Forma Clausular

Formas Normales:

✓ Literal: fórmula atómica o negación de fórmula atómica

Un literal se denota con l y su complementario con l^C

Ejemplo:

L = <{P, Q}, {f}, {c}> P binario, Q unario, f unaria

$l_1 = P(c, f(c))$ $l_2 = l_1^C = \neg P(c, f(c))$ $l_3 = \neg P(x, y)$ $l_4 = l_3^C = P(x, y)$

Forma Normal Conjuntiva (FNC): es una conjunción de disyunciones de literales

Forma Prenexa: es una conjunción de disyunciones de literales con la siguiente forma

$$\underbrace{Q_1x_1\ Q_2x_2 \dots Q_nx_n}_{\text{Prefijo}}\ \underbrace{M(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{\text{Matriz}}$$

Q_i cuantificadores — Libre de cuantificadores, en FNC

Forma Clausular

Ejemplo de fórmula en Forma Prenexa:

$\forall x \exists y((P(x, c) \vee Q(y)) \wedge \neg P(x, y) \wedge (Q(f(c)) \vee \neg P(c, x)))$

Cómo llevar una fórmula a Forma Prenexa:

1) Renombrar variables si es necesario

$\forall xA(x) \equiv \forall yA(y)$ $\exists xA(x) \equiv \exists yA(y)$ y no es variable de A

2) Eliminar implicaciones

$A \to B \equiv \neg A \vee B$

3) Hacer que la negación aparezca inmediatamente antes de una fórmula atómica

$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

$\neg\neg A \equiv A$

$\neg\forall xA(x) \equiv \exists x\neg A(x)$

$\neg\exists xA(x) \equiv \forall x\neg A(x)$

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase – Mg. Virginia Mauco – Facultad Cs. Exactas – UNCPBA - 2009

Forma Clausular

Cómo llevar una fórmula a Forma Prenexa:

4) Escribir todos los cuantificadores al principio

$\forall x A(x) \wedge B \equiv \forall x (A(x) \wedge B)$ $\quad x \notin Var(B)$

$\forall x A(x) \vee B \equiv \forall x (A(x) \vee B)$ $\quad x \notin Var(B)$

$\exists x A(x) \wedge B \equiv \exists x (A(x) \wedge B)$ $\quad x \notin Var(B)$

$\exists x A(x) \vee B \equiv \exists x (A(x) \vee B)$ $\quad x \notin Var(B)$

5) Aplicar la ley distributiva

$A \vee B \wedge C \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Ejemplo

$F = \exists x P(x, c) \vee \forall x P(x, c) \wedge \forall x P(c, x) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$

Aplicando los 5 pasos anteriores, se obtiene F´ en forma prenexa $F' \equiv F$

$$F' = \underbrace{\forall x \exists z \exists u \forall w \exists y}_{\text{Prefijo}}\,(\underbrace{(\neg P(x, c) \vee P(w, y)) \wedge (\neg P(z, c) \vee \neg P(c, u) \vee P(w, y))}_{\text{Matriz libre de cuantificadores, en FNC}})$$

Forma Clausular

Cláusula:

Es una **sentencia** escrita en **forma prenexa** que en el **prefijo sólo** tiene **cuantificadores universales** y la **matriz** es una **disyunción de literales**.

$$\underbrace{\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n}_{\text{Prefijo}} \underbrace{(l_1 \vee l_2 \vee \ldots \vee l_n)}_{\text{Matriz – Disyunción de literales}} \qquad l_i \text{ literales}$$

Forma clausular (o clausal):

Una **fórmula** está **en forma clausular** (o clausal, o forma normal de Skolem) si es una **conjunción de claúsulas**

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n (C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m)$$

C_i cláusulas y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variables que ocurren en $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$

Forma Clausular

Toda variable está cuantificada universalmente $\Rightarrow$ se omiten cuantificadores

$A = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n (C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m)$ $A = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ forma clausular

Ejemplo

$A = \forall x \forall y (P(x, y) \wedge (\neg P(f(a), x) \vee P(f(x), a)))$

$A = \{ P(x, y), \neg P(f(a), x) \vee P(f(x), a) \}$

$A = \forall x \exists y P(x, y)$ está en forma prenexa pero NO en forma clausular

$A' = \forall x P(x, f(x))$ está en forma clausular pero A y A´ NO son equivalentes

Forma Clausular

Teorema de Skolem

Sea A una sentencia. Entonces existe una fórmula A´ en la forma normal de Skolem tal que existe un modelo M de A sí y sólo sí existe un modelo M´ de A´, es decir A es satisfacible sí y solo sí A´ es satisfacible.
En símbolos $A \approx A'$

Para construir A´, a partir de A en forma prenexa, se deben eliminar los cuantificadores existenciales, teniendo en cuenta:

1) Si la fórmula es de la forma $A = \forall y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_n \exists x\, M(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$
   - se define un nuevo símbolo de función f de aridad n
   - se reemplaza toda ocurrencia de x por $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

   $A' = \forall y_1 \forall y_2 \ldots \forall y_n M(f(y_1, y_2, \ldots, y_n), y_1, y_2, \ldots, y_n)$

2) Si la fórmula es de la forma $A = \exists x M(x)$
   - se reemplaza toda ocurrencia de x por una nueva constante a

   $A' = M(a)$

Forma Clausular

Ejemplo:

Sea $A = \exists x P(x, c) \vee \forall x P(x, c) \wedge \forall x P(c, x) \rightarrow \forall x\ \exists y P(x, y)$ c constante

En forma prenexa

$A = \forall x \exists z \exists u \forall w \exists y(\ (\neg P(x, c) \vee P(w, y)) \wedge (\neg P(z, c) \vee \neg P(c, u) \vee P(w, y))\ )$

Dos formas clausulares a partir de A

$A' = \forall x \forall w(\ (\neg P(x, c) \vee P(w, f(x, w))) \wedge (\neg P(g(x), c) \vee \neg P(c, h(x)) \vee P(w, f(x, w)))\ )$

$A'' = \forall x \forall w(\ (\neg P(x, c) \vee P(w, f(w))) \wedge (\neg P(a, c) \vee \neg P(c, b) \vee P(w, f(w)))\ )$

(sin pasar por la forma prenexa, en general se obtienen funciones de menor aridad)

Corolario del Teorema de Skolem:

Sea A una fórmula. Entonces A es insatisfacible o contradictoria sí y sólo sí cualquier forma clausular asociada es insatisfacible.

⬇

Método para determinar validez de una fórmula

(A es lógicamente válida sí y sólo sí $\neg$A es contradictoria)

$\neg$A es contradictoria sí y sólo sí cualquier forma clausular de $\neg$A es insatisfacible)

Modelos de Herbrand

↓ Dificultad de Lógica de Predicados → definición de modelos basada en conjuntos arbitrarios

↑ Teoría para construir modelos en forma canónica → Modelos de Herbrand

Modelos de Herbrand:

✓ se construyen a partir del conjunto de términos cerrados de un lenguaje de primer orden

✓ permiten definir un método para determinar si una fórmula es lógicamente válida o no.

Modelos de Herbrand

Dado L = < R, F, C >, lenguaje de primer orden

El conjunto de los términos cerrados de L se llama

UNIVERSO DE HERBRAND U(L)

1) **Si $c \in C$ entonces $c \in U(L)$**
2) **Si $t_1, t_2, \ldots, t_n \in U(L)$ y f es un símbolo de función n-ario entonces $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in U(L)$**

Si $C = \varnothing$, U(L) se inicia con un nuevo símbolo de constante c.

<u>**Ejemplo**</u>:

L_1 = < {P, Q}, { }, {a} > P binario, Q unario **$U(L_1) = \{ a \}$**

L_2 = < {P, Q}, {f}, {a, b} > P binario, Q unario f unaria

$U(L_2) = \{ a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), \ldots \}$

Modelos de Herbrand

Dado L = < R, F, C >, lenguaje de primer orden

El conjunto de las fórmulas atómicas cerradas de L se llama

BASE DE HERBRAND B(L)

$B(L) = \{ P(t_1, t_2, \ldots, t_n) : t_i \in U(L)$ y P predicado n-ario$\}$

<u>**Ejemplo**</u>:

L_1 = < {P, Q}, { }, {a} > P binario, Q unario

$U(L_1) = \{ a \}$

$B(L_1) = \{ P(a, a), Q(a) \}$

L_2 = < {P, Q}, {f}, {a, b} > P binario, Q unario f unaria

$U(L_2) = \{ a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), \ldots \}$

$B(L_2) = \{ P(a, a), P(a, b), P(b, a), P(b, b), P(f(a), f(b)), P(f(f(a)), f(f(a))), \ldots$

$Q(a), Q(b), Q(f(a)), \ldots\}$

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase – Mg. Virginia Mauco – Facultad Cs. Exactas – UNCPBA - 2009

Modelos de Herbrand

Se definen conceptos análogos para cláusulas. Sea S conjunto de cláusulas:

UNIVERSO DE HERBRAND DE S U(S) conjunto de términos cerrados de S

1) **Si c es símbolo de constante que aparece en S entonces $c \in U(S)$**
2) **Si $t_1, t_2, \ldots, t_n \in U(S)$ y f es un símbolo de función n-ario entonces $f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in U(S)$**

BASE DE HERBRAND DE S B(S) conjunto de las fórmulas atómicas cerradas de S

$B(S) = \{ P(t_1, t_2, \ldots, t_n) : t_i \in U(S)$ y P predicado n-ario que aparece en S$\}$

Importante: La Base de Herbrand está formada por todas las instancias de fórmulas atómicas de S donde los términos se toman de U(S)

Ejemplo:

$S = \{ Q(a) \vee \neg Q(x), R(b, y) \vee R(a, b) \}$

$U(S) = \{ a, b \}$ $\quad$ $B(S) = \{ Q(a), Q(b), R(a, a), R(a, b), R(b, a), R(b, b) \}$

Modelos de Herbrand

Dado L = < R, F, C >, lenguaje de primer orden (o S conjunto de cláusulas)

Sea $M_H = < D, R^D, F^D, C^D >$ donde

- **D = U(L) (U(S)) (el dominio es el conj. de términos cerrados de L (S))**
- **Para cada $c \in C$, $c^D = c$**
- **Para cada $f \in F$, $f^D(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(t_1^D, t_2^D, \ldots, t_n^D)$**

interpretación de términos es fija

- **Para R^D se elige un subconjunto de fórmulas atómicas de B(L) (B(S)) Sea $Y \subseteq B(L)$ (B(S)). Si $P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in B(L)$ (B(S)) entonces**

$$M_H \models P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \leftrightarrow P(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in Y$$

Sea A una fórmula o un conjunto de cláusulas.

Una estructura o modelo de Herbrand M es un modelo de Herbrand para A si es un modelo de A, es decir $M \models A$

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase – Mg. Virginia Mauco – Facultad Cs. Exactas – UNCPBA - 2009

Ejemplo

Sea el conjunto de cláusulas

S= { $\neg$Q(x, a) $\vee$ P(f(b)), $\neg$P(a) }   a, b constantes

U(S) = { a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), … }

B(S) = { P(a), P(b), P(f(a)), P(f(b)), P(f(f(a))), P(f(f(b))), …,
Q(a, a), Q(a, b), Q(b, a), Q(b, b), Q(a, f(a)), Q(a, f(b)), … }

Sea Y = { P(f(b)), Q(a, b), Q(b, a) }   Y $\subseteq$ B(S)

Probaremos si $M_Y(H) \models S$

Es decir $M_Y(H) \models (\neg Q(x, a) \vee P(f(b))) \wedge \neg P(a)$

Ejemplo

Y = { P(f(b)), Q(a, b), Q(b, a) }

⇨ $M_Y(H) \models (\neg Q(x, a) \vee P(f(b))) \wedge \neg P(a) \quad \leftrightarrow$

$M_Y(H) \models \neg Q(x, a) \vee P(f(b))$ y $M_Y(H) \models \neg P(a)$

⇨ $M_Y(H) \models \neg P(a) \leftrightarrow P(a) \notin Y$ ✓

⇨ $M_Y(H) \models \neg Q(x, a) \vee P(f(b)) \quad \leftrightarrow$

$M_Y(H) \models \neg Q(x, a)$ [d] para todo d $\in$ U(S)   ó $M_Y(H) \models P(f(b))$

$M_Y(H) \models \neg Q(x, a)$ [d] para todo d $\in$ U(S) $\leftrightarrow$ Q(d, a) $\notin$ Y para todo d $\in$ U(S)

$M_Y(H) \models P(f(b)) \leftrightarrow P(f(b)) \in Y$ ✓

Entonces S= { $\neg$Q(x, a) $\vee$ P(f(b)), $\neg$P(a)} tiene un modelo de Herbrand

Teoría de Herbrand

TEOREMA DE HERBRAND:

Sea S un conjunto de cláusulas. Entonces S tiene un modelo sí y sólo sí S tiene un Modelo de Herbrand.

Es decir,
S no tiene modelos sí y sólo sí S no tiene Modelos de Herbrand.
S es insatisfacible sí y sólo sí S no tiene Modelos de Herbrand.

S= { $\neg$Q(x, a) $\vee$ P(f(b)), $\neg$P(a)} tiene un modelo de Herbrand entonces S tiene un modelo, es decir S es satisfacible

Teoría de Herbrand

En general, el Teorema de Herbrand no es válido para fórmulas.

Ejemplo A = P(a) $\wedge$ $\exists$x$\neg$P(x) a constante

U(A) = {a} B(A) = { P(a) }

Dos posibles MH: $Y_1 = \varnothing$ y $Y_2 = \{ P(a) \}$

$M_{Y1}(H) \models \neg P(a)$ $M_{Y2}(H) \models P(a)$

En $M_{Y1}(H) \not\models P(a)$ entonces $M_{Y1}(H) \not\models A$

En $M_{Y2}(H) \models P(a)$ entonces $M_{Y2}(H) \not\models \neg P(a)$

$M_{Y2}(H) \not\models \exists x \neg P(x)$ y entonces $M_{Y2}(H) \not\models A$

Por lo tanto A no tiene Modelos de Herbrand

Teoría de Herbrand

Pero $A = P(a) \wedge \exists x \neg P(x)$ tiene modelos

$D = \{ 0, 1\}$ $a^D = 0$ $P^D = \{ 0 \}$

Como $0 \in P^D$ entonces $M \models P(a)$

Como $1 \notin P^D$ en $M \not\models P(1)$ y entonces $M \models \exists x \neg P(x)$

Por lo tanto $M \models A$

El Teorema de Herbrand no es válido para fórmulas.

Teoría de Herbrand

Teorema de Skolem:

Sea A una sentencia. Entonces existe una fórmula A' en forma clausular o forma normal de Skolem tal que A es satisfacible sí y sólo sí A' es satisfacible ($A \approx A'$).

Teorema de Herbrand:

Sea S un conjunto de cláusulas. Entonces S tiene un modelo sí y sólo sí S tiene un Modelo de Herbrand.

Es decir, S no tiene modelos sí y sólo sí S no tiene Modelos de Herbrand.

Teoría de Herbrand

Teorema:

Sea A una sentencia. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- ✓ **A es lógicamente válida (o válida)**
- ✓ **¬A es insatisfacible (o contradictoria)**
- ✓ **Cualquier forma clausular de ¬A es insatisfacible**
- ✓ **Cualquier forma clausular de ¬A no tiene Modelos de Herbrand**

Teoría de Herbrand

Método para determinar si una sentencia A es válida:

1) **Obtener ¬A**
2) **Obtener una forma clausular de ¬A (cl(¬A))**
3) **Estudiar si cl(¬A) tiene o no Modelos de Herbrand:**

✓ **Si cl(¬A) no tiene Modelos de Herbrand, cl(¬A) es insatisfacible** ⇒ **A es válida**

✖ **Si cl(¬A) tiene Modelos de Herbrand, cl(¬A) es satisfacible** ⇒ **A no es válida**

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase – Mg. Virginia Mauco – Facultad Cs. Exactas – UNCPBA - 2009

Teoría de Herbrand

Ejemplo: Determinar si A es válida

$A = \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \rightarrow \exists x (A(x) \vee B(x))$

a) Usando Modelos A es válida $\leftrightarrow$ para todo modelo M, $M \models A$

Sea M un modelo arbitrario.

Si en $M \not\models \exists x A(x) \vee \exists y B(y)$ entonces $M \models A$

Si en $M \models \exists x A(x) \vee \exists y B(y)$ debemos probar $M \models \exists z (A(z) \vee B(z))$

Sean $d_1, d_2 \in D$ tal que $M \models A(d_1)$ ó $M \models B(d_2)$ (por hipótesis)

Luego, si $M \models A(d_1)$ entonces $M \models A(d_1) \vee B(d_1)$

si $M \models B(d_2)$ entonces $M \models A(d_2) \vee B(d_2)$ A es válida

Teoría de Herbrand

Ejemplo: Determinar si A es válida

$A = \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \rightarrow \exists x (A(x) \vee B(x))$

b) Usando propiedad: A es válida $\leftrightarrow$ cl($\neg$A) es insatisfacible

$\neg A \equiv \neg(\exists x A(x) \vee \exists y B(y) \rightarrow \exists z (A(z) \vee B(z)))$

$\equiv \neg(\neg (\exists x A(x) \vee \exists y B(y)) \vee \exists z (A(z) \vee B(z)))$

$\equiv (\exists x A(x) \vee \exists y B(y)) \wedge \neg \exists z (A(z) \vee B(z))$

$\equiv (\exists x A(x) \vee \exists y B(y)) \wedge \forall z \neg(A(z) \vee B(z))$

$\equiv (\exists x A(x) \vee \exists y B(y)) \wedge \forall z (\neg A(z) \wedge \neg B(z))$

$\approx (A(a) \vee B(b)) \wedge \forall z (\neg A(z) \wedge \neg B(z))$ a, b constantes

$\equiv \forall z ((A(a) \vee B(b)) \wedge \neg A(z) \wedge \neg B(z))$ a, b constantes

$cl(\neg A) = \{ A(a) \vee B(b), \neg A(z), \neg B(z) \}$ a, b constantes

Teoría de Herbrand

$cl(\neg A) = \{ A(a) \lor B(b),\ \neg A(z), \neg B(z) \}$ a, b constantes

Suponemos que existe un modelo M tal que $M \models cl(\neg A)$

Entonces se debe cumplir

⇨ $M \models A(a) \lor B(b) \quad \leftrightarrow \quad M \models A(a)$ ó $M \models B(b)$ y

⇨ $M \models \neg A(z)[d] \quad \forall d: d \in D$ y

⇨ $M \models \neg B(z)[d] \quad \forall d: d \in D$

Si $M \models A(a)$ entonces $M \not\models \neg A(a)$ y $M \not\models \neg A(z)[d] \quad \forall d: d \in D$

Si $M \models B(b)$ entonces $M \not\models \neg B(b)$ y $M \not\models \neg B(z)[d] \quad \forall d: d \in D$

Por lo tanto, no existe M tal que $M \models cl(\neg A)$

$cl(\neg A)$ es insatisfacible y A es válida

Teoría de Herbrand

Ejemplo: Determinar si A es válida

$A = \exists x A(x) \lor \exists x B(x) \rightarrow \exists x (A(x) \lor B(x))$

c) Usando propiedad:

A es válida $\leftrightarrow$ $cl(\neg A)$ no tiene Modelos de Herbrand

$cl(\neg A) = \{A(a) \lor B(b),\ \neg A(z), \neg B(z) \}$ a, b constantes

$U(cl(\neg A)) = \{a, b\}$

$B(cl(\neg A)) = \{A(a), A(b), B(a), B(b)\}$ 2^4 posibles MH

Teoría de Herbrand

$cl(\neg A) = \{A(a) \vee B(b), \neg A(z), \neg B(z)\}$ a, b constantes

Suponemos que existe $Y \subseteq B(cl(\neg A))$ tal que $M_Y(H) \models cl(\neg A)$

$M_Y(H) \models \neg A(z) \leftrightarrow M_Y(H) \models \neg A(z)[d]\ \forall d: d \in U(S) \leftrightarrow A(a), A(b) \notin Y$ *

$M_Y(H) \models \neg B(z) \leftrightarrow M_Y(H) \models \neg B(z)[d]\ \forall d: d \in U(S) \leftrightarrow B(a), B(b) \notin Y$ **

$M_Y(H) \models A(a) \vee B(b) \leftrightarrow M_Y(H) \models A(a)$ ó $M_Y(H) \models B(b)$

$M_Y(H) \models A(a) \leftrightarrow A(a) \in Y$ contradice *

$M_Y(H) \models B(b) \leftrightarrow B(b) \in Y$ contradice **

Por lo tanto $cl(\neg A)$ no tiene Modelos de Herbrand y entonces A es válida

P-satisfacibilidad

<u>Cláusula cerrada</u>:
Cláusula sin variables; los argumentos de los símbolos de relación son términos cerrados.

<u>Ejemplo</u>: $C = P(a) \vee Q(a, b)$ a, b constantes

<u>Definición</u>:
S conjunto de cláusulas; P conjunto de términos cerrados. P(S) es el conjunto de todas las instancias de cláusulas de S donde las variables de S se sustituyen por términos de P.

<u>Ejemplo</u>:
$S = \{ R(x) \vee T(x, y), \neg R(b), R(a) \vee \neg T(a, z) \}$ $P = \{ a, b \}$ a, b ctes.

$P(S) = \{ R(a) \vee T(a, a), R(a) \vee T(a, b), R(b) \vee T(b, a), R(b) \vee T(b, b), \neg R(b), R(a) \vee \neg T(a, a), R(a) \vee \neg T(a, b) \}$

P-satisfacibilidad

Definición:
Sea S conjunto de cláusulas cerradas. S es proposicionalmente satisfacible o p-satisfacible si S es satisfacible como un conjunto de cláusulas proposicionales, donde las fórmulas atómicas cerradas $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ que ocurren en S se tratan como variables proposicionales.

Ejemplo:
$P(S) = \{ R(a) \vee T(a, a), R(a) \vee T(a, b), R(b) \vee T(b, a), R(b) \vee T(b, b), \neg R(b), R(a) \vee \neg T(a, a), R(a) \vee \neg T(a, b) \}$

P(S) se puede escribir como un conj. de cláusulas proposicionales S'

$p_1 = R(a) \quad p_2 = R(b) \quad p_3 = T(a, a) \quad p_4 = T(a, b) \quad p_5 = T(b, a) \quad p_6 = T(b, b)$

$S' = \{p_1 \vee p_3, p_1 \vee p_4, p_2 \vee p_5, p_2 \vee p_6, \neg p_2, p_1 \vee \neg p_3, p_1 \vee \neg p_4 \}$

P-satisfacibilidad

$S' = \{p_1 \vee p_3, p_1 \vee p_4, p_2 \vee p_5, p_2 \vee p_6, \neg p_2, p_1 \vee \neg p_3, p_1 \vee \neg p_4 \}$

Se puede comprobar que la valuación

$v(p_1) = 1 \quad v(p_2) = 0 \quad v(p_3) = v(p_4) = 0 \qquad v(p_5) = v(p_6) = 1$

satisface a S'

Por lo tanto, como S' es satisfacible, S es p-satisfacible.

P-satisfacibilidad

Lema:
Sea S un conjunto de cláusulas cerradas. Entonces S es p-satisfacible sí y sólo sí S tiene un Modelo de Herbrand.

Ejemplo:
S = { R(x) $\vee$ T(x, y), $\neg$R(b), R(a) $\vee$ $\neg$T(a, z) } a, b ctes.

U(S) = { a, b }
B(S) = { R(a), R(b), T(a, a), T(a, b), T(b, a), T(b, b) }

S es p-satisfacible entonces debe tener un Modelo de Herbrand

Sea Y $\subseteq$ B(S) tal que $M_y(H) \models S \leftrightarrow$

$M_y(H) \models R(x) \vee T(x, y)$ y $M_y(H) \models \neg R(b)$ y $M_y(H) \models R(a) \vee \neg T(a, z)$

P-satisfacibilidad

Ejemplo:
S = { R(x) $\vee$ T(x, y), $\neg$R(b), R(a) $\vee$ $\neg$T(a, z) } a, b ctes.

⇨ **$M_y(H) \models \neg R(b) \leftrightarrow R(b) \notin Y$**

⇨ **$M_y(H) \models R(a) \vee \neg T(a, z) \leftrightarrow R(a) \in Y$ ó $T(a, d) \notin Y \quad \forall d: d \in U(S)$**

⇨ **$M_y(H) \models R(x) \vee T(x, y) \leftrightarrow$**

$M_y(H) \models (R(x) \vee T(x, y))[d_1, d_2] \quad \forall d_1, d_2: d_1, d_2 \in U(S)$

P-satisfacibilidad

⇨ $M_y(H) \models R(x) \lor T(x, y) \leftrightarrow$

$M_y(H) \models (R(x) \lor T(x, y))[d_1, d_2] \quad \forall d_1, d_2: d_1, d_2 \in U(S)$

$d_1=d_2 = a$

$M_y(H) \models R(a) \lor T(a, a) \leftrightarrow M_y(H) \models R(a)$ ó $M_y(H) \models T(a, a)$

$d_1= a, d_2 = b$

$M_y(H) \models R(a) \lor T(a, b) \leftrightarrow M_y(H) \models R(a)$ ó $M_y(H) \models T(a, b)$

$d_1= b, d_2 = a$

$M_y(H) \models R(b) \lor T(b, a) \leftrightarrow M_y(H) \models R(b)$ ó $M_y(H) \models T(b, a)$

$d_1=d_2 = b$

$M_y(H) \models R(b) \lor T(b, b) \leftrightarrow M_y(H) \models R(b)$ ó $M_y(H) \models T(b, b)$

P-satisfacibilidad

$M_y(H) \models \neg R(b) \leftrightarrow R(b) \notin Y$ ✓ (1)

$M_y(H) \models R(a) \lor \neg T(a, z) \leftrightarrow R(a) \in Y$ ✓ (2)

$M_y(H) \models R(a) \lor T(a, a) \leftrightarrow M_y(H) \models R(a)$ ó $M_y(H) \models T(a, a)$

✓ por (2)

$M_y(H) \models R(a) \lor T(a, b) \leftrightarrow M_y(H) \models R(a)$ ó $M_y(H) \models T(a, b)$

✓ por (2)

$M_y(H) \models R(b) \lor T(b, a) \leftrightarrow M_y(H) \models R(b)$ ó $M_y(H) \models T(b, a)$

NO por (1) ✓

$M_y(H) \models R(b) \lor T(b, b) \leftrightarrow M_y(H) \models R(b)$ ó $M_y(H) \models T(b, b)$

NO por (1) ✓

Podemos definir Y = { R(a), T(b, a), T(b, b)}

S tiene un Modelo de Herbrand

P-satisfacibilidad

$Y = \{ R(a), T(b, a), T(b, b)\}$

Está asociado a la valuación definida en resolución por p-satisfacible

$v(p_1) = 1 \quad v(p_2) = 0 \quad v(p_3) = v(p_4) = 0 \qquad v(p_5) = v(p_6) = 1$

$p_1 = R(a) \quad p_2 = R(b) \quad p_3 = T(a, a) \quad p_4 = T(a, b) \quad p_5 = T(b, a) \quad p_6 = T(b, b)$

P-satisfacibilidad

Teorema:

Sea S un conjunto de cláusulas (no necesariamente cerradas).
Las siguientes condiciones son equivalentes:

- **S tiene Modelos de Herbrand**
- **U(S)(S) es p-satisfacible (U(S)(S) denota el conjunto de todas las instancias cerradas de cláusulas de S sobre U(S))**
- **Todo subconjunto finito $S_0 \subseteq U(S)(S)$ es p-satisfacible**

P-satisfacibilidad

Teorema:

Sea S un conjunto de cláusulas.
Las siguientes condiciones son equivalentes:

- **S es insatisfacible**
- **S no tiene modelos**
- **S no tiene Modelos de Herbrand**
- **U(S)(S) es p-insatisfacible**
- **Existe un subconjunto finito $S_0 \subseteq$ U(S)(S) que es p-insatisfacible**
- **Existe un subconjunto finito $S_0 \subseteq$ U(S)(S) tal que $S_0 \vdash_R \perp$**

P-satisfacibilidad

Ejemplo:

S = { A(x, b) $\vee$ A(f(a), y), $\neg$A(f(a), b), $\neg$A(f(a), f(a)) }   a, b constantes

U(S) = { a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), ...}

B(S) = { A(a, a), A(a, b), A(b, a), A(b, b), A(a, f(a)), A(f(a), a),
A(b, f(a)), A(f(a), b), ..., A(a, f(b)), A(f(b), a), ...}

U(S)(S) = {A(a, b) $\vee$ A(f(a), a), A(a, b) $\vee$ A(f(a), b), A(b, b) $\vee$ A(f(a), a),
A(b, b) $\vee$ A(f(a), b), ..., A(f(a), b) ~~$\vee$ A(f(a), b)~~, $\neg$A(f(a), b), $\neg$A(f(a), f(a))}

El subconjunto finito
S_0 = {A(f(a), b), $\neg$A(f(a), b)} es claramente insatisfacible

S es insatisfacible

P-satisfacibilidad

Ejemplo:

S = { A(x, b), ¬A(z, b) ∨ B(y), ¬B(f(b))}   b constante
U(S) = { b, f(b), f(f(b)), f(f(f(b))), ...}

B(S) = { A(b, b), A(b, f(b)), A(f(b), b), A(f(b), f(b)), ...,
B(b), B(f(b)), B(f(f(b))), ...}

Supongamos que existe un modelo M_Y(H), tal que M_Y(H) ⊨ S

Entonces M_Y(H) ⊨ A(x, b) ∧ (¬A(z, b) ∨ B(y)) ∧ ¬B(f(b))

- **Como M_Y(H) ⊨ ¬B(f(b))   entonces M_Y(H) ⊭ B(y)**
- **Como M_Y(H) ⊨ ¬A(z, b) ∨ B(y) entonces debe ser M_Y(H) ⊭ A(z, b)**
- **Pero   entonces M_Y(H) ⊭ A(x, b)**

S es insatisfacible

P-satisfacibilidad

S = { A(x, b), ¬A(z, b) ∨ B(y), ¬B(f(b)) }   b constante

S es insatisfacible

Entonces

¬S = ¬ ∀x ∀z ∀y(A(x, b) ∧ (¬A(z, b) ∨ B(y)) ∧ ¬B(f(b)))   Es válida

¬S = ∃x ∃z ∃y (¬A(x, b) ∨ A(z, b) ∧ ¬B(y) ∨ B(f(b)))   Es válida

Otra forma para probar que S es insatisfacible:

Mostrar que existe S_0 ⊆ U(S)(S) tal que S_0 es insatisfacible

S_0 = { A(b, b), ¬A(b, b) ∨ B(f(b)), ¬B(f(b)) }