TRABAJO PRACTICO Nº 4
(Segunda Parte)

LOGICA DE PREDICADOS DE PRIMER ORDEN

1. Sea el lenguaje de primer orden L que tiene dos símbolos de constante c, d, y un símbolo de relación binario P, y dado el modelo $M =< D, \{P\}, \{\}, \{c, d\} >$ donde
$D = N$ (conjunto de los números naturales) es el dominio
$P^N(x, y) = \{(x, y) \in N \times N : x \leq y\}$ $c^N = 0$ $d^N = 1$
Determine y justifique si las siguientes afirmaciones son o no correctas

   (a) $P(c, x)$ es válida bajo una valuación en M.
   (b) $P(c, x)$ es válida en M.
   (c) $\forall x P(c, x)$ es lógicamente válida.
   (d) $\forall x \exists y P(x, y)$ es válida en M.
   (e) $\exists y \forall x P(x, y)$ es válida en M.
   (f) $P(d, c) \wedge \neg P(d, c)$ es contradictoria.

2. Sea L un lenguaje de primer orden que tiene un símbolo de constante c, un símbolo de relación unaria A, un símbolo de relación binaria B y un símbolo de función unaria f. En el lenguaje L sea el modelo $M =< D, \{A, B\}, \{f\}, \{c\} >$ donde $D = \{1, 2, 3\}$ $A^D = \{1\}$
$B^D = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\}$ $f^D(1) = 1$ $f^D(2) = 3$ $f^D(3) = 2$ $c^D = 2$

   Determine si cada una de las siguientes fórmulas es válida bajo una valuación, válida, o falsa en el modelo dado. Justifique en cada caso.

   (a) $\forall x B(x, x) \rightarrow \exists x \exists y (B(x, y) \wedge B(f(y), x))$
   (b) $\forall x (B(x, y) \rightarrow B(f(x), f(y)))$
   (c) $\exists x (B(x, f(y)) \rightarrow \neg A(x)) \vee \forall x \neg A(x)$
   (d) $\forall x (\neg B(x, y) \rightarrow A(x))$

3. Defina al menos dos modelos para un lenguaje de primer orden con únicamente un símbolo de relación binario P, y traduzca las fórmulas dadas a oraciones apropiadas en lenguaje natural:

   (a) $\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow P(y, x))$
   (b) $\forall x P(x, x)$
   (c) $\forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z))$

4. Sea el lenguaje de primer orden L que tiene un símbolo de constante c, un símbolo de función unaria f_1, dos símbolos de funciones binarias f_2 y f_3, dos símbolos de predicados binarios P_1 y P_2, y dado el modelo $M_1 =< N, \{=, <\}, \{suc, +, *\}, \{0\} >$ donde
$D = N$ (conjunto de los números naturales) es el dominio $c^N = 0$
$P_1^N(x, y) = \{(x, y) \in N \times N : x = y\}$ $P_2^N(x, y) = \{(x, y) \in N \times N : x < y\}$
$f_1^N(x) = suc(x) = x + 1$ $f_2^N(x, y) = x + y$ $f_3^N(x, y) = x * y$

(a) Traduzca las siguientes fórmulas a oraciones apropiadas en lenguaje natural:
   1. $P_2(c, f_1(f_1(c)))$
   2. $\forall x_1 P_2(x_1, f_1(x_1))$
   3. $\forall x_1 \exists x_2 P_1(x_2, f_3(x_2, x_1))$
   4. $\exists x_1 \forall x_2 P_1(f_1(x_2), x_1)$
   5. $\forall x_1 \forall x_2 P_1(x_1, x_2) \to P_1(x_2, x_1)$

(b) Determine si cada una de las fórmulas del inciso anterior es válida bajo una valuación, válida o falsa en el modelo dado.

(c) Usando el lenguaje dado represente cada una de las siguientes proposiciones:
   1. 0 no tiene sucesor.
   2. 0 es el predecesor de 1.
   3. Todo número natural tiene un sucesor.
   4. Si dos números tienen el mismo sucesor son iguales.
   5. El sucesor del sucesor de cualquier número es mayor que el sucesor de ese mismo número.

5. Sea L un lenguaje de primer orden que tiene dos símbolos de constante c y d, cuatro símbolos de relación binaria A, B, C y E, un símbolo de función binaria f, y un símbolo de función unaria g. En el lenguaje L, sea el modelo
   $M =< D, \{A^D, B^D, C^D, E^D\}, \{f^D, g^D\}, \{c^D, d^D\} >$ donde $D = \{x \in \{a, b\}^* \ y \ x \neq \varepsilon\}$ $c^D = a$
   $d^D = b$
   $g^D(x) = x^R$ (reversa de x) $\qquad f^D(x, y) = x.y$ (x concatenada con y)
   $A^D(x, y) = \{(x, y) \in D^2 :$ x es prefijo de y$\}$ (es decir $y = x.z$ para $z \in \{a, b\}^*$)
   $B^D(x, y) = \{(x, y) \in D^2 : x$ es subcadena de $y\}$
   $C^D(x, y) = \{(x, y) \in D^2 : x = y\}$
   $E^D(x, y) = \{(x, y) \in D^2 : x$ tiene la misma longitud que $y\}$

   Determine si cada una de las siguientes fórmulas es válida, válida bajo una valuación o falsa en el modelo dado. Justifique en cada caso. Para las fórmulas válidas bajo una valuación, dé una valuación que las satisfaga.

   (a) $\exists y(E(x, y) \wedge A(y, x) \to C(x, y))$
   (b) $\forall x E(x, g(x)) \wedge \exists x \exists y(A(x, y) \wedge \neg B(x, y))$
   (c) $\forall y \exists x(A(x, y) \to A(g(x), g(g(y))))$
   (d) $\forall x \exists y B(y, x) \to \forall x \exists y C(x, g(y))$

6. Dada la siguiente fórmula definida en un lenguaje de primer orden L: $\forall x(A(x) \to A(f(x)))$, ¿existe un modelo en el que dicha fórmula sea falsa? Si su respuesta es afirmativa, defínalo. En otro caso, explique el por qué de la no existencia.

7. Sea L un lenguaje de primer orden que tiene un símbolo de constante c, un símbolo de relación binaria A. En el lenguaje L sea el modelo $M =< D, \{A\}, \{\}, \{c\} >$ donde $D =$\{María, Juan, Luis\} $\quad A^D =$\{(María, María), (Juan, María), (Luis, María)\} $\quad c^D =$María

   Y dada la siguiente oración en lenguaje natural:

   "Nadie que admire a los que admiran a María, la admira a ella"

   Formalícela en el cálculo de predicados y analice su validez en el modelo dado. En caso de que no sea válida, y de ser posible, proponga una modificación al modelo dado para que sí lo sea.

8. Dado el conjunto de datos de la Tabla 1 y el siguiente conjunto de relaciones:

$P^D(x,y) = \{(x,y) \in D^2 : x \text{ vive en el mismo país que } y\}$
$E^D(x,y) = \{(x,y) \in D^2 : x \text{ tiene la misma edad que } y\}$
$O^D(x,y) = \{(x,y) \in D^2 : x \text{ tiene la misma ocupación que } y\}$
$A^D(x,y) = \{(x,y) \in D^2 : x \text{ practica el mismo deporte que } y\text{, y ambos son argentinos}\}$

Tabla 1	Edad	País	Deporte	Ocupación
Andrea	35	Argentina	Tenis	Ama de casa
Beatriz	17	Uruguay	Hockey	Contadora
Carlos	55	Paraguay	Tenis	Empleado
Julio	35	Brasil	Fútbol	Contratista
Eduardo	38	Argentina	Tenis	Comerciante

(a) Describir por extensión los conjuntos P^D, E^D, O^D y A^D
siendo el dominio $D = \{Andrea, Beatriz, Carlos, Julio, Eduardo\}$
(b) Si es posible, dar un ejemplo de fórmula válida, fórmula válida bajo una valuación y fórmula falsa en base al modelo definido.

9. Sea la siguiente imagen del mundo de los naipes:

(Corazón y diamante son rojos y trébol y pica, negros)

Consideremos los siguientes predicados:

$Par(a)$ significa que el naipe a tiene un valor par.
$Negro(a)$ significa que el naipe a es de color negro.
$Rojo(a)$ significa que el naipe a es de color rojo.
$Entre(a,b,c)$ significa que el naipe a se encuentra entre b y c.
$Derecha(a,b)$ significa que el naipe a está inmediatamente a la derecha de b.
$Mismocolor(a,b)$ significa que los naipes a y b son del mismo color.
$Juntos(a,b)$ significa que los naipes a y b están juntos.

1. Usando los predicados dados, defina un modelo que represente el mismo mundo que la imagen anterior.

2. Determine si las siguientes fórmulas son falsas, válidas o válidas bajo una valuación en el modelo definido.

(a) $\forall x(Rojo(x) \longrightarrow Par(x))$
(b) $\exists x(\neg Par(x) \wedge Rojo(x))$
(c) $\neg\exists x(Rojo(x) \wedge \neg Par(x))$
(d) $\forall x\forall y(Mismocolor(x,y) \longrightarrow \neg Juntos(x,y))$
(e) $\exists x\exists y(Rojo(x) \wedge Rojo(y) \wedge \neg\exists z(\neg Rojo(z) \wedge Entre(z,x,y)))$
(f) $\forall x(Par(x) \longrightarrow \exists y\exists z(\neg Par(y) \wedge \neg Par(z) \wedge Entre(x,y,z)))$
(g) $\forall x(\neg Rojo(x) \longrightarrow \exists y(Rojo(y) \wedge Derecha(x,y)))$
(h) $\forall x(Negro(x) \longrightarrow \exists y(Rojo(y) \wedge (Derecha(x,y) \vee Derecha(y,x))))$
(i) $\forall x(Rojo(x) \longrightarrow \exists y\exists z(Negro(y) \wedge negro(z) \wedge Derecha(x,y) \wedge Derecha(z,x)))$

10. Defina para cada una de las siguientes fórmulas un modelo en donde sea válida y un modelo en donde sea falsa (cuando sea posible). Justifique la elección del modelo en cada caso.

(a) $\forall xR(x) \rightarrow \exists xR(x)$
(b) $\exists x\forall yA(x,y) \rightarrow \forall x\exists yA(x,y)$
(c) $\neg\exists x(\neg(D(x) \vee D(x))$
(d) $\exists xA(x,y) \rightarrow \forall xA(x,y)$
(e) $\forall x(A(x) \vee B(x)) \rightarrow \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$
(f) $\exists xA(x) \vee \exists xB(x) \rightarrow \exists x(A(x) \vee B(x))$

11. Sea L un lenguaje de primer orden que tiene un símbolo de constante c, un símbolo de relación binaria A y un símbolo de función binaria f. En el lenguaje L sea el modelo

$M =< D, \{A\}, \{f\}, \{c\} >$ donde $D = N$ (conjunto de los números naturales),

$A^D = \{(x,y) \in N^2 : x \geq y\}$ $\quad f^D(x,y) = \{z \in N : (x,y) \in N^2; z = x+y\}$ $\quad c^D = 0$

Escribir en todos los casos que sea posible (cuando no sea posible fundamentar por qué), fórmulas bien formadas en el lenguaje L que sean:

(a) falsa en M, pero no contradictoria.
(b) contradictoria
(c) válida bajo una valuación en M, pero no válida en M
(d) válida en M, pero no válida bajo una valuación en M
(e) válida en M, pero no lógicamente válida
(f) lógicamente válida
(g) lógicamente válida pero no válida en M
(h) contradictoria, pero no falsa en M

12. Para cada una de las siguientes fórmulas, encuentre si es posible un modelo en el cual la última fórmula sea falsa pero las primeras sean válidas:

(a) $\exists xA(x) \rightarrow \exists xB(x), B(a), \forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ siendo a constante
(b) $\forall x\forall y(A(x) \wedge A(y) \rightarrow C(x,y)), \exists xA(x), \exists xA(f(x)), \exists xC(f(x),x)$