

## TRABAJO PRACTICO N° 2

## LOGICA PROPOSICIONAL

1. Sean  $p, q$  y  $r$  variables proposicionales. Muestre por tabla de verdad que las siguientes consecuencias semánticas no son válidas:

- (a)  $\neg p \vee (q \rightarrow p) \vDash \neg p \wedge q$
- (b)  $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vDash p \rightarrow (r \rightarrow q)$
- (c)  $\{\neg p, p \vee q\} \vDash \neg q$

2. Sean  $A, B, C \in F_m$ . Pruebe las siguientes consecuencias semánticas:

- (a)  $\{\neg B, A \rightarrow (\neg B \rightarrow C)\} \vDash A \rightarrow C$
- (b)  $\{A \rightarrow B, A \rightarrow C\} \vDash A \rightarrow B \wedge C$
- (c)  $\{A \rightarrow C, B \rightarrow C\} \vDash A \wedge B \rightarrow C$
- (d)  $A \rightarrow (\neg B \rightarrow C) \vDash A \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg \neg B)$
- (e)  $\{A, \neg B\} \vDash \neg(A \rightarrow \neg(B \rightarrow (\neg A \rightarrow A)))$
- (f)  $\vDash \neg((\neg A \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow \neg A))$
- (g)  $\vDash (A \wedge \neg A) \rightarrow B$

3. Determine cuáles de las siguientes fórmulas son consecuencia semántica de la fórmula  $A \wedge B$  y cuáles de la fórmula  $A \vee \neg B$ :  
 $A, \neg B \rightarrow A, \neg A \vee B, B \rightarrow \neg A$

4. Sean  $p, q$  y  $r$  variables proposicionales. Determine cuáles de las siguientes consecuencias semánticas son válidas. Justifique

- (a)  $\{p \vee q\} \vDash p \rightarrow q$
- (b)  $\{p \wedge \neg p\} \vDash r \leftrightarrow r \vee q$
- (c)  $\{(p \rightarrow q, \neg r \rightarrow \neg q)\} \vDash p \rightarrow r$
- (d)  $\{p \rightarrow q, q \rightarrow p \wedge r\} \vDash p \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow r$

5. Sean  $A, B, C \in F_m$  Pruebe las siguientes tautologías (puede aplicar el Teorema de la Deducción para facilitar las pruebas)

- (a)  $\vDash (A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)))$
- (b)  $\vDash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
- (c)  $\vDash \neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$
- (d)  $\vDash \neg A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)$
- (e)  $\vDash \neg(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow (A \vee B)$
- (f)  $\vDash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- (g)  $\vDash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$

- (h)  $\models (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- (i)  $\models (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg A))$
- (j)  $\models (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$

6. Sean  $A, B, C \in F_m$ .

- (a) Pruebe la siguiente consecuencia semántica:  $\{B, A \rightarrow (B \rightarrow C)\} \models A \rightarrow C$
- (b) Si se agrega al conjunto de hipótesis la fórmula  $\neg B \wedge A$ , el conjunto de hipótesis resultante ¿es satisfacible o insatisfacible?
- (c) ¿Qué puede decir sobre la validez de  $\{B, A \rightarrow (B \rightarrow C), \neg B \wedge A\} \models A \rightarrow C$  ?

7. Sean  $p, q$  y  $r$  variables proposicionales. Para cada una de las siguientes consecuencias semánticas no válidas, dar ejemplos de sentencias declarativas en lenguaje natural para  $p, q$  y  $r$  tales que las premisas sean verdaderas, pero la conclusión sea falsa.

- (a)  $p \vee q \models p \wedge q$
- (b)  $\neg p \rightarrow \neg q \models \neg q \rightarrow \neg p$
- (c)  $p \rightarrow q \models p \vee q$

8. Formalice en el lenguaje del cálculo proposicional y conteste las preguntas planteadas:

Tres personas A, B y C son acusadas de un asesinato. En el juicio ellos declaran lo siguiente:

- A dice: “Lo hizo B, C es inocente”.
- B dice: “Si A es culpable, también lo es C”.
- C dice: “Yo no lo hice, lo hizo uno de los otros dos”.

- (a) ¿Son consistentes sus declaraciones?
- (b) Suponiendo que todos son inocentes, ¿quién miente?
- (c) Suponiendo que toda declaración es verdadera, ¿quién es inocente y quién es culpable?

9. Buscando a Sir Morgan, un lógico encuentra a dos personajes. Junto a ellos, un caballo, una lanza y un escudo. El primer personaje dice, “Éste es el caballo de Sir Morgan, ésta es su lanza, pero éste no es su escudo”. El segundo dice, “En efecto, éste es el caballo de Sir Morgan, pero, si ésta es su lanza, éste no es su escudo”.

- (a) Formalice el problema usando lógica proposicional.
- (b) Sabiendo que uno de los personajes dice la verdad, y el otro miente, ¿qué personaje dice la verdad, y cuál miente?
- (c) ¿Son en efecto estos 3 artículos de Sir Morgan?

10. Un rey somete a un prisionero a la siguiente prueba: lo enfrenta a dos puertas, de las que el prisionero debe elegir una, y entrar en la habitación correspondiente. Se informa al prisionero que hay un tigre y una dama, cada uno ubicado en una de las habitaciones. Como es natural, el prisionero debe elegir la puerta que lo lleva a la dama (entre otras cosas, para no ser devorado por el tigre). Para ayudarlo, en cada puerta hay un cartel:

Puerta 1: en esta habitación hay una dama y en la otra un tigre.

Puerta 2: en una de estas habitaciones hay una dama sí y sólo sí en la otra hay un tigre.

- (a) Formalice el problema usando lógica proposicional.
- (b) Sabiendo que uno de los carteles dice la verdad y el otro no, determinar qué puerta debe elegir el prisionero.
11. Se denunció un robo de dinero y la policía detuvo a 4 sospechosos. Los 4 fueron interrogados, y se sabe que uno solo dijo la verdad.
- El sospechoso número 1 dijo que él no robó el dinero. El sospechoso número 2 dijo que el número 1 mentía.
- El sospechoso número 3 dijo que el número 2 mentía. El sospechoso número 4 dijo que el número 2 fue quien robó el dinero.
- (a) Formalice el problema usando lógica proposicional.
- (b) Determine quién fue el único que no mintió teniendo en cuenta las declaraciones de cada uno.
12. En cada uno de los siguientes casos determine si la conclusión se sigue de las premisas:
- (a) X será contratado si pasa todas las entrevistas. Si X tiene experiencia previa y no participa activamente en las reuniones, será contratado. X tiene experiencia previa. Además, X pasará todas las entrevistas si participa activamente en las reuniones. Entonces X será contratado.
- (b) Si llueve o hace frío, me quedo en casa. Si es domingo y me quedo en casa, me aburro a menos que me visite algún amigo. Si me visita algún amigo, me divierto. No me divierto y es domingo.  
Por lo tanto, si no hace frío me aburro.
- (c) Cuando vengo, estás trabajando o durmiendo. Si estás durmiendo, es que no he venido aún o te acostaste muy tarde. Pero no te acostaste muy tarde. Luego estás trabajando o no he venido.
- (d) La música amansa a las fieras cuando éstas no están sordas. Para que las fieras no estén sordas, es suficiente disponer de suficientes audífonos. Por tanto, disponer de suficientes audífonos es una condición necesaria para que la música no amanse a las fieras.
- (e) Los alumnos copian las prácticas a menos que el profesor lo impida pero el profesor no lo impide a menos que tenga poco trabajo. Se puede deducir que, es suficiente que el profesor no tenga poco trabajo para que los alumnos copien las prácticas.
13. Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifique su respuesta en cada caso.
- (a) Dado un conjunto de fórmulas del cálculo proposicional  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ,  $A$  es insatisfacible si para toda valuación  $v$ ,  $v(A) = 0$ .
- (b) Dado un conjunto de fórmulas del cálculo proposicional  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  y  $B$  una tautología, si  $A$  es satisfacible entonces  $A \cup \{B\}$  también es satisfacible.
- (c) Dado un conjunto de fórmulas del cálculo proposicional  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ , si  $A$  es insatisfacible entonces  $\{A_1, A_2\}$  es insatisfacible.
- (d) Sean  $A, B$  fórmulas del cálculo proposicional.  $A \vDash B$  sí y sólo sí existe alguna valuación  $v$  tal que  $v(A) = 1$  y  $v(B) = 1$ .

- (e) Sean  $A, B$  fórmulas del cálculo proposicional  $B$  no es consecuencia semántica de  $A$  si existe alguna valuación  $v$  tal que  $v(A) = 0$  y  $v(B) = 0$ .
14. Dadas  $A$  y  $B$  fórmulas del cálculo proposicional, ¿es cierto que siempre ocurre que si  $A$  y  $A \rightarrow B$  son verdaderas entonces  $B$  también lo es? Fundamente su respuesta y ejemplifique con algunos ejemplos concretos escritos en lenguaje natural.
15. Sea  $\Gamma, \Delta \subseteq F_m$  y sean  $A, B, C \in F_m$ , pruebe las siguientes afirmaciones:
- (a) Si  $A \in \Gamma$  entonces  $\Gamma \models A$
  - (b) Si  $\Gamma \models A$  y  $\Gamma \subseteq \Delta$  entonces  $\Delta \models A$
  - (c) Si  $\Gamma \models A$  y  $A \models B$  entonces  $\Gamma \models B$
  - (d)  $\Gamma \models B \wedge C$  sí y sólo sí  $\Gamma \models B$  y  $\Gamma \models C$
  - (e) Si  $\Gamma \models A$  y  $\Gamma \models A \rightarrow B$ , entonces  $\Gamma \models B$
  - (f) Si  $\Gamma \cup \{A\} \models C$  y  $\Gamma \cup \{B\} \models C$ , entonces  $\Gamma \cup \{A \vee B\} \models C$ .
16. Demuestre el Teorema de la Deducción.