

Introducción a la Transformada Wavelet

DESCOMPOSICIÓN DE SEÑALES

Introducción

Para una mejor comprensión de los capítulos siguientes desarrollaremos aquí algunos conceptos matemáticos necesarios para nuestro trabajo. Se definirán los conceptos de Espacio de Hilbert, Ortogonalidad y Bases Ortogonales, además de realizar una breve descripción del Análisis de Fourier, sus usos y aplicaciones así como también sus limitaciones.

1.1 Generalidades

Por razones de claridad comenzaremos definiendo el espacio métrico sobre el que vamos a trabajar: el espacio $L^2[-\infty, +\infty]$ de Hilbert.

1.1.1 Espacios de Hilbert

El espacio H de Hilbert es un espacio vectorial cuyos elementos pertenecen al plano complejo \mathbf{C} [4]. Sea \mathbf{H} el conjunto de elementos del espacio H . Los vectores complejos de este conjunto pueden ser sumados con las reglas usuales de la aritmética de vectores (propiedad aditiva) y multiplicados por escalares (números complejos).

El espacio H está dotado de una métrica y de un producto interno. Consideraremos en particular el espacio H formado por funciones vectoriales f_n . Si f y g son funciones del conjunto \mathbf{H} de H , el producto interno para este conjunto de funciones es un escalar definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)g(x)dx, \quad (1.1)$$

donde $f^*(x)$ es el complejo conjugado de $f(x)$ [5]. El producto escalar o interno de la función f con sí misma es un número real no negativo. En particular, si la función $f \in \mathbf{C}$, entonces satisface la condición:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < \infty, \quad (1.2)$$

este espacio métrico recibe el nombre de Espacio de Hilbert $L^2[-\infty, +\infty]$.

1.1.2 Ortogonalidad. Bases Ortonormales

Se dice que dos vectores x e y son *ortogonales* en un Espacio Hilbert H si su producto interno es cero:

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Se le llama *conjunto ortogonal* a aquel conjunto de vectores en el cual cualquier par de sus elementos es *ortogonal*. Además, este conjunto es *ortonormal* si la norma de los vectores es igual a uno:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = 1$$

También se define a la *base ortonormal* de \mathbf{H} como un conjunto *ortonormal maximal* en \mathbf{H} si cualquier vector en \mathbf{H} puede ser representado como el límite de las combinaciones lineales de los elementos de una base ortonormal ^[5].

1.2 Análisis de Fourier

En 1807, Jean B. Fourier demostró que una función podía ser desarrollada en términos de series trigonométricas, y que se podían obtener, por integración, fórmulas para los coeficientes del desarrollo. Para comprender mejor esto daremos algunas definiciones previas.

1.2.1 Funciones periódicas

Dado que los términos de las series trigonométricas son periódicos es lógico deducir que las funciones que se van a desarrollar mediante dichas series deben ser también periódicas.

Se dice que una función $f(x)$ tiene un *período* P o es *periódica* con un período P si para todo x , $f(x+P) = f(x)$, donde P es una constante positiva. El menor valor de $P > 0$ se llama el *período mínimo* o *período* de $f(x)$ ^[6].

1.2.2 Coeficientes y Series de Fourier

Los desarrollos en Series de Fourier, Ec. (1.5), tienen dos aplicaciones fundamentales:

- (a) representar una función $f(x)$ definida en el intervalo $(-c, c)$, para valores de x en ese intervalo, o
- (b) representar una función periódica con período $2c$ para todos los valores de x .

La función $f(x)$ puede ser proyectada en una base ortonormal de funciones $\{\phi_k(x)\}$, de la siguiente forma:

$$f(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \dots + c_k\phi_k(x) + \dots \quad \begin{matrix} (-c < x < c) \\ k = 1, 2, \dots \end{matrix} \quad (1.3)$$

Se espera que el desarrollo de $f(x)$ converja a la función $f(x)$ ^[7].

Se puede demostrar que los coeficientes c_k de la suma son los coeficientes de Fourier de $f(x)$ con respecto a la base ortonormal $\{\phi_k(x)\}$ [7]. Estos coeficientes pueden expresarse como:

$$c_k = \int_{-c}^c f(x) \phi_k^*(x) dx \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

siendo ϕ^* el complejo conjugado de ϕ .

La serie de la Ec. (1.3) con estos coeficientes es la *Serie de Fourier* genérica correspondiente a la función $f(x)$, y se define como:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x) \quad (1.5)$$

Si $f(x)$ está definida en el intervalo $(0, 2\pi)$ y determinada fuera de ese intervalo por $f(x+2\pi) = f(x)$, esto es, $f(x)$ tiene período 2π , la *serie de Fourier* que corresponde a $f(x)$ sobre la base ortogonal de senos y cosenos se define como:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_n \cos kx + b_n \sen kx), \quad (1.6)$$

donde los coeficientes de Fourier a_k y b_k se definen como:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx \\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sen kx \, dx, \end{array} \right. \quad \text{con } k = 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

Puede observarse que los coeficientes de Fourier de la función transformada representan la contribución de cada función seno y coseno para cada frecuencia [6].

Usando la identidad de Euler: $e^{ikx} = \cos kx + i \sen kx$ podemos escribir la *serie de Fourier* de $f(x)$ como combinación lineal de funciones exponenciales complejas:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \quad (1.8)$$

donde las funciones $e_k(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ constituyen un conjunto ortonormal [5].

Los coeficientes de Fourier de $f(x)$, respecto de esta base, pueden expresarse como:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (1.9)$$

Es evidente que la *Serie de Fourier*, Ec. (1.5), no puede representar una función para todos los valores de x si la función no es periódica ^[2].

1.2.3 Transformada de Fourier

Para obtener una representación que pueda ser válida para todos los valores de x cuando $f(x)$ no es periódica, es natural intentar extender la representación anterior dejando que c tienda a infinito, lo que da lugar a la Transformada de Fourier ^[7].

La Transformada de Fourier de una función no periódica $f(x)$ está definida por

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \quad (1.10)$$

donde k es una variable real continua.

La función puede ser reconstruida a partir de sus componentes de Fourier, por medio de la transformada inversa de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk. \quad (1.11)$$

La Transformada de Fourier en $\mathbf{L}^2[-\infty, +\infty]$ satisface las siguientes propiedades:

- Es una transformación de Fourier uno-a-uno de $\mathbf{L}^2[-\infty, +\infty]$ en sí mismo.
- Preserva la norma,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(k)|^2 dk. \quad (1.12)$$

- Preserva el producto interno,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g^*(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)G^*(k) dk. \quad (1.13)$$

1.2.4 Limitaciones del Análisis de Fourier

La Transformada de Fourier es ampliamente utilizada en el procesamiento y análisis de señales y con resultados satisfactorios en los casos en que estas señales son periódicas y lo suficientemente regulares, pero no ocurre lo mismo para el análisis de señales cuyo espectro varía con el tiempo (señales no estacionarias).

Tomando el caso en el que la función f a descomponer es una señal dependiente del tiempo, puede decirse que las funciones de la base de Fourier son de duración infinita en el tiempo, pero locales en frecuencia.

La Transformada de Fourier detecta la presencia de una determinada frecuencia pero no brinda información acerca de la evolución en el tiempo de las características espectrales de la señal. Muchos aspectos temporales de la señal, tales como el comienzo y el fin de una señal finita y el instante de aparición de una singularidad en una señal transitoria, no pueden ser analizados adecuadamente por el análisis de Fourier.

Para los casos de señales no estacionarias y transitorias se utiliza generalmente la *Transformada de Fourier con Ventana*.

1.2.5 Transformada de Fourier con Ventana

Una forma de analizar una señal no estacionaria es realizar un análisis espectral dependiente del tiempo. Una señal estacionaria es dividida en una secuencia de segmentos de tiempo en los cuales la señal puede ser considerada como cuasi-estacionaria y la Transformada de Fourier es aplicada a cada segmento local de la señal.

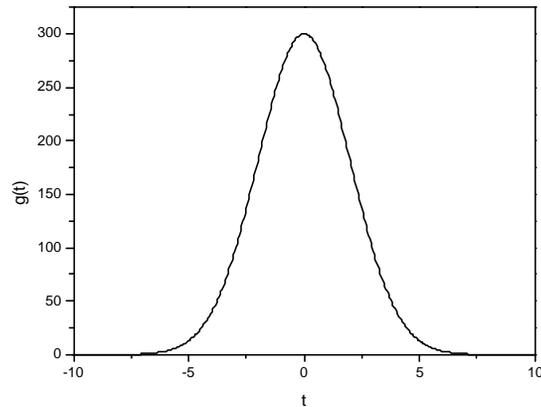
Gabor, en 1940, fue el primero en introducir la Transformada de Fourier de tiempo corto, conocida como la Transformada de Fourier con Ventana Deslizante, definida como:

$$S_f(\omega, \tau) = \int f(t) g^*(t - \tau) \exp(-i\omega t) dt \quad (1.14)$$

donde $g(t)$ es una ventana deslizante, la cual tiene un ancho fijo y cambia a lo largo del eje x por un factor τ [8]. Así, propuso a la función Gaussiana como la función ventana $g(t)$ y demostró que la Transformada de Fourier de una ventana Gaussiana continúa siendo Gaussiana [8].

La función está definida como (Fig. 1-1):

$$g(t) = \frac{1}{s} \exp\left(-\frac{\pi t^2}{s^2}\right) . \quad (1.15)$$

**Fig. 1-1**

Con la Transformada de Fourier con Ventana se logra una mejor localización de la aparición de una singularidad en una señal. Pero solo se conocerá en qué intervalo de tiempo se produce la singularidad, debido a que la localización depende del ancho elegido para la función ventana. Además, los eventos no podrán ser resueltos si aparecen muy cerca unos de otros, ya que no será posible distinguir diferentes comportamientos dentro de una misma amplitud de ventana ^[4].

Una herramienta matemática que permite resolver estos problemas es la Transformada Wavelet. Este tipo de transformada es capaz de concentrarse en fenómenos transitorios y de alta frecuencia mejor que la Transformada de Fourier con Ventana. Con esta última, una vez que el tamaño de la ventana es elegido, todas las frecuencias son analizadas con las mismas resoluciones de tiempo y frecuencia, distinto de lo que sucede en la Transformada Wavelet que tiene un tamaño de ventana adaptado a las frecuencias.

Con respecto a imágenes, la Transformada de Fourier $F(k)$ de una función $f(x)$ de soporte finito se extiende entre $[-\infty, +\infty]$. Luego de aplicar cualquier algoritmo de análisis a $F(k)$ se pierde información al realizarse la antitransformación en un intervalo finito. En cambio, en el caso de la Transformada Wavelet la función y su transformada se encuentran en un intervalo finito y, por lo tanto, no hay pérdida de información al realizar la antitransformación.

En el capítulo siguiente desarrollaremos los conceptos de la Transformada Wavelet así como otros relacionados con ella, los cuales nos llevan a afirmar lo expresado en el párrafo anterior.

CONCEPTOS ESENCIALES

Introducción

En este capítulo nos ocuparemos de la llamada Transformada Wavelet, herramienta matemática desarrollada a mediados de los años '80.

Esta Transformada es eficiente para el análisis local de señales no estacionarias y de rápida transitoriedad y, al igual que la Transformada de Fourier con Ventana, mapea la señal en una representación de tiempo-escala. El aspecto temporal de las señales es preservado. La diferencia está en que la Transformada Wavelet provee análisis de multiresolución con ventanas dilatadas. El análisis de las frecuencias de mayor rango se realiza usando ventanas angostas y el análisis de las frecuencias de menor rango se hace utilizando ventanas anchas^[8].

Las Wavelets, funciones bases de la Transformada Wavelet, son generadas a partir de una función Wavelet básica, mediante traslaciones y dilataciones. Estas funciones permiten reconstruir la señal original a través de la Transformada Wavelet inversa.

La Transformada Wavelet no es solamente local en tiempo, sino también en frecuencia.

Dentro de los usos de esta poderosa herramienta podemos nombrar, además del análisis local de señales no estacionarias, el análisis de señales electrocardiográficas, sísmicas, de sonido, de radar, así como también es utilizada para la compresión y procesamiento de imágenes y reconocimiento de patrones.

En la breve introducción que sigue se supondrá (para facilitar el uso de ciertos ejemplos) que la función a analizar es función del tiempo t .

2.1 Bases ortonormales

2.1.1 Bases de la función de escala

Las *funciones de escala* juegan el papel de funciones promedio. La correlación entre la función de escala y una función continua arbitraria produce la aproximación promediada de la última.

La función de escala básica $\phi(t)$, dilatada por un factor de escala 2^i , es desplazada con un factor de escala discreto de traslación k ,

$$\phi_{i,k}(t) = 2^{-i/2} \phi(2^{-i}t - k). \quad (2.1)$$

Las funciones de escala básica $\phi(t)$ que se emplean satisfacen la condición de ortogonalidad, tal que las traslaciones discretas $\{\phi(t-k)\}$ con $k \in \mathbf{Z}$, forman un conjunto ortonormal^[8]. La proyección de una función $f(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ en la base ortonormal $\{\phi(t-k)\}$ es una correlación entre la función $f(t)$ original y la función de escala $\phi(t)$ muestreada a intervalos enteros.

Como resultado de la proyección de $f(t)$ en la base de la función de escala, se obtiene una aproximación menos detallada de $f(t)$. Todas las aproximaciones de $f(t)$ forman un subespacio $V_0 \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$. El espacio vectorial V_0 puede ser interpretado como el conjunto de todas las posibles aproximaciones de la función en $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ generado por el conjunto ortonormal $\{\phi(t-k)\}$.

Las funciones de escalas para todas las escalas $s = 2^i$ con $i \in \mathbf{Z}$, generadas a partir de la misma $\phi(t)$, son todas de forma similar. Debido a que la función de escala básica $\phi(t)$ genera la base ortonormal $\{\phi(t-k)\}$ de V_0 , con un paso de traslación entero, la función de escala dilatada $\phi(t/2)$ generará la base ortonormal $\{\phi(2^{-1}t-k)\}$ de V_1 con un paso de traslación igual a 2, y $\phi(t/4)$ generará la base ortonormal $\{\phi(2^{-2}t-k)\}$ de V_2 con un paso de traslación igual a 4, y así sucesivamente. Existe entonces un conjunto de bases ortogonales de las funciones de escala. Cada base de la función de escala es ortonormal en el espacio de la misma escala:

$$\langle \phi_{i,k}, \phi_{i,n} \rangle = \delta_{k,n} \quad (2.2)$$

para todo k y $n \in \mathbf{Z}$.

Las proyecciones en $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ sobre el conjunto de bases ortonormales de la función de escala, forman un conjunto de subespacios V_i . Cada subespacio V_i es el conjunto de todas las posibles aproximaciones de la función en $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ generado por la base ortonormal de la función de escala $\{\phi(2^{-i}t-k)\}$. El subespacio V_i es abarcado por la base ortonormal de la función de escala en el nivel de resolución i . Por lo tanto, la función de escala $\phi(t)$ genera los subespacios del análisis multiresolución ^[8].

Las aproximaciones de una función $f(t)$ en diferentes resoluciones deben ser similares, ya que son todas generadas por la misma función de escala con escalas diferentes. Los espacios de aproximación V_i pueden ser, entonces, deducidos unos de otros por simple dilatación:

$$f(t) \in V_i \Leftrightarrow f(2t) \in V_{i-1}. \quad (2.3)$$

Toda la información útil para calcular la función de aproximación en el nivel de menor resolución i , está contenida en la función de aproximación en el nivel de mayor resolución $(i-1)$. Entonces, V_i es un subespacio de V_{i-1} ^[2].

2.2 Análisis Multiresolución

El análisis multiresolución es una técnica que permite analizar señales en múltiples bandas de frecuencia. Consiste de una secuencia de subespacios cerrados V_i en $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$:

$$\dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \dots \subset \mathbf{L}^2(\mathbf{R}) \quad (2.4)$$

Cuando la resolución se incrementa con i tendiendo a $-\infty$, la función aproximada debería converger a la función original. Esto es:

$$\overline{\bigcup_i V_i} = L^2(\mathbf{R}), \quad (2.5)$$

Por el contrario, cuando la resolución se decrementa a cero con i tendiendo a $+\infty$, las aproximaciones contienen cada vez menos información y convergen a cero:

$$\bigcap_i V_i = \{0\}, \quad (2.6)$$

con $i \in \mathbf{Z}$ [8].

2.3 Bases Wavelet

Debido a que la proyección de una función sobre la base de la función de escala ortonormal es una aproximación menos detallada de la función en un nivel de resolución particular, se pierde algo de información en el proceso, esto significa que la función de escala ϕ no es completa a cualquier nivel. Por lo tanto, se usan las proyecciones sobre otras funciones, denominadas *wavelet ortonormales* (o simplemente *wavelets*), para obtener la información complementaria de los detalles de la función.

Como se verá más adelante, las wavelets son generadas a partir de la *wavelet madre* $\psi(t)$ por traslaciones y dilataciones discretas

$$\psi_{i,k}(t) = 2^{-i/2} \psi(2^{-i}t - k). \quad (2.7)$$

Cuando la transformada de Fourier $\psi(w)$ de la wavelet madre satisface la condición de ortogonalidad [8], las traslaciones discretas de las wavelet madre $\{\psi(2^{-i}t - k)\}$ forman una base ortonormal para cada escala 2^i . Más aún, en el mismo nivel de resolución, el conjunto de traslaciones wavelet es ortogonal al conjunto de traslaciones de la función de escala en el espacio de la misma resolución

$$\langle \phi_{i,k}, \psi_{i,n} \rangle = 2^{-i} \int \phi_i(t - k) \psi_i(t - n) dt = 0 \quad (2.8)$$

para todo k y $n \in \mathbf{Z}$.

La proyección de $f(t)$ sobre las bases wavelet ortonormales es una correlación entre $f(t)$ y $\psi(t)$ muestreada a intervalos discretos. Las proyecciones de las funciones en $L^2(\mathbf{R})$ sobre la base wavelet ortonormal $\{\psi(2^{-i}t - k)\}$, forman un subespacio W_i . El subespacio W_i es abarcado por $\{\psi(2^{-i}t - k)\}$.

Como la base wavelet $\{\psi(2^{-i}t - k)\}$ es ortogonal a la base de función de escala $\{\phi(2^{-i}t - k)\}$, dentro de la misma escala, el subespacio W_i es el complemento ortogonal del subespacio V_i :

$$W_i \perp V_i \quad (2.9)$$

Tanto V_i como W_i son subespacios de V_{i-1} : $V_i, W_i \in V_{i-1}$ [8], y en razón de que W_i es el complemento ortogonal de V_i , el subespacio V_{i-1} es la suma directa de V_i y W_i :

$$V_{i-1} = V_i \oplus W_i. \quad (2.10)$$

2.3.1 Transformada Wavelet

De manera muy general, la Transformada Wavelet de una función $f(t)$ es la descomposición de $f(t)$ en un conjunto de funciones $\psi_{s,\tau}(t)$, que forman una base y son llamadas las “Wavelets” [8]. La Transformada Wavelet se define como:

$$W_f(s, \tau) = \int f(t) \psi_{s,\tau}^*(t) dt. \quad (2.11)$$

Las Wavelets son generadas a partir de la traslación y cambio de escala de una misma función wavelet $\psi(t)$, llamada la “Wavelet madre”, y se define como:

$$\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right), \quad (2.12)$$

donde s es el factor de escala, y τ es el factor de traslación.

Las wavelets $\psi_{s,\tau}(t)$ generadas de la misma función wavelet madre $\psi(t)$ tienen diferente escala s y ubicación τ , pero tienen todas la misma forma. Se utilizan siempre factores de escala $s > 0$. Las Wavelets son dilatadas cuando la escala $s > 1$, y son contraídas cuando $s < 1$. Así, cambiando el valor de s se cubren rangos diferentes de frecuencias. Valores grandes del parámetro s corresponden a frecuencias de menor rango, o una escala grande de $\psi_{s,\tau}(t)$. Valores pequeños de s corresponden a frecuencias de menor rango o una escala muy pequeña de $\psi_{s,\tau}(t)$ [9].

2.3.2 Wavelets ortonormales y discretas

Cuando la función $f(t)$ es continua y las wavelets son continuas con factor de escala y traslación discretas, la Transformada Wavelet resulta en una serie de coeficientes wavelets, y es llamada la descomposición en Series Wavelet [8].

La función $f(t)$ puede ser reconstruida desde los coeficientes wavelets discretos $W_f(s, \tau)$, de la siguiente manera:

$$f(t) = A \sum_s \sum_\tau W_f(s, \tau) \psi_{s,\tau}(t), \quad (2.13)$$

donde A es una constante que no depende de $f(t)$.

A estas funciones wavelets continuas con factores de escala y traslación discretos se las denomina *Wavelets discretas* ^[8]. Los factores de escala y traslación de las wavelets discretas pueden ser expresados como:

$$s = s_0^i \quad \text{y} \quad \tau = k \tau_0 s_0^i, \quad (2.14)$$

donde el exponente i y la constante k son enteros, y $s_0 > 1$ es un paso fijo de dilatación.

El factor de traslación τ depende del paso de dilatación s , Ec. (2.14). Entonces, a partir de la Ec. (2.12) y con la Ec. (2.14), las correspondientes wavelets discretas quedan expresadas como:

$$\psi_{i,k}(t) = s_0^{-i/2} \psi(s_0^{-i}(t - k \tau_0 s_0^i)) = s_0^{-i/2} \psi(s_0^{-i}t - k \tau_0) \quad (2.15)$$

A través de la Ec. (2.11), la Transformada Wavelet de una función continua es realizada a frecuencias y tiempos discretos que corresponden a muestreos con distintas traslaciones (tiempo) y distintas dilataciones (o cambios de escala).

El paso de muestreo en tiempo es pequeño para el análisis utilizando wavelets de pequeña escala, mientras que es grande para el análisis con wavelets de gran escala. La posibilidad de variar el factor de escala s permite usar wavelets de escala muy pequeña para concentrar el análisis en singularidades de la señal. Cuando solo los detalles de la señal son de interés, unos pocos niveles de descomposición son necesarios. Por lo tanto el análisis wavelet provee una forma más eficiente de representar señales transitorias.

A modo de ejemplo, podemos hacer una analogía entre el análisis de Wavelet y el microscopio. Así, el factor de escala s_0^i corresponde al aumento o resolución del microscopio y el factor de traslación τ corresponde a la ubicación donde se hace la observación con el microscopio. Si queremos mirar detalles muy pequeños, el aumento y la resolución deben ser grandes, lo que se corresponde con un i grande y negativo. Esto da lugar a una función wavelet muy concentrada, y a pasos de traslación pequeños. Para un valor de i grande y positivo, la wavelet se extiende y los pasos de traslación son adaptados a esa amplitud ^[8].

Eligiendo adecuadamente $\psi(t)$ y los parámetros s_0 , τ_0 , es posible lograr que las funciones $\psi_{s,\tau}(t)$ constituyan una base ortonormal de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$. En particular si se elige $s_0 = 2$ y $\tau_0 = 1$, entonces existe $\psi(t)$, con buenas propiedades de localización tiempo–frecuencia, tal que $\psi_{s,\tau}(t)$ constituye una base ortonormal $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ ^[9].

De esta forma, si las funciones wavelets discretas forman una base ortonormal, una función $f(t)$ de soporte finito puede ser reconstruida como una suma de los coeficientes wavelets discretos $W_f(s, \tau)$ multiplicados por las funciones de la base, como sigue:

$$f(t) = \sum_s \sum_\tau W_f(s, \tau) \psi_{s, \tau}(t). \quad (2.16)$$

Una descomposición wavelet ortonormal no posee información redundante y representa la señal en forma unívoca. Una base wavelet ortonormal es posible con wavelets con factores de traslación y dilatación discretos^[8]. Por lo tanto, para estas funciones wavelets discretas ortogonales, los productos internos son iguales a cero:

$$\int \psi_{i,k}^*(t) \psi_{m,n}(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{si } i = m \text{ y } k = n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.17)$$

En 1986 Meyer y Mallat^[8] demostraron que la descomposición y reconstrucción wavelet ortonormal podrían ser implementadas en el marco del análisis multiresolución de señales.

2.3.3 Relación dos-escala

Con sus traslaciones discretas, las funciones de escala y las de wavelets forman dos bases ortonormales en cada nivel de resolución. Las funciones de escala y las wavelets en múltiples niveles de resolución son la versión dilatada de la función de escala básica y de la wavelet madre, respectivamente.

Sea $\phi(t)$ la función de escala básica cuyas traslaciones generan el subespacio V_0 . Entonces $\phi(t)$ puede ser expresada como combinación lineal de la suma ponderada del conjunto $\{\phi(2t-k)\}$ generado por $\phi(2t)$. Así las funciones de escala en dos niveles de resolución adyacentes satisfacen la relación dos-escala:

$$\phi(t) = \sum_k p(k) \phi(2t - k), \quad (2.18)$$

que puede ser considerada como la proyección de la función $\phi(t) \in V_0$ en el subespacio de mayor resolución V_{-1} . Esta relación es la ecuación fundamental en el análisis multiresolución. La secuencia $p(k)$ es el *coeficiente interescala*, correspondiente a un filtro discreto paso-bajo^[8].

Sea $\psi(t) \in V_0$ la wavelet madre, la cual puede ser desarrollada en la base ortonormal de la función de escala $\{\phi(2t-k)\}$ en V_{-1} como:

$$\psi(t) = \sum_k q(k) \phi(2t - k), \quad (2.19)$$

donde la secuencia $q(k)$ es el coeficiente de interescala, correspondiente a un filtro discreto paso-alto^[8]. Esta relación dos-escala permite generar las wavelets a partir de las funciones de escala.

En el lado izquierdo de las relaciones (2.18) y (2.19), $\phi(t)$ y $\psi(t)$ son continuas. En el lado derecho de las relaciones, los coeficientes interescala, $p(k)$ y $q(k)$, son discretos.

2.3.4 Algoritmo Piramidal. Descomposición Wavelet

Sea la función $f(t) \in V_0$ que puede ser representada como la combinación lineal de las funciones de escala trasladadas $\phi(t-k)$ en V_0

$$f(t) = \sum_k c_0(k) \phi(t-k), \quad (2.20)$$

con los coeficientes

$$c_0(k) = \langle f, \phi_{0,k} \rangle = \int f(t) \phi(t-k) dt. \quad (2.21)$$

La función a ser analizada pertenece a V_0 , el cual corresponde al nivel de digitalización inicial al comenzar la descomposición. En el siguiente nivel de menor resolución $i = 1$, existen dos subespacios mutuamente ortogonales $\{\phi_{i,k}(t)\}$ y $\{\psi_{i,k}(t)\}$, respectivamente. Debido a que V_0 es la suma directa de V_1 y W_1 , existe una única forma de expresar una función $f(t) \in V_0$, como combinación lineal de funciones v_1 y w_1 , donde $v_1 \in V_1$ y $w_1 \in W_1$. En particular, la función $f(t) \in V_0$ puede descomponerse en sus componentes a lo largo de V_1 y W_1 :

$$f = (P_1 + Q_1)f, \quad (2.22)$$

donde las dos componentes son las proyecciones ortonormales de $f(t)$ sobre V_1 y W_1 :

$$(a) \quad P_1 f = \sum_n c_1(n) \phi_{1,n}, \quad (2.23)$$

$$(b) \quad Q_1 f = \sum_n d_1(n) \psi_{1,n}.$$

Multiplicando ambos lados de la Ec. (2.22) por $\phi_{1,k}$ y calculando los productos internos, se obtiene:

$$\langle \phi_{1,k}, f \rangle = \langle \phi_{1,k}, P_1 f \rangle. \quad (2.24)$$

Haciendo lo mismo en la Ec. (2.23 (a)) pero multiplicando por $\phi_{1,n}$ y usando la Ec. (2.20), se obtiene:

$$\begin{aligned} c_1(k) &= \langle \phi_{1,k}, f \rangle = \langle \phi_{1,k}, P_1 f \rangle \\ &= \sum_n \langle \phi_{1,k}, \phi_{0,n} \rangle c_0(n) \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde el producto interno entre los dos conjuntos de la función de escala $\{\phi_{1,k}\}$ y $\{\phi_{0,n}\}$ se puede calcular como

$$\begin{aligned} \langle \phi_{1,k}, \phi_{0,n} \rangle &= 2^{-1/2} \int \phi\left(\frac{t}{2} - k\right) \phi(t - n) dt \\ &= 2^{1/2} \int \phi(t) \phi(2t - (n - 2k)) dt. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Sustituyendo $\phi(t)$ por la relación dos-escala en la Ec. (2.26) y usando la ortonormalidad del conjunto $\{\phi(2t)\}$ se obtiene

$$c_1(k) = 2^{-1/2} \sum_n p(n - 2k) c_0(n). \quad (2.27)$$

La secuencia $c_1(k)$ o *tendencia* contiene los coeficientes del desarrollo de la función continua $f(t)$ en la base de la función de escala continua $\{\phi_{1,k}\}$ en V_1 . La secuencia $c_1(k)$ representa la versión suavizada de los datos originales $c_0(n)$.

Simultáneamente, multiplicando ambos lados de las Ec. (2.22) y (2.23 (b)) por la wavelet $\psi_{1,n}$ y calculando los productos internos, se obtiene:

$$\begin{aligned} d_1(k) &= \langle \psi_{1,k}, Q_1 f \rangle = \langle \psi_{1,k}, f \rangle \\ &= \sum_n \langle \psi_{1,k}, \phi_{0,n} \rangle c_0(n), \end{aligned} \quad (2.28)$$

y siguiendo los pasos aplicados para la obtención de $c_1(k)$ se llega a que:

$$d_1(k) = 2^{-1/2} \sum_n q(n - 2k) c_0(n). \quad (2.29)$$

De acuerdo con la Ec. (2.22), la proyección ortonormal $Q_i f$ sobre W_1 es la información de *detalle* de $f(t)$. La secuencia $d_1(n)$ representa la diferencia entre la $f(t)$ original y la aproximación $P_1 f$, y se conoce como los *coeficientes wavelet discretos*.

La descomposición en aproximaciones suavizadas y detalles a menor resolución se puede continuar tanto como se desee.

Generalizando,

$$\begin{aligned} P_{i-1} f &= P_i f + Q_i f = \sum_k c_i(k) \phi_{i,k} + \sum_k d_i(k) \psi_{i,k}, \\ c_i(k) &= 2^{-1/2} \sum_n p(n-2k) c_{i-1}(n), \\ d_i(k) &= 2^{-1/2} \sum_n q(n-2k) c_{i-1}(n). \end{aligned} \tag{2.30}$$

La secuencia $c_i(n)$ y $d_i(n)$ pueden ser calculadas a partir de $c_{i-1}(n)$ por filtrado iterativo.

De esta manera, iterando hasta un nivel de resolución M , donde M toma un valor determinado, se puede representar la función original $f(t)$ por una serie de funciones detalle más una aproximación gruesa:

$$\begin{aligned} f(t) &= P_M f + Q_M f + Q_{M-1} f + \dots + Q_1 f, \\ f(t) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} 2^{-M/2} c_M(k) \phi(2^{-M} t - k) + \sum_{i=1}^M \sum_{k \in \mathbf{Z}} 2^{-i/2} d_i(k) \psi(2^{-i} t - k). \end{aligned} \tag{2.31}$$

La Ec. (2.31) es la descomposición $f(t)$ en Series Wavelet ^[8]. En esta descomposición wavelet las bases de la función de escala y las *bases wavelet* son todas continuas. Los coeficientes de aproximación $c_M(k)$ y los *coeficientes wavelet* $d_i(k)$ con $i = 1, 2, \dots, M$ y $k \in \mathbf{Z}$ son discretos.

Los coeficientes $c_1(n)$ y $d_1(n)$ se pueden calcular con un algoritmo discreto implementado por la aplicación recursiva de filtros discretos paso-alto y paso-bajo a las aplicaciones discretas $c_{i-1}(n)$. Este algoritmo es conocido como algoritmo piramidal o de Mallat. Los dos primeros pasos del algoritmo para calcular la descomposición wavelet se muestran en la Figura 2.1

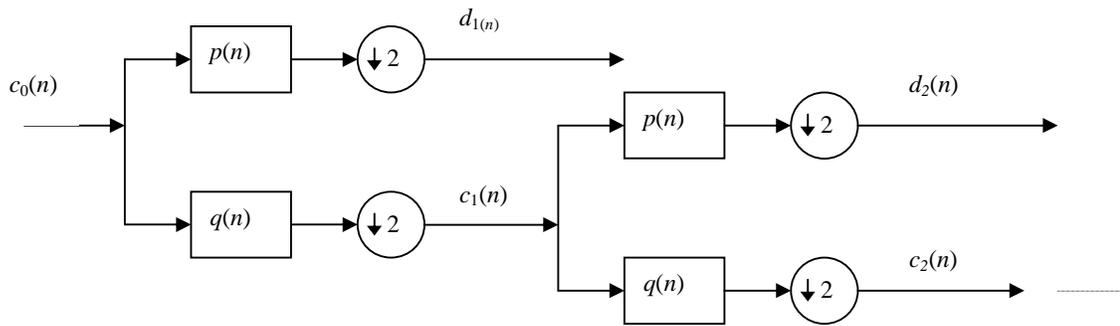


Figura 2.1: Esquema de la descomposición en Series Wavelet, con el algoritmo de árbol.

2.3.5 Algoritmo Piramidal. Reconstrucción

La secuencia de la señal original $c_0(n)$ puede ser reconstruida a partir de las secuencias de coeficientes de aproximación $c_i(n)$ y de los *coeficientes wavelet* $d_i(n)$ con $0 < i \leq M$, donde $i = M$ es la menor resolución en la descomposición [8].

La aproximación discreta $c_{i-1}(n)$ en el próximo nivel de mayor resolución puede ser obtenida como la suma de dos convoluciones, una entre la aproximación discreta $c_i(n)$ y el filtro paso-bajo $p(n)$ y otra entre los *coeficientes wavelet* $d_i(n)$ y el filtro paso-alto $q(n)$,

$$\begin{aligned}
 c_{i-1}(n) &= \langle P_{i-1}f, \phi_{i-1,n} \rangle \\
 &= \sum_k c_i(k) \langle \phi_{i,k}, \phi_{i-1,n} \rangle + \sum_k d_i(k) \langle \psi_{i,k}, \phi_{i-1,n} \rangle \\
 &= 2^{-1/2} \sum_k c_i(k) p(n-2k) + 2^{-1/2} \sum_k d_i(k) q(n-2k),
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

Como se muestra en la Figura 2.2. El proceso puede continuar hasta que la secuencia original $c_0(n)$ es reconstruida.

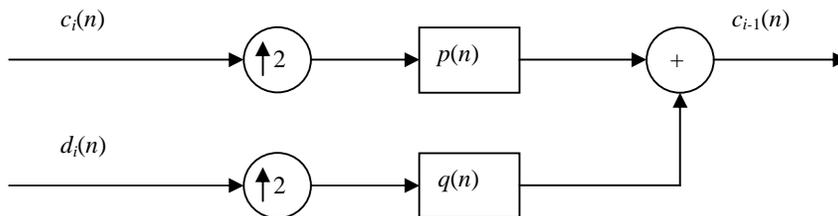


Figura 2.2: Esquema de la reconstrucción Wavelet.

2.4 Transformada Wavelet en dos dimensiones

La *Transformada Wavelet* continua puede ser extendida al caso de dos dimensiones para aplicaciones de procesamiento de imágenes. La *Transformada Wavelet* de una imagen bidimensional $f(x,y)$ es:

$$W_f(s_x, s_y; u, v) = \frac{1}{\sqrt{s_x s_y}} \iint f(x, y) \psi\left(\frac{x-u}{s_x}; \frac{y-v}{s_y}\right) dx dy, \quad (2.33)$$

la cual es una función en cuatro dimensiones. Esta es reducida a un conjunto de funciones bidimensionales de (u, v) con diferentes escalas cuando los factores de escala son tales que $s_x = s_y = s$.

La *Transformada Wavelet* ortogonal multiresolución en dos dimensiones se calcula por proyecciones recursivas sobre las bases de la función de escala y las bases *wavelet*, como en el caso unidimensional.

Consideremos el modelo wavelet basado en una función de escala separable

$$\phi(x, y) = \phi(x)\phi(y), \quad (2.34)$$

donde $\phi(x)$ y $\phi(y)$ son funciones de escala unidimensionales. Las traslaciones discretas de $\phi(x)$ y $\phi(y)$ dilatadas generan los subespacios de aproximación multiresolución separables V_i como en el caso unidimensional. La proyección ortogonal de una imagen $f(x, y)$ sobre el conjunto de la función de escala en un nivel de resolución i es, por lo tanto, el producto interno

$$c_i(x, y) = \langle f(x, y), \phi_i(x)\phi_i(y) \rangle, \quad (2.35)$$

la cual es una aproximación de $f(x, y)$ en un nivel de menor resolución.

Como en el caso unidimensional, se generan las wavelets $\psi(x)$ y $\psi(y)$ a partir de las funciones de escala $\phi(x)$ y $\phi(y)$, tales que el conjunto de traslaciones discretas de $\psi(x)$ y de $\psi(y)$ es ortogonal al conjunto de traslaciones discretas de $\phi(x)$ y $\phi(y)$, respectivamente. Entonces se definen tres *wavelets* bidimensionales como

$$\begin{aligned} \psi^1(x, y) &= \phi(x) \psi(y) \\ \psi^2(x, y) &= \psi(x) \phi(y) \\ \psi^3(x, y) &= \psi(x) \psi(y) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Las diferencias de información entre las aproximaciones $c_i(x,y)$ y $c_{i+1}(x,y)$ en dos niveles adyacentes de resolución son iguales a las proyecciones ortogonales de $f(x,y)$ sobre las tres bases wavelets, resultando tres imágenes detalles:

$$\begin{aligned}d_i^1(x, y) &= \langle f, \psi^1 \rangle \\d_i^2(x, y) &= \langle f, \psi^2 \rangle \\d_i^3(x, y) &= \langle f, \psi^3 \rangle.\end{aligned}\tag{2.37}$$

En dos dimensiones, la descomposición wavelet con funciones de escala y wavelet separables se puede calcular con el algoritmo de árbol usando los filtros $p(n)$ y $q(n)$, de manera similar al algoritmo unidimensional ^[8].

2.5 Análisis tiempo-frecuencia

El objetivo del análisis multiresolución es expandir una señal en una base de funciones cuyas propiedades tiempo-frecuencia se adapten a la estructura local de la señal. La Transformada Wavelet permite obtener el desarrollo de una señal en una base ortonormal de funciones wavelets, las cuales tienen propiedades de localización en tiempo y frecuencia similares a la Transformada de Fourier con Ventana.

En todos los casos anteriores, el patrón de descomposición del plano tiempo-frecuencia está predeterminado por la elección de las funciones de la base.

Resumen

En este capítulo hemos presentado la Transformada Wavelet de una función $f(x)$ en una dimensión y su extensión a dos dimensiones para aplicaciones de procesamiento de imágenes. La Transformada Wavelet es la descomposición de $f(x)$ en una base de funciones formada por la traslación y dilatación de una misma función, la función de escala.

La descomposición de funciones y su reconstrucción puede ser computada mediante el algoritmo piramidal donde, en cada nivel de resolución, la función se descompone en una aproximación *detalle* más una aproximación gruesa llamada *tendencia*.

En el próximo capítulo estudiaremos el algoritmo y el comportamiento de la Transformada Wavelet en el caso particular del análisis de imágenes.

ALGORITMO DE LA TRANSFORMADA WAVELET PIRAMIDAL

Introducción

En este capítulo describiremos el algoritmo mediante el cual se calcula la Transformada Wavelet discreta con estructura piramidal, en primer lugar para el caso unidimensional y luego su generalización al caso bidimensional utilizando las bases ortonormales de Daubechies.

3.1 Transformada Wavelet Piramidal. Algoritmo

A diferencia de la Transformada de Fourier, la Transformada Wavelet se puede implementar sobre numerosas bases. Las diferentes categorías de wavelets (continuas, discretas, ortogonales, etc.) y los varios tipos de funciones wavelets dentro de cada categoría proveen una gran cantidad de opciones para analizar una señal de interés. Esto permite elegir la base de funciones cuya forma se aproxime mejor a las características de la señal que se desea representar o analizar.

En particular, para este trabajo se emplearon las *bases wavelet de Daubechies* en la Transformada Wavelet para el procesamiento digital y análisis de imágenes, las cuales tienen la propiedad de formar una base ortonormal y poseen soporte compacto. Por esta razón, son adecuadas para el análisis de señales con soporte finito (por ejemplo: notas musicales, electrocardiogramas, sismogramas, etc.) y en particular para el análisis y procesamiento de imágenes.

Debido a la condición de ortonormalidad, se asegura la independencia de la representación de la señal en los diferentes niveles de descomposición, es decir, que no se genera información redundante de la señal, y así, se evita la aparición de información falsa. Además, las bases de Daubechies permiten calcular la Transformada Wavelet mediante un algoritmo menos complejo, con un bajo costo computacional y numéricamente estable (los cálculos realizados son confiables dentro de la precisión numérica del procesador), lo cual las hace eficientes frente a las bases no ortonormales.

En el cálculo práctico de la Transformada Wavelet ortonormal, mediante bases wavelet de Daubechies se utiliza un conjunto de filtros discretos paso-bajo y paso-alto, $p(n)$ y $q(n)$. De esta forma, dado un vector de datos de longitud igual a un número entero potencia de dos, la descomposición y reconstrucción wavelet ortonormal se implementa con el algoritmo piramidal iterando estos filtros ^[8] (**Fig. 2.1**).

Los filtros periódicos $p(n)$ y $q(n)$, son filtros de soporte compacto con un número finito N de coeficientes distintos de cero, es decir, el grado de los filtros es $(N-1)$. Por lo tanto, los dos conjuntos de filtros forman una matriz de $2 \times N$:

$$\begin{vmatrix} p(0) & p(1) & \dots & p(N-1) \\ q(0) & q(1) & \dots & q(N-1) \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

la cual es utilizada en el algoritmo de descomposición.

Debido a la ortogonalidad de los filtros, el filtro paso-alto $q(n)$ es obtenido a partir del filtro paso-bajo $p(n)$:

$$q(n) = (-1)^n p(N-1-n). \quad (3.2)$$

Así, la matriz (3.1) puede ser expresada en función del filtro $p(n)$

$$\begin{vmatrix} p(0) & p(1) & \dots & p(N-1) \\ p(N-1) & -p(N-2) & \dots & p(0) \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

y es llamada la *matriz de transformada wavelet*. Esta matriz se utilizará para obtener la matriz final a ser empleada en el algoritmo de descomposición, como se describe a continuación.

Para una base de Daubechies los coeficientes de filtro cumplen las siguientes relaciones algebraicas^[9]:

$$\sum_{m=0}^{N-1} p(m) = \sqrt{2}, \quad (3.4)$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} p(m) p^*(m+2k) = \delta(k,0) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{N-1} |p(m)|^2 & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \neq 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\sum_{m=0}^{N-1} (-1)^m m^k p(N-1-m) = 0 \quad 0 \leq k \leq p-1, \quad (3.6)$$

donde $p = N/2$.

Ejemplo:

En este ejemplo mostraremos esquemáticamente cómo se aplica el algoritmo de árbol para descomposición Wavelet con una base DAUB4.

Descomposición y reconstrucción de un vector utilizando la Transformada Wavelet de Daubechies con $N = 4$ (DAUB4) y $p = 2$:

Las funciones de la base de Daubechies no están dadas en forma analítica. Los valores de los coeficientes están tabulados^[8], siendo los correspondientes a DAUB4:

$$\begin{aligned}
 p(0) &= \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3})/\sqrt{2} = 0.483, \\
 p(1) &= \frac{1}{4}(3 + \sqrt{3})/\sqrt{2} = 0.836, \\
 p(2) &= \frac{1}{4}(3 - \sqrt{3})/\sqrt{2} = 0.224, \\
 p(3) &= \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3})/\sqrt{2} = -0.13,
 \end{aligned}$$

los cuales son la única solución a las Ec. (3.4), (3.5) y (3.6) para los cuatro filtros DAUB4:

$$p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = \sqrt{2},$$

$$p(0)^2 + p(1)^2 + p(2)^2 + p(3)^2 = 1,$$

$$p(0)p(2) + p(3)p(1) = 0,$$

$$p(3) - p(2) + p(1) - p(0) = 0,$$

$$0p(3) - 1p(2) + 2p(1) - 3p(0) = 0.$$

Por la Ec (3.2) los filtros paso-alto $q(n)$ son:

$$q(0) = p(3), \quad q(1) = -p(2), \quad q(2) = p(1) \quad \text{y} \quad q(4) = -p(0).$$

Dado el vector de los datos inicial $f(n)$ se puede generar la matriz de Transformada Wavelet con los filtros de traslación discretos. Si la longitud del vector de datos de entrada es L , se construye una matriz de Transformada Wavelet de tamaño $L \times L$, formada por repeticiones de la matriz (3.3) de los conjuntos de filtros $p(n)$ y $q(n)$. Las filas impares corresponden a los filtros paso-bajo $p(n)$ y, en cada fila impar, los filtros paso-bajo $p(n)$ son trasladados dos columnas con respecto a la fila impar anterior. Asimismo, las filas pares corresponden a los filtros paso-alto $q(n)$ que son trasladados dos columnas con respecto a la fila par anterior (Fig. 3-1).

$$\begin{pmatrix} c(1) \\ d(1) \\ c(2) \\ d(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) & p(2) & p(3) & \cdot \\ p(3) & -p(2) & p(1) & -p(0) & \cdot \\ \cdot & \cdot & p(0) & p(1) & p(2) & p(3) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & p(3) & -p(2) & p(1) & -p(0) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & p(0) & p(1) & p(2) & p(3) \\ \cdot & p(3) & -p(2) & p(1) & -p(0) \\ \cdot & p(2) & p(3) & \cdot & p(0) & p(1) \\ \cdot & p(1) & -p(0) & \cdot & p(3) & -p(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(L) \end{pmatrix}$$

Figura 3-1: Al multiplicar el vector de datos iniciales $f(n)$, de longitud L , por la matriz de Transformada Wavelet se obtiene un vector con los coeficientes $c(n)$ y $d(n)$ intercalados

Una vez construida la matriz de Transformada Wavelet, se la multiplica por el vector columna de datos $f(n)$ (Fig. 3-1). De este producto resultan dos correlaciones, una entre el vector de datos $f(n)$ y los filtros $p(n)$ y otra entre el vector de datos $f(n)$ y los filtros $q(n)$, dando por resultado la aproximación discreta $c(n)$ y los coeficientes wavelet discretos $d(n)$, respectivamente. Entonces, la descomposición wavelet discreta es calculada aplicando la matriz de Transformada Wavelet primero al vector $f(n)$ y luego, en cada iteración, a los coeficientes de aproximación $c(n)$. Como en cada iteración el vector salida queda compuesto por los coeficientes $c(n)$ y $d(n)$ intercalados, se debe realizar una permutación de éste para poder continuar con el algoritmo y obtener el siguiente nivel de descomposición, como se muestra en la Fig. 3-2, donde $L = 16$.

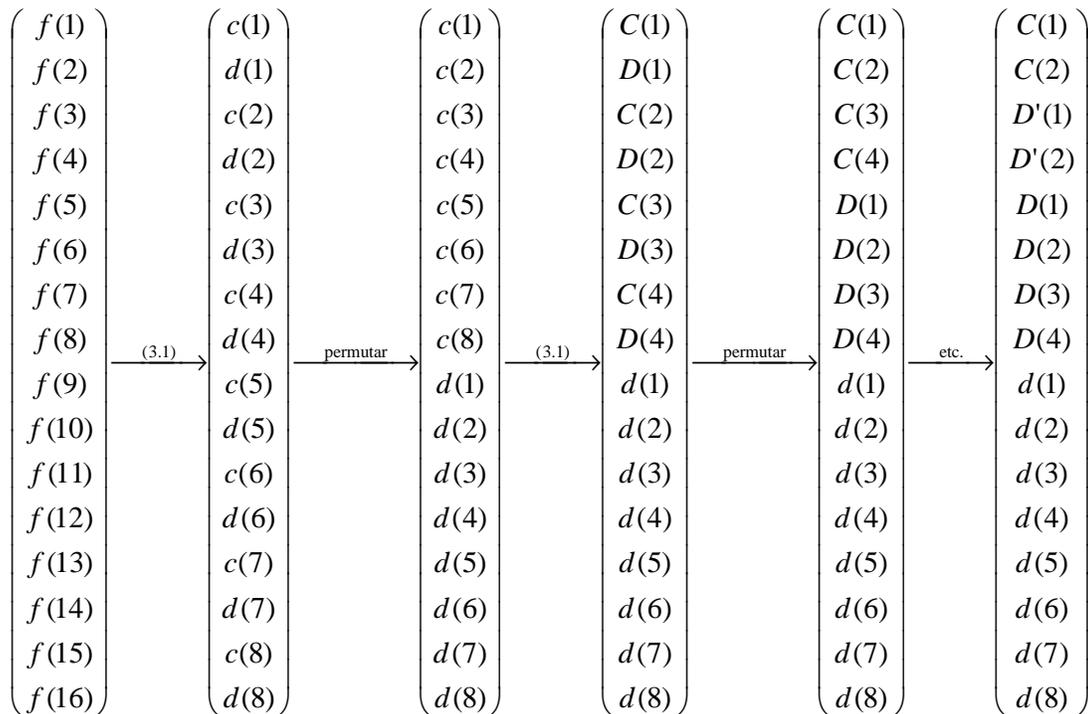


Figura 3-2: Esquema de los distintos niveles del algoritmo piramidal para obtener los coeficientes del desarrollo Wavelet con DAUB4, donde (3.1) indica que se aplica la operación de la **Figura 3-1**.

Si la longitud del vector de datos es $N > 16$ (DAUB4), el vector de salida en el nivel de resolución mas bajo será siempre un vector con dos coeficientes de aproximación $C(1)$ y $C(2)$ y una jerarquía de coeficientes wavelets $D'(1)$, $D'(2)$ resultantes del nivel de resolución más bajo, $D(1)-D(4)$ para el nivel de resolución más alto, y $d(1)-d(8)$ para nivel de resolución aún más alto, y así sucesivamente (ver Fig. 3-2). Se puede observar que, una vez que los coeficientes wavelet d' son generados, simplemente se propagan a través de todos los pasos subsecuentes. El mismo algoritmo es usado para calcular los coeficientes wavelet con respecto a otras wavelets, tal como DAUB6, DAUB8, etc. La cantidad de posibles iteraciones

a realizar dependerá de la cantidad de coeficientes de la wavelet utilizada y la longitud del vector de datos.

La reconstrucción wavelet discreta puede ser calculada por un procedimiento inverso al procedimiento de descomposición comenzando por el nivel de resolución más bajo en la jerarquía y trabajando de derecha a izquierda con el diagrama de la Fig. 3-2, utilizando la matriz de Transformada Wavelet inversa (Fig. 3-3) en lugar de la matriz de Transformada Wavelet.

Como la matriz de Transformada Wavelet es ortonormal su inversa es la matriz traspuesta:

$$\begin{pmatrix} p(0) & p(3) & \cdot & p(2) & p(1) \\ p(1) & -p(2) & \cdot & p(3) - p(0) & \cdot \\ p(2) & p(1) & p(0) & p(3) & \cdot \\ p(3) & -p(0) & p(1) & -p(2) & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & p(2) & p(1) & p(0) & p(3) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & p(3) & -p(0) & p(1) & -p(2) & \cdot & \cdot \\ \cdot & p(2) & p(1) & p(0) & p(3) \\ \cdot & p(3) & -p(0) & p(1) - p(2) & \cdot \end{pmatrix}$$

Figura 3-3: Inversa de la Transformada Wavelet.

3.1.1 Funciones de Daubechies

Como mencionamos anteriormente para realizar este trabajo utilizamos las bases wavelets de Daubechies. Esta clase incluye un rango de funciones que se extiende desde funciones altamente localizadas a funciones altamente suavizadas. Dentro de esta clase implementamos DAUB4, DAUB6, DAUB8, etc., hasta DAUB20, donde el número de Daubechies indica la cantidad de coeficientes distintos de cero. Por lo tanto, la más simple y más localizada es DAUB4, que tiene solo cuatro coeficientes no nulos. La decisión con respecto a cuál base de Daubechies es la más conveniente debe basarse en la forma de la señal a analizar, eligiendo la wavelet de Daubechies cuya forma más se le aproxime. Esto es, se debe utilizar la wavelet que provea la mejor descripción de la señal con el menor número de coeficientes no nulos.

3.1.2 Número de operaciones

Consideremos ahora el número de operaciones requerido para la Transformada Wavelet ortonormal de un vector de datos. Sea L la longitud del vector de datos y N la longitud de los filtros $p(n)$ y $q(n)$. En la banda de frecuencia más alta, el primer paso de descomposición requiere $2NL$ multiplicaciones y sumas. En el algoritmo piramidal, en la siguiente banda de frecuencia más ancha la longitud del vector de aproximación discreta $c(n)$,

está reducida a $N/2$. Por lo tanto, el próximo paso de descomposición requiere $2(NL/2)$ multiplicaciones y sumas.

El total de operaciones de la descomposición wavelet ortonormal es:

$$2\left(NL + \frac{NL}{2} + \frac{NL}{4} + \dots\right) = 2NL\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) \cong 4NL. \quad (3.8)$$

De esta forma la Transformada Wavelet ortonormal requiere sólo $O(L)$ operaciones. Esto es todavía más rápido que la Transformada de Fourier, la cual requiere $O(L \log_2 L)$ multiplicaciones y sumas.

3.1.3 Transformada Wavelet bidimensional

En dos dimensiones la descomposición wavelet de una función $f(x,y)$ puede calcularse con un algoritmo similar al descrito anteriormente. Para el caso de procesamiento de imágenes, la imagen original constituye la matriz de datos inicial $c_0(x,y)$ (Fig. 3-4 (a)).

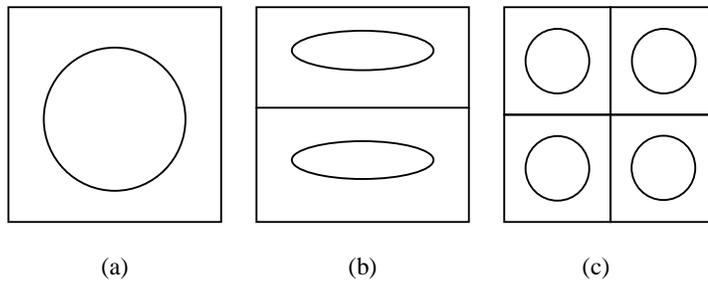


Figura 3-4: Pasos del proceso de descomposición de una imagen. (a) Imagen original. (b) Descomposición en dirección vertical. (c) Descomposición de (b) en dirección horizontal (Resultado final)

En cada nivel i de resolución se calcula la correlación entre las filas de $c_{i-1}(x,y)$ y los filtros unidimensionales $p(n)$ y $q(n)$ en la dirección vertical, resultando dos imágenes compuestas, cada una por la mitad de las filas de la matriz (Fig. 3-4 (b)). Luego se calcula la correlación entre estas imágenes y los filtros $p(n)$ y $q(n)$ en la dirección horizontal resultando, de cada una, dos imágenes compuestas por la mitad de las columnas (Fig. 3-4 (c)). Estas cuatro subimágenes resultantes constituyen las tres imágenes *detalle* y la imagen aproximación (*tendencia* o residuo)^[4].

El proceso es ejecutado con un algoritmo piramidal como se muestra en la Fig. 3-5:

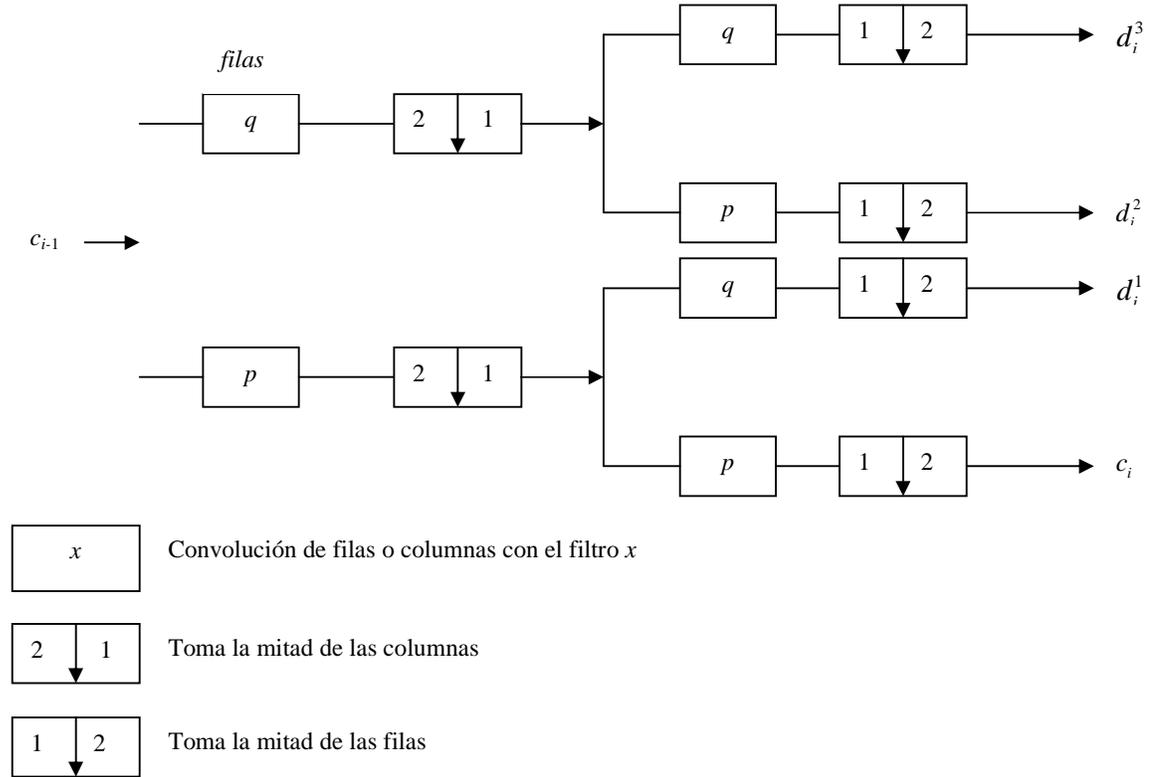


Figura 3-5: Esquema de la descomposición Wavelet en dos dimensiones, con filtros $p(n)$ y $q(n)$.

Si la imagen original tiene L^2 pixeles, cada imagen $c_i(x,y)$, $d_i^1(x,y)$, $d_i^2(x,y)$ y $d_i^3(x,y)$ tiene $(L/2^i)^2$ pixeles ($i > 0$). Entonces, el número total de pixeles de una representación wavelet ortonormal sigue siendo L^2 , es decir, la Transformada Wavelet no incrementa el volumen de datos.

La Fig. 3-6 muestra la descomposición de las tres imágenes detalle y la imagen tendencia en los niveles de resolución 1, 2, 3.

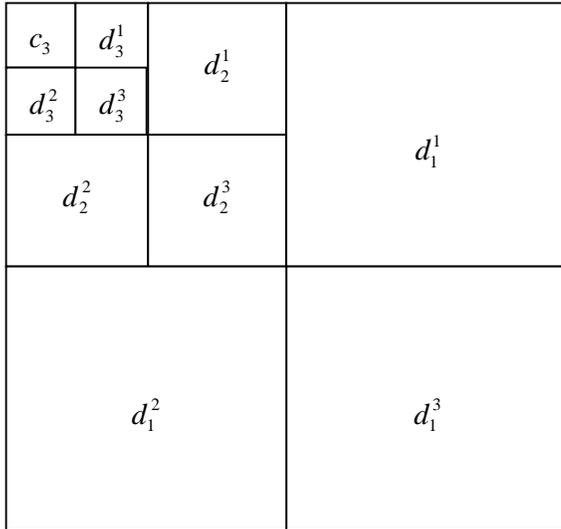


Figura 3-6: Esquema de la descomposición Wavelet piramidal en dos dimensiones.

Al igual que en el caso unidimensional, una vez obtenida la matriz con las imágenes detalle y la imagen tendencia, se puede aplicar a éstas el algoritmo inverso para reconstruir la imagen original $c_0(x,y)$. Ahora bien, si se aplica el algoritmo de reconstrucción solo a los coeficientes wavelet de un determinado nivel de resolución (por ejemplo, $d_i^1(x, y)$, $d_i^2(x, y)$ y $d_i^3(x, y)$), haciendo cero el resto de la matriz, se puede reconstruir cualquier nivel de detalle (por ejemplo $d_1(x,y)$). De la misma manera, si se aplica el algoritmo de reconstrucción sólo a los coeficientes de aproximación $c_p(x,y)$, haciendo cero el resto de la matriz se puede reconstruir la tendencia. Cada imagen detalle $d_i(x,y)$ resulta de tres componentes independientes en el dominio wavelet que dan cuenta de los detalles de la imagen original, en el nivel i correspondiente, en las direcciones vertical $d_i^1(x, y)$, horizontal $d_i^2(x, y)$, y diagonal $d_i^3(x, y)$, respectivamente.

Cada imagen $d_i(x,y)$ resultante contiene una banda limitada del espectro de frecuencias originales: específicamente, $d_1(x,y)$ y $c_1(x,y)$ contienen respectivamente la mitad más alta y más baja del espectro de frecuencias de la imagen original y $d_2(x,y)$ contiene la mitad más alta del espectro de frecuencias de $c_1(x,y)$. Continuando con este proceso resulta:

$$c_0(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y) + \dots + d_p(x,y) + c_p(x,y) . \tag{3.9}$$

La interpretación de esta expresión, en términos de imágenes, es que los detalles del “fino al grueso” de la imagen están contenidos en $d_1(x,y)$, ..., $d_p(x,y)$, y $c_p(x,y)$ es el residuo de la imagen original $c_0(x,y)$ ^[2].

A continuación mostraremos, mediante un ejemplo, el comportamiento de la Transformada Wavelet piramidal, aplicando el algoritmo de descomposición a varias imágenes haciendo visibles detalles que son imperceptibles al ojo humano.

3.2 Comportamiento de la Transformada Wavelet Piramidal

En lo que respecta a su sensibilidad, el ojo humano se comporta de acuerdo a la Ecuación de Weber. Esta ley empírica afirma que para que un detalle (o región R) pueda ser diferenciado visualmente con respecto a su entorno en una imagen, el cociente entre el valor absoluto de la variación de intensidad $|\Delta I|$ entre R y su entorno, y la intensidad del entorno (I_e), no debe ser menor que una constante c . Dicha constante generalmente toma el valor 0,02. Es decir, debe cumplirse:

$$\frac{|\Delta I|}{I_e} \geq c \quad (3.10)$$

para que la región R pueda ser diferenciada de su entorno a simple vista.

De esta manera, si el entorno $I_e = 100$, y $c = 0,02$, por ejemplo, entonces el ojo humano solo podrá percibir las diferencias de tono entre una región de interés y este entorno cuando la diferencia entre ambos $|\Delta I|$ supere, en valor absoluto, el valor 2. Así, cuando mayor es el nivel de gris de una región, mayor debe ser la diferencia entre ésta y su entorno para poder ser distinguida.

Para ejemplificar lo anteriormente expuesto, mostraremos el análisis de dos imágenes que contienen una serie de puntos enmascarados. Estos ejemplos fueron tomados de trabajos desarrollados anteriormente ^[2], en ellos las imágenes estudiadas fueron digitalizadas en 8 bits en escala de grises (256 tonos de gris) y no presentan ningún tipo de **distorsión estadística**, esto es, son imágenes generadas numéricamente, sin ruidos, las cuales llamaremos *perfectas*.

La primera es una imagen de fondo liso, con un tono de gris de valor medio (valor = 125) sobre el que se superpusieron, en una ubicación arbitraria, tres objetos. Uno de estos objetos tienen un tamaño de un pixel de tono 128. El segundo objeto está formado por un conjunto de cuatro pixeles adyacentes con una intensidad levemente superior al fondo (tres de valor = 128 y uno de valor = 130). Por último, el tercer objeto es un cuadrado de 8×8 pixeles de valor = 130 (Imagen 3-1 (a)). Al aplicar a esta imagen el algoritmo de descomposición Wavelet con DAUB12 y DAUB20, se obtiene la correspondiente matriz de coeficientes de los niveles de *detalle* y *tendencia*. Luego, utilizando los coeficientes detalle $d_1(x,y)$ del primer nivel de resolución de esta matriz, y haciendo cero el resto de los coeficientes, reconstruimos el detalle de nivel 1. En las imágenes 3-1 (b.1) y (b.2) se muestra este nivel de detalle para las dos bases. Las intensidades de algunos pixeles de la imagen reconstruida podrían mostrar valores negativos. Cuando esto sucede, se reescalan entre 0 y 255 las intensidades de los pixeles comprendidas entre el valor negativo más grande y el positivo más alto. De esta manera, aplicando el mismo procedimiento a los siguientes niveles de resolución, se pueden reconstruir los sucesivos niveles de detalle. De la Imagen 3-1 (c) a la Imagen 3-1 (e), se muestra la reconstrucción de la imagen de los detalles 2 al 3 y la imagen tendencia para DAUB12 y DAUB20. Las imágenes 3-1 (f.1) y (f.2) corresponden a la reconstrucción de la imagen original sin tener en cuenta la tendencia para ambas descomposiciones, es decir, la imagen formada sólo con los detalles obtenidos en cada nivel

posible de descomposición, o Suma de Detalles. El resultado final es que no sólo los objetos son puestos en evidencia con total claridad, sino que se muestran con sus diferencias tonales.

La información de los objetos de menor tamaño está contenida en los niveles de detalle 1 y 2, según se puede observar en este ejemplo. Esto se debe a la característica adaptativa de las bases wavelet. Por ejemplo, la información correspondiente al objeto de un pixel se encuentra mayoritariamente en el nivel de detalle 1 (en la base DAUB20 es más notable) mientras que la información de los objetos de 4×8 y 8×8 pixeles está distribuida en los niveles de detalle superior.

De acuerdo a los resultados obtenidos en este ejemplo, podemos deducir que si se reconstruye la imagen Suma de Detalles sin tener en cuenta el primer nivel de resolución (el que contiene información de los detalles más finos o de altas frecuencias) la imagen resultante estará formada mayoritariamente por la información del objeto de mayor tamaño, con lo cual los objetos más pequeños aparecerán borrosos o mal definidos. Los demás objetos aparecerán con posibles distorsiones en sus bordes de acuerdo al tamaño en pixeles que posean, esto se debe a que al desechar el primer nivel de detalle también se está descartando información de los detalles finos de estos otros objetos. En las imágenes 3-1 (g.1) y (g.2) se muestra el resultado de desechar la información contenida en el primer nivel de detalle. Para la base DAUB12 no es posible observar una diferencia sustancial, en lo que a definición se refiere, entre el elemento de un pixel y el de cuatro pixeles. Esto es así debido a que la información de los objetos más pequeños está distribuida entre los dos niveles más bajos. En cambio, para la DAUB20 el objeto de un pixel aparece totalmente borroso frente al de cuatro, el cual aún es detectable. Como era de esperar, en ambos casos se ha perdido totalmente la definición de los bordes en los objetos. Para el objeto de mayor tamaño prácticamente no hay diferencias sustanciales entre ambas bases y aún es posible distinguir perfectamente su forma geométrica.

Sobre la base de estos resultados, es posible obtener una herramienta para disminuir considerablemente la mayor fuente de ruido contenida una imagen digitalizada. Este ruido es debido a las fluctuaciones estadísticas originadas durante el proceso de impresión de la placa radiográfica (distribución estadística de cristales de plata, fluctuaciones estadísticas en la emisión y absorción de rayos X, envejecimiento de la placa, etc.) y, luego, durante la digitalización de la imagen (fluctuaciones estadísticas del arreglo de fotodetectores). En general este ruido no está estadísticamente correlacionado y las fluctuaciones promedio son de tres o cuatro niveles de grises. Por lo tanto, las imágenes reales distan mucho de la imagen perfecta aquí presentada, con lo cual, al desechar el primer nivel de detalles se desecha gran parte de la información que da cuenta de este ruido ^[2].

125	125	125	125	125	b
125	125	125	125	125	125
125	a	125	125	125	125
125	125	125	125	125	125
125	125	125	125	125	125
125	125	125	125	125	c

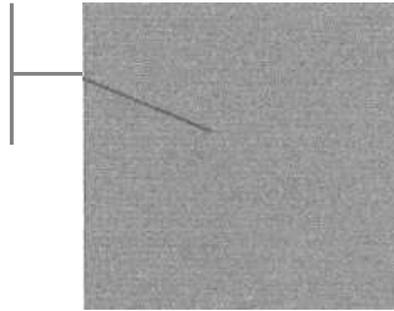


Imagen 3-1 (a): Imagen original con un nivel de gris de 125 para el fondo y tres objetos de diferentes tamaños (a, b, c) de intensidad levemente superior.

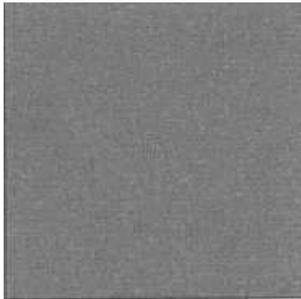


Imagen 3-1 (b.1): Detalle del nivel 1, con DAUB12.

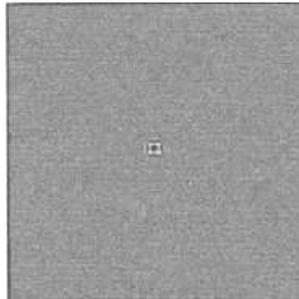


Imagen 3-1 (c.1): Detalle del nivel 2, con DAUB12.

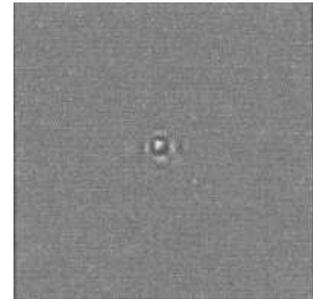


Imagen 3-1 (d.1): Detalle del nivel 3, con DAUB12.

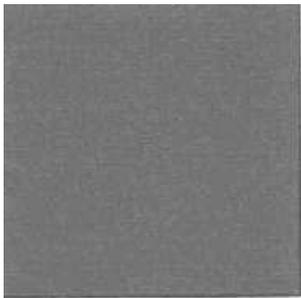


Imagen 3-1 (b-2): Detalle del nivel 1, con DAUB20.

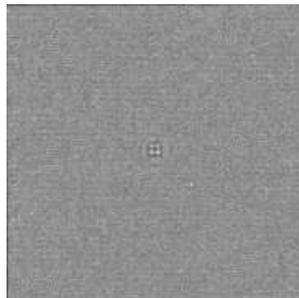


Imagen 3-1 (c-2): Detalle del nivel 2, con DAUB20.

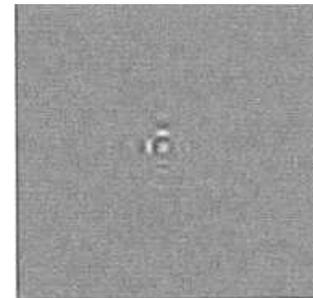


Imagen 3-1 (d-2): Detalle del nivel 3, con DAUB20.

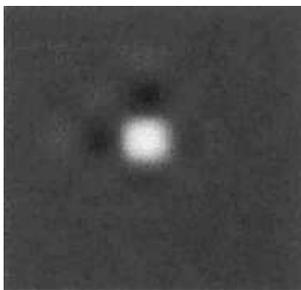


Imagen 3-1 (e-1): Imagen Tendencia, con DAUB12.

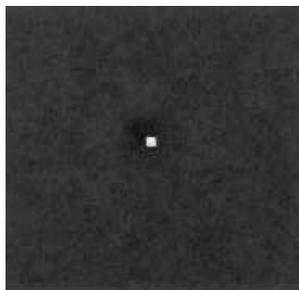


Imagen 3-1 (f-1): Suma de Detalles. Reconstrucción de la imagen original eliminando la Tendencia, con

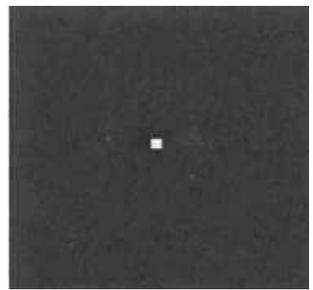


Imagen 3-1 (g-1): Imagen Suma de Detalles reconstruida eliminando el primer nivel de Detalle y la Tendencia, con DAUB12.

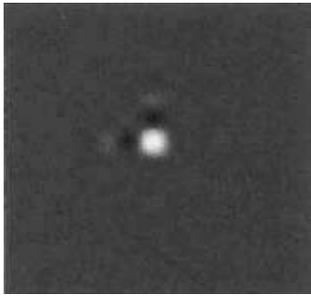


Imagen 3-1 (e-2): Imagen Tendencia, con DAUB20.

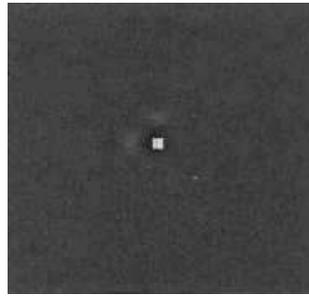


Imagen 3-1 (f-2): Suma de Detalles. Reconstrucción de la imagen original eliminando la Tendencia, con DAUB20.

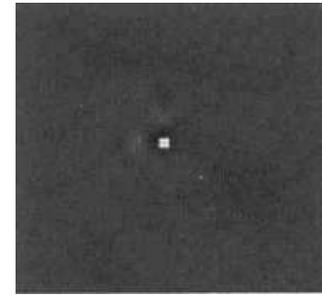


Imagen 3-1 (g-2): Imagen Suma de Detalles reconstruida eliminando el primer nivel de Detalle y la Tendencia, con DAUB20.

En la Imagen 3-2 (a) se presenta un fondo generado por una función senoidal, con tonos comprendidos entre [194,212]. Sobre éste se superpusieron 5 puntos en cruz, de un pixel cada uno y de intensidad levemente inferior (valor = 180). La Imagen 3-2 (b) muestra la matriz de coeficientes. Los resultados obtenidos de la reconstrucción de cada nivel de detalle y de la reconstrucción de la tendencia, calculados de la misma forma que para el primer ejemplo y utilizando la DAUB20, corresponden a las Imágenes 3-2 (c), (d), (e), (f), (g). La Imagen 3-2 (h), Suma de Detalles, muestra claramente los 5 puntos que en la imagen original estaban enmascarados.

f	f	f	F	f	f	f
f	f	f	F	f	f	f
f	f	f	180	f	f	f
f	f	180	180	180	f	f
f	f	f	180	f	f	f
f	f	f	F	f	f	f
f	f	f	F	f	f	f

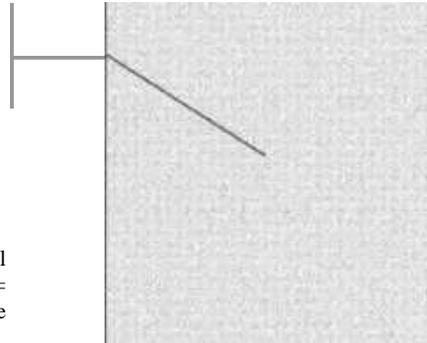


Imagen 3-2 (a): Imagen original con el fondo generado por una función $f = \text{sen} \in [194,212]$ y cinco puntos de intensidad levemente inferior.

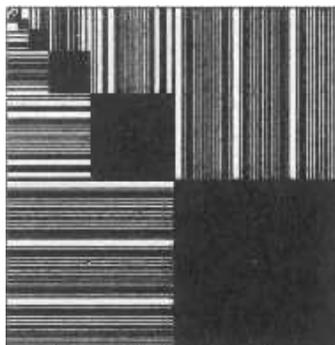


Imagen 3-2 (b): Matriz de coeficientes. Se observa claramente la orientación de cada componente de cada detalle.

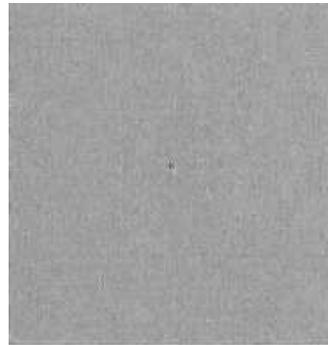


Imagen 3-2 (c): Detalle del nivel 1.

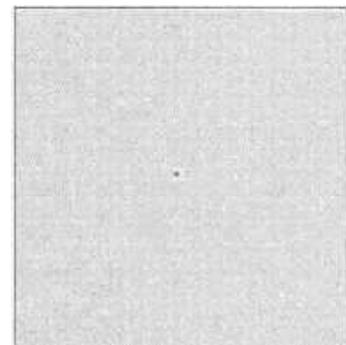


Imagen 3-2 (d): Detalle del nivel 2.

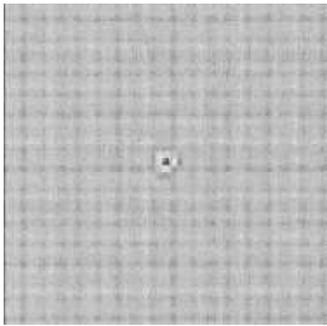


Imagen 3-2 (e): Detalle del nivel 3.

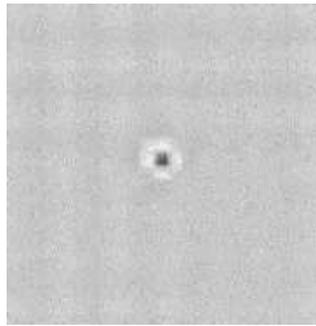


Imagen 3-2 (f): Detalle del nivel 4.

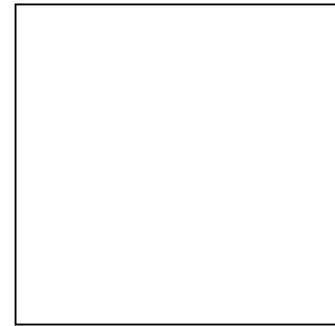


Imagen 3-2 (g): Tendencia.

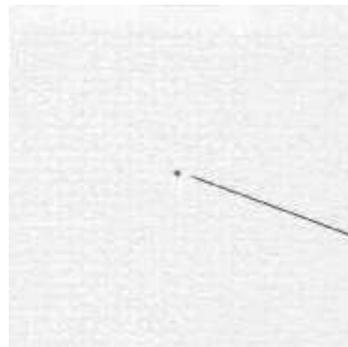
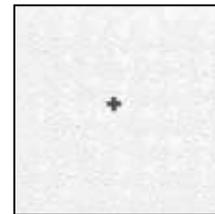


Imagen 3-2 (h): Suma de Detalles.
Reconstrucción de la imagen original
eliminando la tendencia.



Estos ejemplos muestran la sensibilidad del método en la detección de pequeños cambios de tono, prácticamente imperceptibles ocularmente en las imágenes. Se observa que la mejor definición de los objetos ocultos ocurre en el nivel de resolución en que el tamaño de la wavelet es comparable con el tamaño de los objetos. En órdenes superiores de la descomposición, el tamaño de la wavelet aumenta y la imagen de los objetos se distorsiona. Pero la información contenida en estos niveles superiores de detalles o detalles “más gruesos” contiene la información necesaria para recomponer la imagen original, como se aprecia en la imagen Suma de Detalles.

Para imágenes más complejas se observa que el algoritmo realza cada particularidad de la imagen en un determinado nivel de detalle, como se aprecia en el ejemplo de las Imágenes 3-3.



Imagen 3-3 (a): Imagen original.

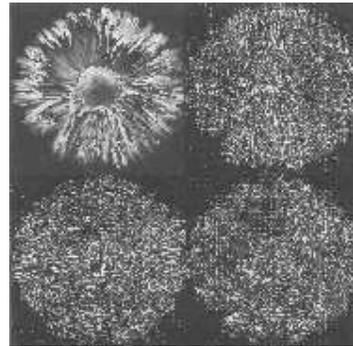


Imagen 3-3 (b): Matriz de coeficientes luego de la primera iteración del algoritmo de descomposición.

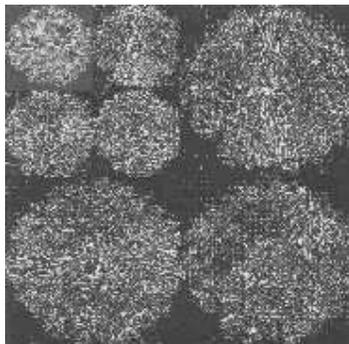


Imagen 3-3 (c): Matriz de coeficientes luego de la segunda iteración.

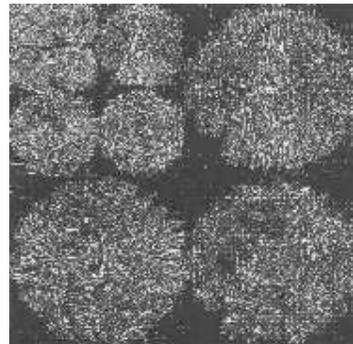


Imagen 3-3 (d): Matriz de coeficientes luego de la última iteración.

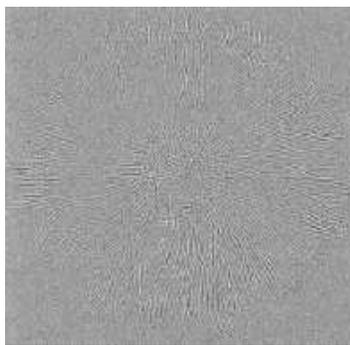


Imagen 3-3 (e): Detalle del nivel 1

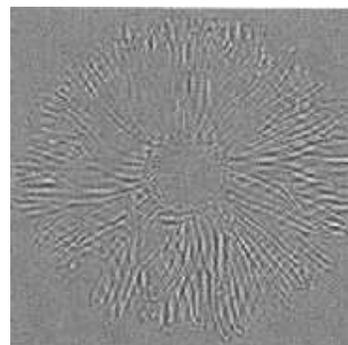


Imagen 3-3 (f): Detalle del nivel 2

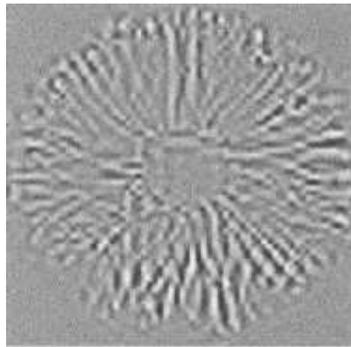


Imagen 3-3 (g): Detalle del nivel 3

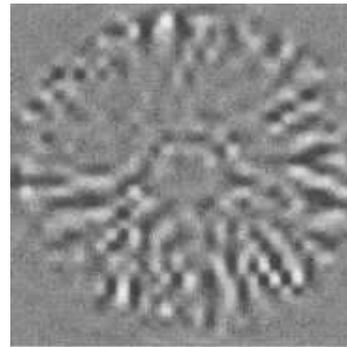


Imagen 3-3 (h): Detalle del nivel 4

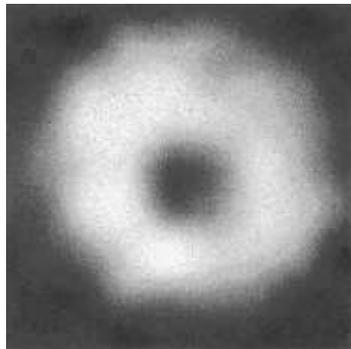


Imagen 3-3 (i): Tendencia.

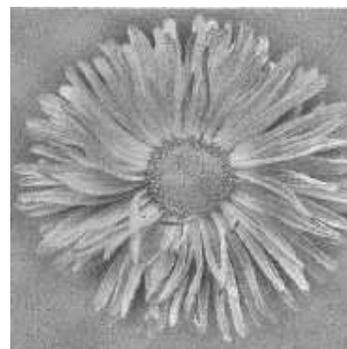


Imagen 3-3 (j): Suma de Detalles.
Reconstrucción de la imagen original
sin la tendencia.

Resumen

En este capítulo hemos descrito el algoritmo piramidal por el cual es posible descomponer y reconstruir un vector (y su generalización bidimensional) en una base Wavelet de Daubechies ortonormal, así como también su implementación y desarrollo numérico, haciendo un estudio de eficiencia y estabilidad.

Se han presentado ejemplos que ilustran el comportamiento de la Transformada Wavelet sobre imágenes con leves variaciones (objetos ocultos) inapreciables al ojo humano, obteniendo resultados satisfactorios. En estos ejemplos podemos observar el gran poder adaptativo de las funciones Wavelet.

De los resultados obtenidos con imágenes perfectas similares a las presentadas en este capítulo se puede inferir que, para imágenes reales, es posible disminuir considerablemente el ruido estadístico (no correlacionado) producto de la obtención de una placa radiográfica y su digitalización. Si el nivel de resolución utilizado para la digitalización de la mamografía es lo suficientemente alto, la diferencia entre pixeles contiguos se debe principalmente a la existencia del ruido y no a la presencia de un verdadero detalle. Al

reconstruir la imagen sin el nivel de detalle 1 (el que contiene las más altas frecuencias) es posible eliminar, en principio, gran parte de la información debido a este ruido aleatorio^[2].

En el próximo capítulo se describirá el Algoritmo de Transformada Wavelet con Estructura de Arbol, el cual, a diferencia del algoritmo piramidal descrito, descompone no solo la tendencia para un nivel dado de escala, sino que también descompone los distintos detalles. Esta transformada será aplicada en el próximo capítulo para la descomposición de texturas, y se describirán dos algoritmos para la clasificación de las mismas.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] R Gupta and PE Undril. "The use of texture analysis to identify suspicious masses in mammography", Department of Bio-Medical Physics & BioEngineering, University of Aberdeen, Foresthill.
- [2] Gamba, P.; Lange, R.; Saccomano, C.. Trabajo Final "Estudio de la Aplicación Wavelet al Diagnóstico Asistido por Computadora de Mamografías". UNICEN, 1999.
- [3] Scutt D, Manning JT, Whitehouse GH, Leinster SJ, Massey CP. "The Relationship between Breast Asymmetry, Breast Size and the occurrence of Breast Cancer". British Journal of Radiology. 70: 1017-1021. 1997.
- [4] M. Vetterli, y J. Kovacevic. "Wavelets and Subband Coding". Pretince Hall Signal Processing Series, 1995.
- [5] S. E. Zarantonello. "Theory and application of Wavelets". Santa Clara University, 1997.
- [6] Murray Spiegel. "Teoría y Problemas de Análisis de Fourier". McGraw-Hill serie de compendios Schaum, 1981.
- [7] Ruel Churchill. "Series de Fourier y Problemas de Contorno". McGraw-Hill, 1978.
- [8] Y. Sheng, "The Transforms and Applications Handbook". CRC Press, 1996.
- [9] I Daubechies. "Ten Lectures on Wavelets". The Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- [10] Tianhorng Chang y C.C. Jay Kuo, "Texture Analysis and Classification with Tree-Structure Wavelet Transform". IEEE TRANSACTIONS ON IMAGE PROCESSING, October 1993

-
- [11] Castro Pereira R de, Borges DL. “ Identificação de Tumores em Mamogramas através de Representações Wavelets”. Laboratório de Sistemas Inteligentes. Escola de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Goiás. Goiânia, GO, Brasil, 1999.
- [12] Ferrari RJ, Rangayyan RM, Desautels JEL and Frère AF. “Analysis of Asymmetry in Mammograms via Directional Filtering With Gabor Wavelets”. IEEE TRANSACTIONS ON MEDICAL IMAGING, VOL. 20, NO. 9, SEPTEMBER 2001.
- [13] Daniel B. Kopans. “La Mama en Imagen”. MARBAN, 1989.
- [14] A.K. Jain. “Fundamentals of Digital Image Processing”. Prentice Hall International, 1989.
- [15] Ludwig W. “Das Rechts-Links Problem in Tierreich und beim Menschen”. Berlin: Springer 1932.
- [16] Rasmusen M. “ Frecuency of morphological deviants as a criterion of developmental stability”. Hereditas 1960; 46:511–35.
- [17] Manning JT. “Fluctuating asymmetry and body weight in men and women: implications for sexual selection”. Ethol Sociobiol 1995; 16:145-53.
- [18] Manning JT, Scutt D, Whitehouse GH, Leinster SJ, Walton JM. “Asymmetry and the menstrual cyle”. Ethol Sociobiol 1996; 17:129-43.
- [19] Watson PJ, Thornhill R. “Fluctuating asymmetry and sexual selection”. Trends Ecol Evol 1994; 9:21-5.
- [20] Manning JT, Ockenden L. “Fluctuating asymmetry in racehorses”. Nature 1994; 370:185-6.
- [21] Parsons PA. “Fluctuating asymmetry as epigenetic measure of stress”. Biol Rev 1990; 65:131-45.