

Cláusulas de Horn

- Cláusulas que contienen como máximo un literal positivo

1) **REGLAS** → Cláusulas de programa

$$\forall x_1 \dots \forall x_n (\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \dots \vee \neg P_n \vee Q) \equiv \forall x_1 \dots \forall x_n (P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q)$$

2) **HECHOS** (o cláusulas unitarias) → Cláusulas de programa

$$\forall x_1 \dots \forall x_n Q$$

3) **CLAUSULAS OBJETIVO** (o cláusulas goal)

$$\begin{aligned} \forall x_1 \dots \forall x_n (\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \dots \vee \neg P_n) &\equiv \forall x_1 \dots \forall x_n \neg(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \\ &\equiv \neg \exists x_1 \dots \exists x_n (P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \end{aligned}$$

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase - Mg. Virginia Mauco - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Lógica de Programas

- Es un conjunto de cláusulas de programa.
- Es satisfacible (tiene Modelos de Herbrand).

Sea P una Lógica de Programas y G una cláusula objetivo.

El problema básico en programación lógica es determinar si

$$P \models \neg G$$

Es decir, si $M \models P$ entonces $M \models \neg G$

$$P \models \neg G \text{ sí y sólo sí } P \cup \{G\} \text{ es insatisfacible sí y sólo sí } P \cup \{G\} \vdash_R \perp$$

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase - Mg. Virginia Mauco - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Resolución para Cláusulas de Horn

Refinamientos

- ✓ *Resolución Lineal*
 - ✓ *Input Resolución*
 - ✓ *Resolución Unitaria*
- } Métodos CORRECTOS y COMPLETOS para cláusulas de Horn

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase - Mg. Virginia Mauco - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Resolución Lineal

Definición:

Sea $S \cup \{C\}$ un conjunto de cláusulas de Horn. Una *deducción por resolución lineal* de C a partir de S es una deducción por resolución en la cual, en cada paso, una de las cláusulas es la resolvente del paso previo, y la otra es una cláusula de S ó una cláusula obtenida en algún paso previo (salvo para la primera resolvente donde ambas cláusulas pertenecen a S).

TEOREMA

Sea S un conjunto de cláusulas de Horn. Si S es insatisfacible entonces existe una *refutación lineal* de S .



Resolución lineal es completo para cláusulas de Horn

Resolución lineal es completo para cualquier conjunto de cláusulas

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase - Mg. Virginia Mauco - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Input Resolución

P una Lógica de Programas; G una cláusula objetivo.

$P \models \neg G$ sí y sólo sí $P \cup \{G\} \vdash_R \perp$

Definición:

P una Lógica de Programas; G una cláusula objetivo. Una *input refutación* de $P \cup \{G\}$ es una refutación lineal de $P \cup \{G\}$ comenzando con G y donde todas las cláusulas de entrada son cláusulas de P.



Input resolución es completo para cláusulas de Horn

(PERO Input resolución NO es completo para cualquier conj. de cláusulas)

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase - Mg. Virginia Mauco - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Resolución Unitaria

Definición

Sea $S \cup \{C\}$ un conjunto de cláusulas de Horn. Una *deducción por resolución unitaria* de C a partir de S es una deducción por resolución de C a partir de S donde en cada paso de resolución interviene una cláusula unitaria.

TEOREMA

Sea S un conjunto de cláusulas de Horn. Si S es insatisfacible entonces existe una *refutación unitaria* de S.



Resolución unitaria es completa para cláusulas de Horn

(PERO Resolución unitaria NO es completa para cualquier conj. de cláusulas)

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase - Mg. Virginia Mauco - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Sustitución de Respuesta Correcta

✓ Problema de la Prog. Lógica \longrightarrow $P \models \neg G$

✓ P es satisficible y tiene al menos un $M_y(H)$ tal que $Y \subseteq B(P)$



$$M_y(H) \models \neg G$$

$$G = \forall x_1 \dots \forall x_n (\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \dots \vee \neg P_n) \equiv \neg \exists x_1 \dots \exists x_n (P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n)$$

✓ $M_y(H) \models \neg G \Leftrightarrow M_y(H) \models \exists x_1 \dots \exists x_n (P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n)$

✓ Debe existir una sucesión finita $a_1, a_2, \dots, a_k \in U(P)$ tal que

$$M_y(H) \models (P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) [a_1, a_2, \dots, a_k]$$

\swarrow
términos cerrados

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase - Mg. Virginia Mauco - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Sustitución de Respuesta Correcta

✓ $M_y(H) \models (P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) [a_1, a_2, \dots, a_k]$

✓ Sustitución $e = \{x_1/a_1, x_2/a_2, \dots, x_k/a_k\}$

✓ $M_y(H) \models (P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n)e$

✓ En síntesis $P \models \neg G \Leftrightarrow$ existe una sustitución

$e: \text{Var}(G) \rightarrow U(P)$ tal que

$$P \models \neg Ge$$

Definición

P lógica de programas, G cláusula objetivo

e es una *sustitución de respuesta correcta* para $\text{Var}(G)$ si

$$P \models \neg Ge$$

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase - Mg. Virginia Mauco - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Sustitución de Respuesta Correcta

Ejemplo

$$P = \{ \neg E(x, y) \vee \neg E(y, z) \vee A(z, x), E(f(t), t) \}$$

$$G = \neg A(u, v)$$

$$P \models \neg G \Leftrightarrow \text{existe } e \text{ tal que } P \models \neg G_e$$

Una sustitución de respuesta correcta es $e = \{ u/f(f(t)), v/t \}$

$$\text{Como } \neg G_e = \neg (\neg A(f(f(t)), t)) = A(f(f(t)), t)$$

$$\text{entonces } P \models \exists u \exists v A(u, v)$$

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase - Mg. Virginia Mauco - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Obtención de Respuestas por Resolución

Ejemplo

El problema consiste en determinar caminos entre ciudades. Hay un camino entre dos ciudades si hay una ruta que las une. Además, hay un camino entre una ciudad x y una ciudad z , si hay una ruta que une a x con otra ciudad t , seguida de un camino de t a z .

Dadas cuatro ciudades a, b, c y d , se sabe que hay ruta entre: a y b ; a y c ; b y c ; c y d .

Se pide contestar:

1) ¿Existe algún camino a la ciudad d ?

2) Si existe, ¿desde qué ciudad/es?

Formalizamos el problema en lógica de predicados de primer orden:

➤ Dominio: $D = \{a, b, c, d\}$

➤ Predicados básicos:

$$\text{ruta}(x, y) = \{ (x, y) \in D^2: \text{hay ruta de } x \text{ a } y \}$$

$$\text{camino}(x, y) = \{ (x, y) \in D^2: \text{hay camino de } x \text{ a } y \}$$

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase - Mg. Virginia Mauco - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Obtención de Respuestas por Resolución

$\forall x \forall y (\text{ruta}(x, y) \rightarrow \text{camino}(x, y))$

$\forall x \forall z \forall t (\text{ruta}(x, t) \wedge \text{camino}(t, z) \rightarrow \text{camino}(x, z))$

$\text{ruta}(a, b) \quad \text{ruta}(b, a) \quad \text{ruta}(a, c) \quad \text{ruta}(c, a)$

$\text{ruta}(b, c) \quad \text{ruta}(c, b) \quad \text{ruta}(c, d) \quad \text{ruta}(d, c)$

Respuesta a la primera pregunta: $\exists u \text{camino}(u, d)$

1) $\neg \text{ruta}(x, y) \vee \text{camino}(x, y)$

7) $\text{ruta}(b, c)$

2) $\neg \text{ruta}(w, t) \vee \neg \text{camino}(t, z) \vee \text{camino}(w, z)$

8) $\text{ruta}(c, b)$

3) $\text{ruta}(a, b)$

9) $\text{ruta}(c, d)$

4) $\text{ruta}(b, a)$

10) $\text{ruta}(d, c)$

5) $\text{ruta}(a, c)$

11) $\neg \text{camino}(u, d)$

6) $\text{ruta}(c, a)$

(negación de la conclusión)

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase - Mg. Virginia Mauco - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Obtención de Respuestas por Resolución

1) $\neg \text{ruta}(x, y) \vee \text{camino}(x, y)$

7) $\text{ruta}(b, c)$

2) $\neg \text{ruta}(w, t) \vee \neg \text{camino}(t, z) \vee \text{camino}(w, z)$

8) $\text{ruta}(c, b)$

3) $\text{ruta}(a, b)$

9) $\text{ruta}(c, d)$

4) $\text{ruta}(b, a)$

10) $\text{ruta}(d, c)$

5) $\text{ruta}(a, c)$

11) $\neg \text{camino}(u, d)$

6) $\text{ruta}(c, a)$

12) $1)e_1 = \neg \text{ruta}(u, d) \vee \text{camino}(u, d)$

$e_1 = \{x/u, y/d\}$

13) $\text{Res}(11, 12) = \neg \text{ruta}(u, d)$

14) $13)e_2 = \neg \text{ruta}(c, d)$

$e_2 = \{u/c\}$

15) $\text{Res}(9, 14) = \perp$

Como se obtuvo \perp , significa que la conclusión se deduce de las hipótesis \rightarrow existe un camino a la ciudad d

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase - Mg. Virginia Mauco - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Obtención de Respuestas por Resolución

Se probó que existe un camino a la ciudad d, pero ¿desde qué ciudades?

Método:

Agregar en todas las cláusulas que provienen de la negación de la conclusión, un predicado respuesta con tantos argumentos como variables haya que instanciar para proporcionar las respuestas.

- | | |
|--|--|
| 1) $\neg\text{ruta}(x, y) \vee \text{camino}(x, y)$ | 7) $\text{ruta}(b, c)$ |
| 2) $\neg\text{ruta}(w, t) \vee \neg\text{camino}(t, z) \vee \text{camino}(w, z)$ | 8) $\text{ruta}(c, b)$ |
| 3) $\text{ruta}(a, b)$ | 9) $\text{ruta}(c, d)$ |
| 4) $\text{ruta}(b, a)$ | 10) $\text{ruta}(d, c)$ |
| 5) $\text{ruta}(a, c)$ | 11) $\neg\text{camino}(u, d) \vee \text{respuesta}(u)$ |
| 6) $\text{ruta}(c, a)$ | |

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase - Mg. Virginia Mauco - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Obtención de Respuestas por Resolución

- | | |
|--|--|
| 1) $\neg\text{ruta}(x, y) \vee \text{camino}(x, y)$ | 7) $\text{ruta}(b, c)$ |
| 2) $\neg\text{ruta}(w, t) \vee \neg\text{camino}(t, z) \vee \text{camino}(w, z)$ | 8) $\text{ruta}(c, b)$ |
| 3) $\text{ruta}(a, b)$ | 9) $\text{ruta}(c, d)$ |
| 4) $\text{ruta}(b, a)$ | 10) $\text{ruta}(d, c)$ |
| 5) $\text{ruta}(a, c)$ | 11) $\neg\text{camino}(u, d) \vee \text{respuesta}(u)$ |
| 6) $\text{ruta}(c, a)$ | |
| 12) $1)e_1 = \neg\text{ruta}(u, d) \vee \text{camino}(u, d)$ | $e_1 = \{x/u, y/d\}$ |
| 13) $\text{Res}(11, 12) = \neg\text{ruta}(u, d) \vee \text{respuesta}(u)$ | |
| 14) $13)e_2 = \neg\text{ruta}(c, d) \vee \text{respuesta}(c)$ | $e_2 = \{u/c\}$ |
| 15) $\text{Res}(9, 14) = \text{respuesta}(c)$ | |

Significado de $\text{respuesta}(c)$

Hay un camino a la ciudad d desde la ciudad c

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase - Mg. Virginia Mauco - Facultad Cs. Exactas - UNCPBA - 2009

Obtención de Respuestas por Resolución

Otra solución:

- | | |
|--|---|
| 1) $\neg \text{ruta}(x, y) \vee \text{camino}(x, y)$ | 7) $\text{ruta}(b, c)$ |
| 2) $\neg \text{ruta}(w, t) \vee \neg \text{camino}(t, z) \vee \text{camino}(w, z)$ | 8) $\text{ruta}(c, b)$ |
| 3) $\text{ruta}(a, b)$ | 9) $\text{ruta}(c, d)$ |
| 4) $\text{ruta}(b, a)$ | 10) $\text{ruta}(d, c)$ |
| 5) $\text{ruta}(a, c)$ | 11) $\neg \text{camino}(u, d) \vee \text{respuesta}(u)$ |
| 6) $\text{ruta}(c, a)$ | |
| 12) $2)e_1 = \neg \text{ruta}(u, t) \vee \neg \text{camino}(t, d) \vee \text{camino}(u, d)$ | $e_1 = \{w/u, z/d\}$ |
| 13) $\text{Res}(11, 12) = \neg \text{ruta}(u, t) \vee \neg \text{camino}(t, d) \vee \text{respuesta}(u)$ | |
| 14) $13)e_2 = \neg \text{ruta}(b, c) \vee \neg \text{camino}(c, d) \vee \text{respuesta}(b)$ | $e_2 = \{u/b, t/c\}$ |
| 15) $\text{Res}(7, 14) = \neg \text{camino}(c, d) \vee \text{respuesta}(b)$ | |
| 16) $1)e_3 = \neg \text{ruta}(c, d) \vee \text{camino}(c, d)$ | $e_3 = \{x/c, y/d\}$ |
| 17) $\text{Res}(15, 16) = \neg \text{ruta}(c, d) \vee \text{respuesta}(b)$ | |
| 18) $\text{Res}(9, 17) = \text{respuesta}(b)$ | |

Significado de respuesta(b)
Hay un camino a la ciudad d desde la ciudad b