Lógica Proposicional (LP)

✓ **Una valuación v satisface una fórmula A si v(A) = 1**

✓ **Una valuación v satisface un conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq \mathbf{F_m}$ si v satisface cada fórmula de Γ, es decir v(A) = 1 para toda fórmula A $\in \Gamma$**

<u>Teorema</u>:

Sea $\Gamma = \{A_1, A_2, ..., A_n\} \subseteq \mathbf{F_m}$

1) $\Gamma = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ es satisfacible sí y sólo sí la fórmula

$A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n$ es satisfacible

2) $\Gamma = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ es insatisfacible sí y sólo sí la fórmula

$A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n$ es una contradicción

<u>Observación</u>:

Sea $\Gamma = \emptyset$. Toda valuación v satisface a Γ

Lógica Proposicional

<u>Ejemplo</u>

hipótesis conclusión

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

En cada fila que $p \rightarrow q$ y $\neg p$ son verdaderas la fórmula $\neg p \vee q$ también es verdadera

Diremos que $\neg p \vee q$ es consecuencia semántica de las fórmulas $p \rightarrow q$ y $\neg p$

Las fórmulas $p \rightarrow q$ y $\neg p$ se denominan *hipótesis* o *premisas* y la fórmula $\neg p \vee q$ se denomina *conclusión* o *consecuencia semántica*

➢ Un argumento o razonamiento es válido o correcto cuando toda valuación que hace verdaderas a las hipótesis, hace verdadera a la conclusión (no hay valuación que haga verdaderas a las hipótesis y falsa a la conclusión)

<u>Ejemplo</u>:

Dados a, b, c $\in$ N

Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$

Consecuencia Semántica

Definición Formal:

Sea $\Gamma \cup \{A\} \subseteq F_m$

A es consecuencia semántica de Γ, en símbolos $\Gamma \models A$, sí y sólo sí toda valuación que satisface a Γ también satisface la fórmula A.

$\Gamma \models A \Leftrightarrow$ para toda valuación v tal que $v(\Gamma) = 1$, entonces $v(A) = 1$

De esta definición resulta que $\models A \Leftrightarrow A$ es una tautología

Notación:

Sea Γ un conjunto de fórmulas $\Gamma = \{ A_1, A_2, ..., A_n\}$, $\Gamma \models A$ se puede escribir:

$\{ A_1, A_2, ..., A_n\} \models A$

$A_1, A_2, ..., A_n \models A$

$A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n \models A$

Consecuencia Semántica

Algunas Propiedades

Sean $\Gamma \cup \Delta \cup \{A, B\} \subseteq F_m$

1) $A \models A$ toda fórmula es consecuencia semántica de sí misma (Reflexividad)

2) $\Gamma \models A$ y $A \models B$ entonces $\Gamma \models B$ (Transitividad)

3) Si $A \in \Gamma$ entonces $\Gamma \models A$

4) Si $\Gamma \models A$ y $\Gamma \subseteq \Delta$ entonces $\Delta \models A$ (si de un conjunto de hipótesis se sigue una conclusión, agregando hipótesis al conjunto, la conclusión sigue siendo consecuencia semántica)

Consecuencia Semántica

Teorema de la Deducción

Sean $\Gamma \cup \{A, B\} \subseteq F_m$

$\Gamma \cup \{A\} \models B$ sí y sólo sí $\Gamma \models A \rightarrow B$

Corolario 1:

Sean $A, B \in F_m$

$A \models B$ sí y sólo sí $\models A \rightarrow B$

Corolario 2:

Para todo conjunto $\Gamma \cup \{A\} \subseteq F_m$

$\Gamma \models A$ sí y sólo sí $\Gamma \cup \{\neg A\}$ es insatisfacible

(Si $\Gamma = \varnothing$, A es tautología sí y sólo sí $\neg A$ es insatisfacible)

Consecuencia Semántica

Teorema de Compacidad

Sean $\Gamma \cup \{A, B\} \subseteq F_m$

$\Gamma \models A$ sí y sólo sí $\Gamma_0 \models A$ para $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, Γ_0 finito

Una fórmula A es consecuencia semántica de un conjunto de fórmulas Γ sí y sólo sí existe un subconjunto finito Γ_0 de Γ tal que A es consecuencia semántica de Γ_0

Teorema

Sea $\Gamma \subseteq F_m$ Entonces Γ es satisfacible sí y sólo sí todo subconjunto finito de Γ es satisfacible.

Teorema

Sea $\Gamma \subseteq F_m$ Entonces Γ es insatisfacible sí y sólo sí existe un subconjunto finito de Γ que es insatisfacible.