Lógica Proposicional (LP)

Proposición

- Enunciado del que puede afirmarse si es verdadero o falso
- Oración declarativa

¿Cuáles de las siguientes son proposiciones?

1) Pedro es alto.
2) Juan es estudiante.
3) Ayer llovió.
4) ¿Quién es?
5) Esta mesa es azul.
6) 3 es impar.

Lógica Proposicional

Proposición

Simple

- Mi perro es negro.
- Juan es estudiante

Compuesta

- María es arquitecta o Juan es músico.
- Si ayer llovió entonces hoy sale el sol.
- 2 * 3 = 6 y 7 no es par.

Lógica Proposicional

Definición del Lenguaje de la Lógica Proposicional

➢**Sintaxis**: **cómo definir fórmulas bien formadas**

(fórmulas como cadenas de símbolos)

- **Alfabeto**
- **Lenguaje**

➢**Semántica**: **cómo interpretar esas fórmulas, es decir cómo asignarles un valor de verdad**

(fórmulas como enunciados que pueden ser verdaderos o falsos)

- **Valuaciones**

Lógica Proposicional: Sintaxis

Alfabeto (**A_{PROP}**):

A_{PROP} = Var È {Ø, Ù, Ú, ® } È { (,) }

Símbolos auxiliares

Variables o símbolos proposicionales

(a, b, c, ..., p, q, ...)

Conectivos proposicionales:

$\neg$ negación

$\wedge$ y

$\vee$ o

$\rightarrow$ si ... entonces

Lógica Proposicional: Sintaxis

Lenguaje de la LP – Conjunto de Fórmulas de la LP (F_m):

F_m es el conjunto de cadenas de símbolos de A_{PROP}, F_m Í A^*_{PROP}, que se obtiene aplicando las siguientes reglas:

- ✓ **Para toda variable p Î Var, entonces p Î F_m, es decir Var Í F_m** — Fórmulas atómicas
- ✓ **Si A Î F_m, entonces ØA Î F_m**
- ✓ **Si A, B Î F_m, entonces (AÙ B), (A Ú B), (A ® B) Î F_m** — Fórmulas no atómicas

↑ **((p Ù q) Ú r)   ((p ® q) Ú Øq)   SON FORMULAS DE F_m**

↓ **p Ù q Ú r   ((p ®) Ú Øq)   NO SON FORMULAS DE F_m**

Lógica Proposicional: Sintaxis

Longitud de una Fórmula A (long A):

- ✓ **Si A = p, p Î Var, entonces long(p) = 1**
- ✓ **Si A = ØB, B Î F_m, entonces long(A) = long(B) + 1**
- ✓ **Si A = B * C, con B, C Î F_m, y * es uno de los conectivos Ù, Ú, ®, entonces long(A) = long(B) + long(C) + 1**

Subfórmulas de una Fórmula A (S_f(A)):

- ✓ **S_f(p) = { p }   si p Î Var**
- ✓ **S_f(ØA) = S_f(A) È {ØA} si A Î F_m**
- ✓ **S_f((A * B)) = S_f(A) È S_f(B) È {(A * B)} si A, B Î F_m, y * es uno de los conectivos Ù, Ú, ®**

Lógica Proposicional: Sintaxis

<u>Otra definición de F_m:</u>

<form_log> ::= <form_log> ® <form_or> | <form_or>

<form_or> ::= <form_or> Ú <form_and> | <form_and>

<form_and> ::= <form_and> Ù <factor_log> | <factor_log>

<factor_log> ::= (<form_log>) | Ø<factor_log> | <var_prop>

<var_prop> ::= a | b | c | ... | z

Esta definición tiene en cuenta precedencia de conectivos:

Ø, Ù, Ú, ® **(de mayor a menor)**

Lógica Proposicional: Semántica

• **Interpretación de fórmulas como enunciados a los que se puede asignar sólo uno de dos valores: Verdadero (1, V, T) ó Falso (0, F, ^)**

• **La interpretación o valuación de una fórmula se obtiene como sigue:**

- **se asigna un valor de verdad (1 ó 0) a las variables proposicionales**

- **se interpretan las fómulas no atómicas teniendo en cuenta el significado de los conectivos que contienen**

<u>**Interpretación de conectivos**</u>

Ø	
0	1
1	0

Ú	0	1
0	0	1
1	1	1

«	0	1
0	1	0
1	0	1

Ù	0	1
0	0	0
1	0	1

®	0	1
0	1	1
1	0	1

Lógica Proposicional: Semántica

<u>Valuación</u>:

Es una función v: F_m ® {0, 1} que cumple con las siguientes propiedades para todo A, B Î F_m

- v(ØA) = Øv(A)
- v(A Ù B) = v(A) Ù v(B)
- v(A Ú B) = v(A) Ú v(B)
- v(A ® B) = v(A) ® v(B)

<u>Ejemplo</u>:

Dada la fórmula A = p Ù q ® Øq y la valuación v(p) = 1 y v(q) = 1

v(A) = v(p Ù q ® Øq)
= v(p Ù q) ® v(Øq)
= v(p) Ù v(q) ® Øv(q)
= 1 Ù 1 ® Ø1 = 1 ® 0 = 0

Lógica Proposicional: Semántica

<u>Tablas de Verdad</u>:

Permiten calcular todos los posibles valores de verdad de una fórmula considerando todas las valuaciones posibles.

Fórmula ® secuencia finita de variables y conectivos:

- conociendo valor de verdad de las k variables de la fórmula se puede construir la tabla de verdad
- Tamaño de la tabla de verdad = 2^k filas

<u>Ejemplo</u>: Para la fórmula A = p Ù q ® Øq

p	q	p Ù q	Øq	p Ù q ® Øq
0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	0

Lógica Proposicional: Semántica

Definiciones:

- ✓ **Una tautología es una fórmula A que es verdadera bajo toda valuación.**

  Es decir, A es tautología sí y sólo sí para toda valuación v, v(A) = 1
  En la tabla de verdad, todos los elementos de la columna correspondiente a la fórmula son 1.

  En símbolos $\models A$

- ✓ **Una contradicción es una fórmula A que es falsa bajo toda valuación.**

  Es decir, A es contradicción sí y sólo sí para toda valuación v, v(A) = 0

- ✓ **Una contingencia es una fórmula A que es no es ni tautología ni contradicción.**

- ✓ **Una fórmula A es una tautología sí y sólo sí su negación $\neg A$ es una contradicción.**

Lógica Proposicional: Semántica

Definiciones:

- ✓ **Una valuación v satisface una fórmula A si v(A) = 1**

- ✓ **Una fórmula A se dice satisfacible si existe alguna valuación v que la satisfaga, es decir para alguna valuación v, v(A) = 1. En caso contrario, A es insatisfacible (contradicción).**

- ✓ **Una valuación v satisface un conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq F_m$ si v satisface cada fórmula de Γ, es decir v(A) = 1 para toda fórmula A $\in \Gamma$**

- ✓ **Un conjunto de fórmulas Γ son mutuamente satisfacibles, o consistentes entre sí, si existe al menos una valuación v que satisface cada fórmula de Γ, es decir v(A) = 1 para toda fórmula A $\in \Gamma$**

Lógica Proposicional: Semántica

<u>Equivalencia Lógica</u>:

Dos fórmulas A y B se dicen equivalentes, $A \equiv B$, sí y sólo sí para toda valuación v, $v(A) = v(B)$

$\equiv$ es una relación de equivalencia en el conjunto de las fórmulas F_m, es decir cumple las propiedades:

- **Reflexiva: $A \equiv A$**
- **Simétrica: Si $A \equiv B$ entonces $B \equiv A$**
- **Transitiva: Si $A \equiv B$ y $B \equiv C$ entonces $A \equiv C$**

<u>**Ejemplos**</u>:

- $A \rightarrow B \equiv \neg A \lor B$
- $A \lor \neg A \equiv A \rightarrow A$
- $A \equiv \neg\neg A$

Lógica Proposicional: Semántica

<u>**Equivalencia Lógica**</u>**: Lema**

Sean $A, B \in F_m$. Entonces $A \equiv B$ sí y sólo sí $v(A \leftrightarrow B) = 1$ para toda valuación v.

<u>**Demostración**</u>:

$\rightarrow$) Si $A \equiv B$ entonces para cualquier valuación v, $v(A) = v(B)$.

Por lo tanto $v(A \rightarrow B) = v(A) \rightarrow v(A) = 1$ y $v(B \rightarrow A) = v(B) \rightarrow v(B) = 1$

Entonces $v(A \leftrightarrow B) = v(A \rightarrow B) \land v(B \rightarrow A) = 1$

$\leftarrow$) Sea $v(A \leftrightarrow B) = 1$. Es decir, $v(A \rightarrow B) = 1$ y $v(B \rightarrow A) = 1$

Supongamos que $A \not\equiv B$, es decir existe v tal que $v(A) \neq v(B)$.

Se pueden dar dos casos:

$v(A) = 1$ y $v(B) = 0$ entonces $v(A \rightarrow B) = 1 \rightarrow 0 = 0$

$v(A) = 0$ y $v(B) = 1$ entonces $v(B \rightarrow A) = 1 \rightarrow 0 = 0$

En cualquier caso, se obtiene una contradicción.

Por lo tanto $v(A) = v(B)$ y entonces $A \equiv B$

Lógica Proposicional: Semántica

Sustitución:

Es una función e: F_m ® F_m que cumple con las siguientes propiedades para todo A, B Î F_m

- **e(ØA) = Øe(A)**
- **e(A Ù B) = e(A) Ù e(B)**
- **e(A Ú B) = e(A) Ú e(B)**
- **e(A ® B) = e(A) ® e(B)**

Teorema:

Dadas A, B Î F_m tal que A º B, y dada la sustitución e, entonces e(A) º e(B)

Ejemplo:
Sea p ® q º Øp Ú q y sea e(p) = a Ù b y e(q) = a Ú c
Aplicando e
a Ù b ® a Ú c º Ø(a Ù b) Ú a Ú c
(se reemplaza cada ocurrencia de la variable)

Lógica Proposicional: Semántica

Definición:

Sea A º B y X una fórmula donde A puede aparecer varias veces como subfórmula. Si se reemplaza en X la subfórmula A por B (en todas o alguna de sus ocurrencias) la fórmula Y obtenida es equivalente a X.

Ejemplo:
Sea X = (p ® q) ® ((p ® q) Ù p) y la equivalencia p ® q º Øp Ú q

Reemplazando en X se obtiene la fórmula Y = (Øp Ú q) ® ((p ® q) Ù p)

Se puede verificar que X º Y

Sustitución vs. Reemplazo

La sustitución preserva la equivalencia entre las dos fórmulas porque se hace en toda ocurrencia de la fórmula sustituida (no requiere que la fórmula sustituida sea equivalente a la sustituyente)

El reemplazo preserva la equivalencia porque la fórmula sustituyente es equivalente a la sustituida (no requiere realizarse en toda ocurrencia de la fórmula sustituida)

Ciencias de la Computación II - Filminas de Clase – Mg. Virginia Mauco – Facultad Cs. Exactas – UNCPBA - 2009