproximación en V_3



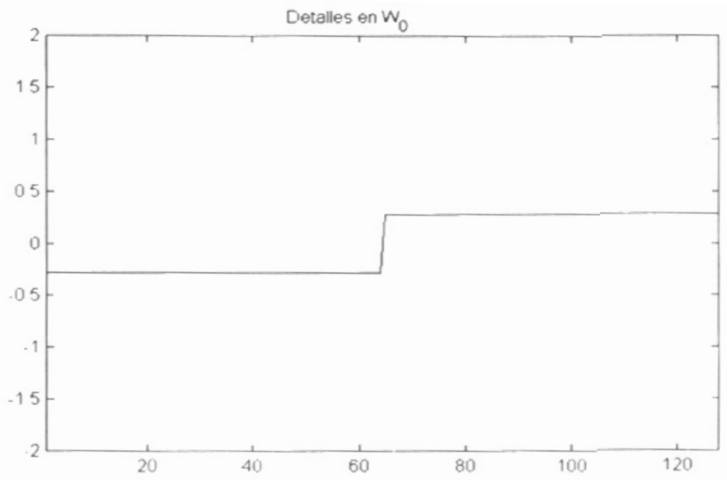
Aproximación en V_4



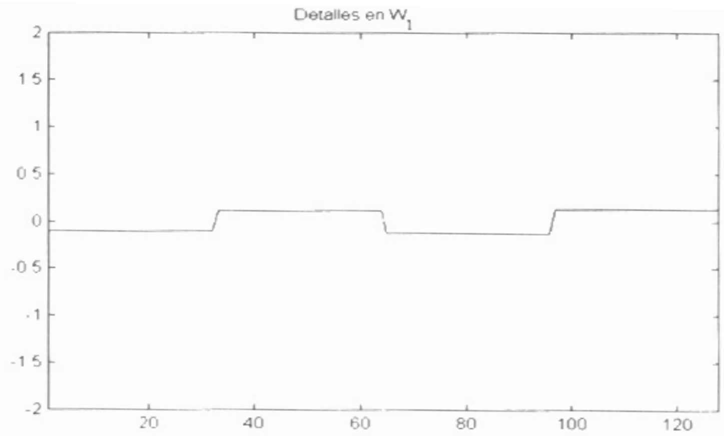
Aproximación en V_5



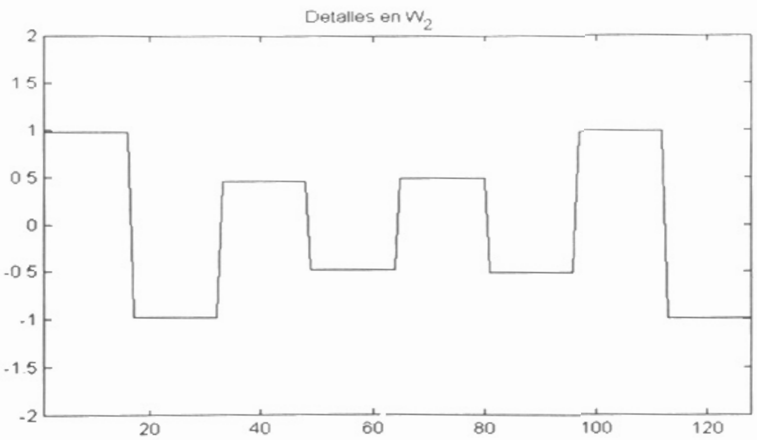
Aproximación en V_6



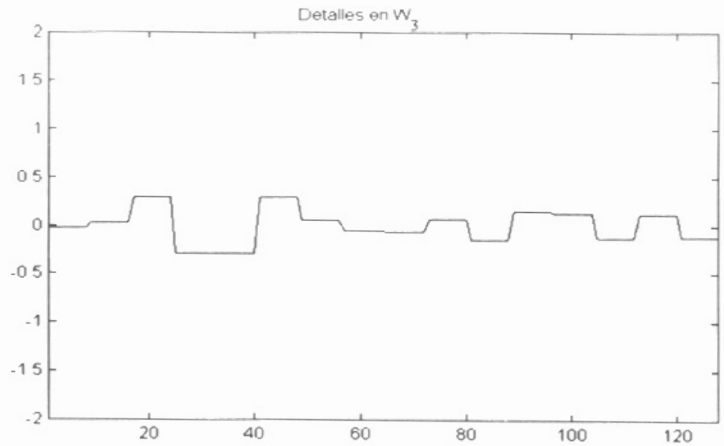
Detalles en W_0
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
20 40 60 80 100 120



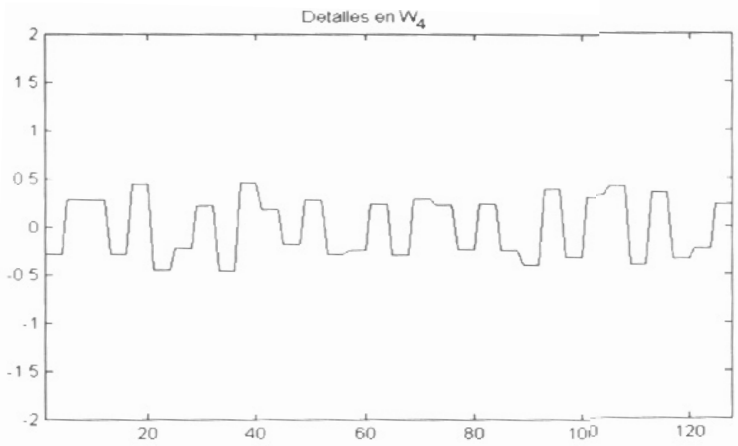
Detalles en W_1
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
20 40 60 80 100 120

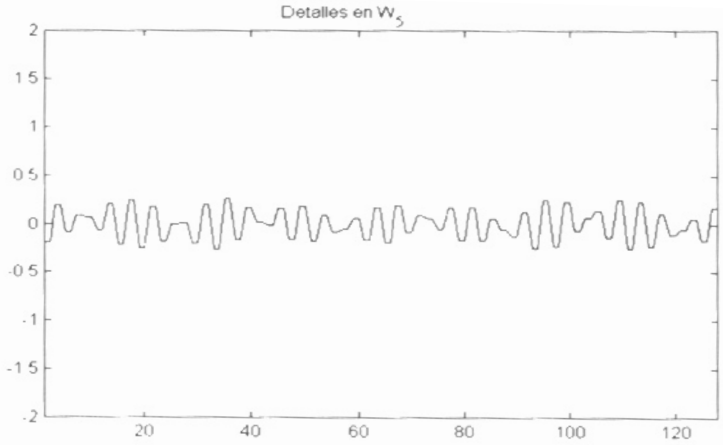


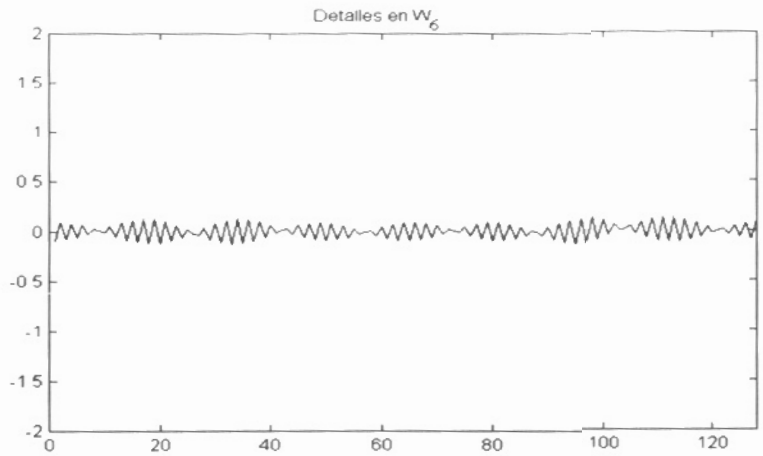
Detalles en W_2
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
20 40 60 80 100 120

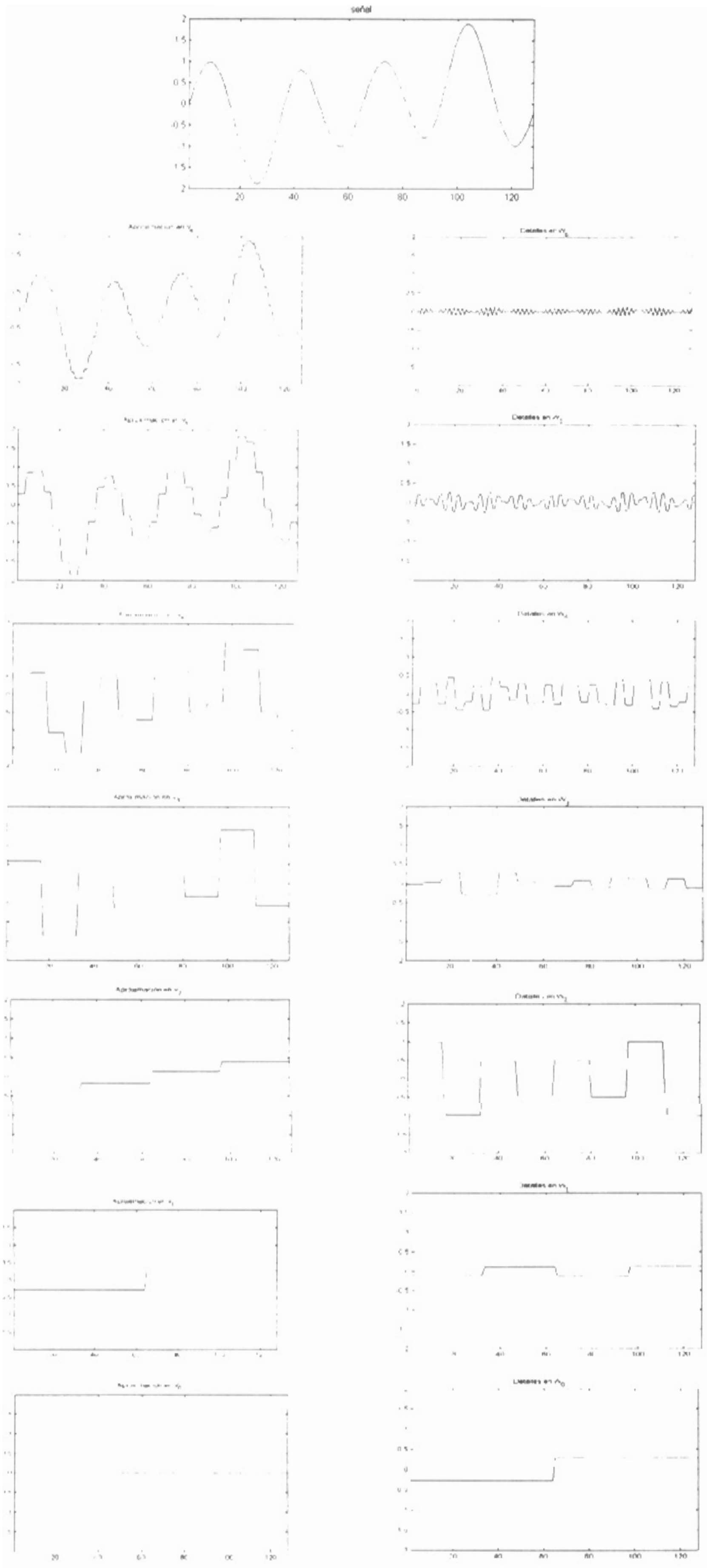


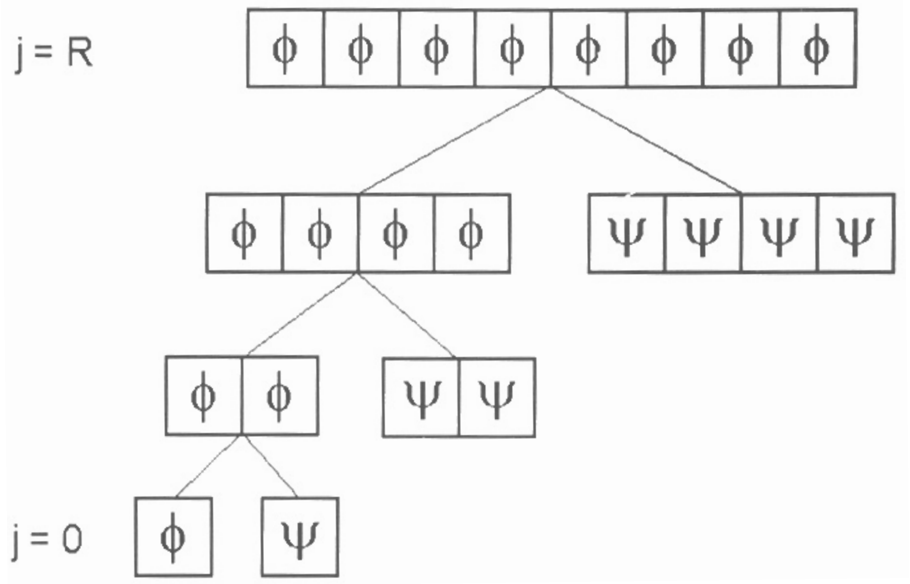
Detalles en W_3
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
20 40 60 80 100 120


Detalles en W_4
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
20
40
60
80
100
120


Detalles en W_5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
20
40
60
80
100
120


Detalles en W_6
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
20
40
60
80
100
120


señal



j = R
ϕ ϕ ϕ ϕ ϕ ϕ ϕ ϕ
ϕ ϕ ϕ ϕ
Ψ Ψ Ψ Ψ
ϕ ϕ
Ψ Ψ
j = 0
ϕ
Ψ

Transformada Discreta en Wavelets

En la mayoría de las aplicaciones no hace falta trabajar directamente con las funciones de escala y wavelets

$\Rightarrow$ sólo necesitamos conocer los coeficientes *g(n)* y *h(n)*

y los coeficientes c_k y d_k correspondientes al desarrollo de la función

Todo el estudio se puede realizar desde el punto de vista de los bancos de filtros (*filter banks*)

$\Rightarrow$ Filtros digitales $\{ g(n) , h(n) \}$

Señales digitales $\{ c_k , d_k \}$

- **ANÁLISIS** $\rightarrow$ de escala **fina** a escala **gruesa** (*descomposición*)

- **SÍNTESIS** $\rightarrow$ de escala **gruesa** a escala **fina** (*reconstrucción*)

ANÁLISIS

El objetivo es obtener a partir de los coeficientes de una escala fina los correspondientes a escalas más gruesas.

- Partimos de las ecuaciones de refinamiento:

$$\varphi(t) = \sum_n h(n)\sqrt{2}\varphi(2t-n)$$

$$\psi(t) = \sum_n g(n)\sqrt{2}\varphi(2t-n)$$

- Escalamos y transladamos las funciones:

$$\varphi(2^j t - k) = \sum_n h(n)\sqrt{2}\varphi(2(2^j t - k) - n) = \sum_n h(n)\sqrt{2}\varphi(2^{j+1} t - 2k - n)$$

$$\psi(2^j t - k) = \sum_n g(n)\sqrt{2}\varphi(2(2^j t - k) - n) = \sum_n g(n)\sqrt{2}\varphi(2^{j+1} t - 2k - n)$$

- Renombramos índices haciendo $m = 2k + n$:

$$\varphi(2^j t - k) = \sum_m h(m-2k)\sqrt{2}\varphi(2^{j+1} t - m)$$

$$\psi(2^j t - k) = \sum_m g(m-2k)\sqrt{2}\varphi(2^{j+1} t - m)$$

- Teniendo en cuenta que $V_{j+1} = V_j + W_j$, si $f(t) \in V_{j+1}$

$$f(t) = \sum_k c_{j+1}(k) 2^{\frac{(j+1)}{2}} \varphi(2^{j+1} t - k)$$

$$f(t) = \sum_k c_j(k) 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k) + \sum_k d_j(k) 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k)$$

- Dado que se trata de funciones ortonormales:

$$c_j(k) = \langle f(t), \varphi_{j,k}(t) \rangle = \int f(t) 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k) dt$$

$$\Rightarrow \qquad c_j(k) = \sum_m h(m - 2k) \int f(t) 2^{\frac{j+1}{2}} \varphi(2^{j+1} t - m) dt$$

- Observando que la integral es el producto $\langle f(t), \varphi_{j+1,k}(t) \rangle = c_{j+1}(k)$

$$\boxed{c_j(k) = \sum_m h(m - 2k)\, c_{j+1}(m)}$$

- Razonando de la misma manera para los coeficientes d_j obtenemos:

$$\boxed{d_j(k) = \sum_m g(m - 2k)\, c_{j+1}(m)}$$

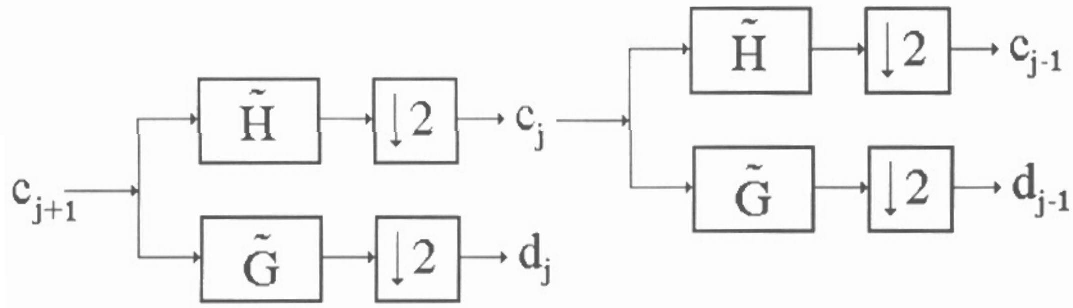
- Teniendo en cuenta que en una *convolución*, para una secuencia de entrada *x(n)* y un filtro de longitud N de coeficientes *h(n)*, la secuencia de salida *y(n)* viene dada como:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

- Según esto, las expresiones anteriores se pueden interpretar como una oparación de *convolución* seguida de otra operación de "diezmado" o "*down-sampling*", mediante la cual nos quedamos únicamente con la mitad de los elementos de la salida de la convolución:

$$c_j(k) = \sum_m h(m-2k)\, c_{j+1}(m)$$

$$d_j(k) = \sum_m g(m-2k)\, c_{j+1}(m)$$



- Para realizar el análisis de una señal, partimos de una descripción de alta resolución en términos de sus coeficientes de escala c_J, donde hemos fijado como nivel de resolución $j = J$, y a partir de ahí, el análisis se lleva a cabo siguiendo el esquema anterior hasta la resolución más baja deseada $j = j_0$, teniendo todo el proceso un total de $J - j_0$ etapas:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sum_k c_J(k)\varphi_{J,k}(t) = \\
&= \sum_k c_{J-1}(k)\varphi_{J-1,k}(t) + \sum_k d_{J-1}(k)\psi_{J-1,k}(t)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{f(t) = \sum_k c_{j_0}(k)\varphi_{j_0,k}(t) + \sum_k \sum_{j=j_0}^{J-1} d_j(k)\psi_{j,k}(t)}$$

SÍNTESIS

El proceso se síntesis consiste es reconstruir la señal en la escala más fina a partir de sus coeficientes de escala y wavelet de escalas más gruesas.

- Teniendo en cuenta que $V_{j+1} = V_j + W_j$, si $f(t) \in V_{j+1}$

$$f(t) = \sum_k c_{j+1}(k) 2^{\frac{(j+1)}{2}} \varphi(2^{j+1} t - k)$$

$$f(t) = \sum_k c_j(k) 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k) + \sum_k d_j(k) 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k)$$

- Utilizando las ecuaciones de refinamiento:

$$\varphi(2^j t - k) = \sum_n h(n) \sqrt{2} \varphi(2^{j+1} t - 2k - n)$$

$$\psi(2^j t - k) = \sum_n g(n) \sqrt{2} \varphi(2^{j+1} t - 2k - n)$$

$$\Downarrow$$

$$f(t) = \sum_k c_j(k) \sum_n h(n) 2^{\frac{j+1}{2}} \varphi(2^{j+1} t - 2k - n) + \sum_k d_j(k) \sum_n g(n) 2^{\frac{j+1}{2}} \varphi(2^{j+1} t - 2k - n)$$

- Igualando con la expresión inicial, multiplicando por $\varphi(2^{j+1}t - k')$ e integrando llegamos a la relación entre los coeficientes c_{j+1} y los coeficientes c_j y d_j :

$$\boxed{c_{j+1}(k) = \sum_m c_j(m)h(k-2m) + \sum_m d_j(m)g(k-2m)}$$

- De la misma forma que antes, estos sumatorios pueden interpretarse como convoluciones, pero en este caso lo que tenemos es en primer lugar una operación de "estiramiento" o "*up-sampling*" y después la convolución: