Semántica de Primer Orden

Para interpretar una fórmula de la lógica de predicados de primer orden:

✓ determinar qué objetos representan los términos (**Dominio)**

✓ definir las **funciones** y qué propiedades/relaciones representan los **predicados**

Determinar el **valor de verdad** de la fórmula

Semántica de Primer Orden

Modelos o interpretaciones:

Sea L = <R, F, C> un lenguaje de primer orden. Un modelo M en L es una estructura M = <D, R^D, F^D, C^D> donde:

✓ **D dominio** o universo de interpretación (conjunto no vacío del cual las variables toman valores)

✓ **R^D** conjunto de relaciones n-arias sobre D tal que para cada símbolo $P \in R$ existe una relación $P^D \subseteq D^n$ asignada a P

✓ **F^D** conjunto de funciones n-arias sobre D tal que para cada símbolo $f \in F$ existe una función $f^D: D^n \rightarrow D$ asignada a f

✓ **C^D** conjunto de elementos distinguidos de D tal que para cada constante $c \in C$ existe un elemento $c^D \in D$ asignado a c

Semántica de Primer Orden

Relaciones y Funciones sobre un Dominio:

Sea D un conjunto no vacío.

• El conjunto D^n es el conjunto de todas las n-uplas de D. Una relación n-aria R sobre D es un subconjunto de D^n

• Una función f: $D^n \rightarrow D$ hace corresponder a cada n-upla de su dominio D^n un elemento de D.

Ejemplo D = {a, b, c}

D^2 = {(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)}

D^3 = {(a, a, a), (a, a, b), (a, a, c), ..., (c, c, a), (c, c, b), (c, c, c)}

Una relación binaria R es un subconjunto de D^2. Posibles relaciones binarias: $R_1 = \emptyset$ $R_2 = D^2$ R_3 = {(a, a), (a, b), (a, c), (b, b)}

Semántica de Primer Orden

Valor de verdad de una fórmula en un modelo:

Sea A una sentencia y M un modelo, M = <D, R^D, F^D, C^D>. El valor de verdad de A en el modelo M, v(A), se define reemplazando primero cada constante a_j de A por el elemento $d_j \in$ D asignado, y luego por inducción sobre la estructura de A:

1) A = P(a_1, ..., a_n) luego v(A) = T sí y sólo sí (d_1, ..., d_n) $\in P^D$ $P \in R$

2) v($\neg$A) = T sí y sólo sí v(A) = F

3) $A = A_1 \vee A_2$ v(A) = T sí y sólo sí v(A_1) = T o v(A_2) = T
$A = A_1 \wedge A_2$ v(A) = T sí y sólo sí v(A_1) = T y v(A_2) = T
$A = A_1 \rightarrow A_2$ v(A) = T sí y sólo sí v($\neg A_1$) = T o v(A_2) = T

4) $A = \forall x\, A_1$ v(A) = T sí y sólo sí para todo $d \in D$, v(A_1[d]) = T

5) $A = \exists x\, A_1$ v(A) = T sí y sólo sí para algún $d \in D$, v(A_1[d]) = T

Semántica de Primer Orden

Definición

Dada una fórmula A y un modelo M, si v(A) = T en M diremos que A es válida en el modelo M, o que M es un modelo para A.

En símbolos $\mathbf{M \models A}$

Ejemplo: Sea L = <{P}, {f, g}, {a, b}> P binario, f y g binarias, se define

$M = < Z, \{P^D\}, \{f^D, g^D\}, \{a^D, b^D\} >$ Z = conj. de números enteros

$P^D(x, y) = \{(x, y) \in D^2 : x \leq y\}$

$f^D(x, y) = x * y$ $g^D(x, y) = x + y$ $a^D = 0$ $b^D = 2$

1) $\mathbf{M \models P(a, b)}$ **2)** $\mathbf{M \models \neg P(g(b,b), b)}$ **3)** $\mathbf{M \models P(a, b) \vee P(b, a)}$

4) $\mathbf{M \models \forall x\, (P(x, a) \rightarrow P(a, f(x, x)))}$ **5)** $\mathbf{M \models \exists x P(g(b, b), x)}$

SON FORMULAS VALIDAS EN M

Semántica de Primer Orden

Ejemplo

$M = < Z, \{P^D\}, \{f^D, g^D\}, \{a^D, b^D\} >$ Z = conj. de números enteros

$P^D(x, y) = \{(x, y) \in D^2 : x \leq y\}$

$f^D(x, y) = x * y$ $g^D(x, y) = x + y$ $a^D = 0$ $b^D = 2$

A(x) = P(g(x, b), b)   **x variable libre**

En M $\mathbf{A(x) = x + 2 \leq 2}$ **x variable libre**

Es verdadera en M cuando a x se asignan valores negativos ó 0.

Valuación: asigna elementos del dominio a variable libres

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase – Mg. Virginia Mauco – Facultad Cs. Exactas – UNCPBA - 2009

Semántica de Primer Orden

Sea L = <R, F, C> y M = < D, R^D, F^D, C^D > un modelo

Una valuación o asignación v es una función v: Var $\rightarrow$ D

$v = (a_1, ..., a_n, ...)$ donde cada $a_i \in D$ y $v(p_i) = a_i$ para cada $p_i \in$ Var

$\vec{a} = (a_1, ..., a_n, ...)$ notación vectorial

El valor de un término $t(x_1, ..., x_n)$ bajo una valuación $\vec{a} = (a_1, ..., a_n, ...)$

$t^D[\vec{a}]$ es un elemento de D que se define como:

1) Si $\mathbf{t \in Var}$, $\mathbf{t_i = x_i}$ entonces $\mathbf{x_i^D[\vec{a}] = a_i}$
2) Si $\mathbf{t \in C, t = c}$, y c^D es la interpretación de c en D, entonces $\mathbf{t^D[\vec{a}] = c^D}$
3) Si $\mathbf{t = f(t_1, t_2, ..., t_n)}$ $\mathbf{t_1, t_2, ..., t_n \in Ter(L)}$ y f símbolo de función n-ario,

   $\mathbf{t^D[\vec{a}] = f^D(t_1, t_2, ..., t_n)[\vec{a}] = f^D(t_1^D[\vec{a}], t_2^D[\vec{a}], ..., t_n^D[\vec{a}])}$

   $f^D: D^n \rightarrow D$ función n-aria que interpreta a f

Semántica de Primer Orden

Sea M = < D, R^D, F^D, C^D > un modelo y $A(x_1, ..., x_n)$ una fórmula.

Sea $\vec{a}$ una valuación. $A(x_1, ..., x_n)$ es válida bajo $\vec{a}$, o $\vec{a}$ satisface a $A(x_1, ..., x_n)$, en símbolos $M \models A(x_1, ..., x_n)\ [\vec{a}]$ si se cumple:

1) Si $A \in At(L)$, $A = P(t_1, t_2, ..., t_n)$ $t_i(x_1, x_2, ..., x_n) \in Ter(L)$ y

   P es un símbolo de predicado n-ario, $P \in R$

   $M \models P(t_1, ..., t_n)[\vec{a}] \leftrightarrow (t_1^D[\vec{a}], t_2^D[\vec{a}], ..., t_n^D[\vec{a}]) \in P^D$

2) Si $A = \neg B$ $M \models A[\vec{a}] \leftrightarrow M \not\models B[\vec{a}] \leftrightarrow M \models \neg B[\vec{a}]$

3) Si $A = B \wedge C$ $M \models (B \wedge C)[\vec{a}] \leftrightarrow M \models B[\vec{a}]$ y $M \models C[\vec{a}]$

4) Si $A = B \vee C$ $M \models (B \vee C)[\vec{a}] \leftrightarrow M \models B[\vec{a}]$ o $M \models C[\vec{a}]$

5) Si $A = B \rightarrow C$ $M \models (B \rightarrow C)[\vec{a}] \leftrightarrow M \models \neg B[\vec{a}]$ o $M \models C[\vec{a}]$

Semántica de Primer Orden

6) Si $A(x_1, ..., x_n) = \forall x B(x, x_1, ..., x_n)$ entonces

$M \models \forall x B(x, x_1, ..., x_n)\,[\vec{a}] \;\leftrightarrow\;$ para todo $d \in D$ $M \models B(x, x_1, ..., x_n)\,[d, \vec{a}]$

7) Si $A(x_1, ..., x_n) = \exists x B(x, x_1, ..., x_n)$ entonces

$M \models \exists x B(x, x_1, ..., x_n)\,[\vec{a}] \;\leftrightarrow\;$ existe $d \in D$ $M \models B(x, x_1, ..., x_n)\,[d, \vec{a}]$

Definiciones: Sea M un modelo y A una fórmula:

✓ A es **válida bajo una valuación en M** sí y sólo sí existe al menos una valuación $\vec{a}$ tal que $M \models A\,[\vec{a}]$

✓ A es **válida en M** sí y sólo sí A es válida bajo toda valuación en M

$M \models A \leftrightarrow M \models A[\vec{a}]$ para toda valuación $\vec{a}$

✓ A es **falsa en M** sí y sólo sí A es falsa bajo toda valuación en M

$M \models A \leftrightarrow M \not\models A[\vec{a}]$ para toda valuación $\vec{a}$

Semántica de Primer Orden

Ejemplos:

Sea $M = \langle D, \{P^D, Q^D, R^D\}, \{\ \}, \{c^D\}\rangle$ P y Q unarios y R binario

$D = \{1, 2, 3, 4\}$ $c^D = 2$

$P^D = \{1, 2\}$ $Q^D = \{3, 4\}$ $R^D = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$

✓ $A(x) = \exists y R(x, y)$ es válida bajo una valuación en M

✓ $A(x) = P(x) \vee Q(x)$ es válida en M (válida bajo toda valuación)

✓ $A(x) = P(x) \wedge Q(x)$ es falsa en M (falsa bajo toda valuación)

✓ $A = \forall x \exists y (R(x, y) \vee Q(y))$ es válida en M

✓ $A = \exists y \forall x (R(x, y) \wedge Q(y))$ es falsa en M

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase – Mg. Virginia Mauco – Facultad Cs. Exactas – UNCPBA - 2009

Semántica de Primer Orden

Definiciones:

Sea A una fórmula:

✓ A es **satisfacible** sí y sólo sí A es **válida en al menos un modelo**

✓ A es **válida o lógicamente válida** sí y sólo sí **A es válida en todo modelo**

✓ A es **contradictoria** sí y sólo sí A es **falsa en todo modelo**

Semántica de Primer Orden

Ejemplo:

Sea M = $<D, \{A^D, B^D, C^D\}, \{f^D, g^D\}, \{c^D, d^D\}>$

D = $\{x \in \{a, b\}^*$ y x empieza con a $\}$

$A^D(x, y) = \{(x, y) \in D^2$: x es prefijo de y$\}$ (es decir $y = x\mathbf{.}z$ para $z \in \{a, b\}^*$)

$B^D(x, y) = \{(x, y) \in D^2$: x es subcadena de y$\}$ $C^D(x, y) = \{(x, y) \in D^2: x = y\}$

$c^D = a$ $d^D = aa$

$f^D(x, y) = x\mathbf{.}y$ (x concatenada con y) $g^D(x) = a$

✓ $\exists x \forall y\, (A(x, y) \land \neg C(x, d))$

✓ $\forall x \forall y\, (C(x, f(c, y)) \to A(f(c, c), x))$

✓ $\forall x\, (B(y, x) \to A(y, x))$

✓ $\forall x \forall y \forall z\, (A(x, y) \to A(f(x, z), f(y, z)))$

Semántica de Primer Orden

Equivalencia Lógica:

Sean A y B fórmulas con las mismas variables libres. $A \equiv B$ sí y sólo sí para todo modelo M, $M \models A \leftrightarrow M \models B$.

Es decir, A y B son válidas en los mismos modelos.

Para cualquier fórmula A se verifica:

- ✓ $\neg\forall xA \equiv \exists x\neg A$
- ✓ $\neg\exists xA \equiv \forall x\neg A$
- ✓ $\forall xA \equiv \neg\exists x\neg A$
- ✓ $\exists xA \equiv \neg\forall x\neg A$

Semántica de Primer Orden

Sentencias satisfacibles:

Sea Γ un conjunto de sentencias en un lenguaje L.

Γ es satisfacible si existe un modelo M tal que $M \models A$ para toda sentencia $A \in \Gamma$.

En caso contrario Γ es insatisfacible.

Ejemplo:

1) $\Gamma = \{ \exists x(P(x) \wedge Q(x)), \forall x(P(x) \rightarrow R(x, x)), \forall x(Q(x) \rightarrow \neg R(x, x))\}$

Es un conjunto de sentencias insatisfacible

2) $\Gamma = \{\forall x\exists yR(x, y), \forall x\forall y(R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x))\}$

Es un conjunto de sentencias satisfacible

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase – Mg. Virginia Mauco – Facultad Cs. Exactas – UNCPBA - 2009

Semántica de Primer Orden

Consecuencia Semántica:

Una fórmula A es consecuencia semántica de un conjunto de sentencias Γ, $\Gamma \models A$, si para cada modelo M tal que $M \models \Gamma$ entonces $M \models A$.

Ejemplo:

$\{\forall x(P(x) \to \neg Q(x)), \forall x(P(x) \wedge T(x))\} \models \forall x(T(x) \wedge \neg Q(x))$

Propiedades de la Consecuencia Semántica:

Sea Γ un conjunto de sentencias y A una sentencia.

- ✓ Si $A \in \Gamma$ entonces $\Gamma \models A$
- ✓ Si $\Gamma \models A$ y $\Gamma \subseteq \Delta$ entonces $\Delta \models A$. Δ conjunto de sentencias

Teorema de la Deducción:

Sea $\Gamma \cup \{A, B\}$ un conjunto de sentencias. $\Gamma \cup \{A\} \models B \leftrightarrow \Gamma \models A \to B$

Corolario:

Sea $\Gamma \cup \{A\}$ un conjunto de sentencias. $\Gamma \models A \leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg A\}$ es insatisfacible