MÁQUINAS DE TURING

Las máquinas de Turing, así como los AF y los AP se utilizan para aceptar cadenas de un lenguaje definidas sobre un alfabeto *A.* El modelo básico de máquina de Turing, tiene un mecanismo de control, una cinta de entrada que se divide en celdas, y una cabeza de lectura/escritura que lee un solo símbolo de la cinta por vez. La cinta tiene una celda de inicio de más a la izquierda, pero es infinita a derecha. Cada celda de la cinta puede contener exactamente un símbolo del alfabeto de la cinta *C*. Inicialmente, las n celdas de más a la izquierda ($n \geq 0$) contienen una cadena ω, siendo $|\omega|=n$. ω está definida sobre un subconjunto de *C,* llamado alfabeto de entrada *A.* Las infinitas celdas restantes contienen un símbolo blanco B, el cual es un símbolo especial del alfabeto *C.*
La diferencia fundamental con el autómata de pila y el autómata finito, es que se puede leer un símbolo y reescribirlo por otro símbolo, y además la cabeza de lectura/escritura puede desplazarse a la izquierda, a la derecha o quedarse en el mismo lugar.
El modelo general de MT permite aceptar los lenguajes recursivos enumerables o estructurados por frases que incluyen todo el conjunto de lenguajes que describen procedimientos computacionales. Todo procedimiento computacional puede ser modelado con una Máquina de Turing.

Formalmente se define una máquina de Turing como una 7-upla MT= $<E, A, C, \delta, e_0, B, F>$ donde:
E: Conjunto finito de estados
A: El alfabeto sobre el cual está definido el lenguaje que pretendemos reconocer. $A \subseteq C$
C: Alfabeto de la cinta. $C = A \cup \{B\} \cup$ Símbolos_Auxiliares $A \cap$ Símbolos_Auxiliares = $\emptyset$
e_0: estado inicial
B: símbolo blanco. $B \notin A$ y $B \in C$
δ: $E \times C \rightarrow E \times C \times \{D, I, N\}$
donde {D, I, N} son posibles movimientos de la cabeza de lectura/escritura, Derecha, Izquierda o No hay movimiento respectivamente. Sin embargo, δ puede estar indefinida para algunos argumentos, por ejemplo no se permiten movimientos a izquierda de la celda de inicio de la cinta.
F: Conjunto de estados finales. $F \subseteq E$

Los tipos de transiciones de estados de una MT determinística se definen como:
1) $\delta(e_i, x_k) = (e_j, Y, D)$
2) $\delta(e_i, x_k) = (e_j, Y, I)$
3) $\delta(e_i, x_k) = (e_j, Y, N)$ donde $x_k, Y \in C$; $e_i, e_j \in E$.

<u>Configuración de una Máquina de Turing</u>
Si e_i es el estado actual, las cadenas α_1 y α_2 están ubicadas en las celdas de la cinta de entrada (α_1 precede a α_2) y la cabeza de lectura/escritura esta apuntando al primer símbolo de α_2, se define una configuración de MT como:
$\alpha_1\, e_i\, \alpha_2$ $e_i \in E$; $\alpha_1, \alpha_2 \in C^*$

Luego, se define una relación de transición $\vdash$ en el espacio de posibles configuraciones de la MT, como:
$\alpha_1 e_i \alpha_2 \vdash \beta_1\, e_j\, \beta_2$ $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in C^*$; $e_i, e_j \in E$

Supongamos la siguiente configuración, estado actual e_i; $\alpha_1 = x_1\, x_2\, \ldots\, x_{k-1}$; $\alpha_2 = x_k\, x_{k+1}\, \ldots x_n$ donde $x_1, \ldots, x_n \in C$; $e_i \in E$. La cabeza de lectura/escritura apunta al símbolo x_k.

$x_1\ x_2\ ...\ x_{k-1}\ e_i\ x_k\ x_{k+1}\ ...x_n \overset{(1)}{\vdash\!\!-\!\!-} x_1\ x_2\ \dots\ x_{k-1}\ Y\ e_j\ x_{k+1}\ \dots x_n$ Si existe la transición tipo(1), la MT pasa al estado e_j , **avanza** la cabeza de lectura/escritura y reemplaza el símbolo x_k por Y.

$x_1\ x_2\ ...\ x_{k-1}\ e_i\ x_k\ x_{k+1}\ ...x_n \overset{(2)}{\vdash\!\!-\!\!-} x_1\ x_2\ ...e_j\ x_{k-1}\ Y\ x_{k+1}\ ...x_n$ -Si existe la transición tipo(2), la MT pasa al estado e_j , **retrocede** la cabeza de lectura/escritura y reemplaza el símbolo x_k por Y.

$x_1\ x_2\ ...\ x_{k-1}\ e_i\ x_k\ x_{k+1}\ ...x_n \overset{(3)}{\vdash\!\!-\!\!-} x_1\ x_2\ ...\ x_{k-1}\ e_j\ Y\ x_{k+1}\ \dots x_n$ -Si existe la transición tipo(3), la MT pasa al estado e_j , **no avanza** la cabeza de lectura/escritura y reemplaza el símbolo x_k por Y.

Máquina de Turing multicinta determinística

Este modelo es una extensión del modelo anterior de 1 cinta a k_cintas de entrada, y k cabezas de lectura/escritura. Una transición de estados depende del símbolo que se lee en cada una de las cintas, luego la máquina cambia de estado, reescribe un nuevo símbolo en cada cinta de entrada y mueve la cabeza de lectura/escritura de cada cinta en forma independiente.
La ventaja es que para reconocer ciertos lenguajes es más fácil hacer el diseño de la MT con k_cintas de entrada.
En general se suele utilizar 1 cinta que contiene los símbolos de entrada, cintas intermedias para realizar cálculos auxiliares y una cinta de salida para el caso particular de una máquina de Turing traductora.
$MT_M = < E, A, C, \delta, e_0, B, F >$
donde E, A, C, e_0, B, F, se definen como antes
y δ: $E \times C^{k} \rightarrow E \times (C \times \{D,I,N\})^{k}$ donde {D,I,N} son posibles movimientos de la cabeza de lectura/escritura.
Todo lo que se hace en multicinta puede realizarse con el modelo de 1 cinta. Es decir, que son modelos equivalentes ya que pueden reconocer los mismos lenguajes.

Máquina de Turing no determinística

Al igual que con los AFND y APND cuando se diseña una MTND esto significa que en un cierto punto puedo tener varios cursos de acción, entonces:
$MTND = < E, A, C, \delta, e_0, B, F >$
donde E, A, C, e_0, B, F, se definen como antes y
δ: $E \times C^{k} \rightarrow P_f\,(E \times (C \times \{D,I,N\})^{k})$ P_f denota un subconjunto finito de $E \times (C \times \{D,I,N\})^{k}$
Es decir:
$\delta(e_i , a_1, a_2,\dots,a_k) =\{(e_j , (Y_1, d_1) (Y_2,d_2) \dots (Y_k,d_k)); (e_n , (Y_1',d_1') (Y_2',d_2')\dots(Y_k',d_k'))...\}$
donde $e_i, e_j, e_n \in E$; $a_1, a_2,\dots,a_k, Y_1,Y_2,. Y_k, Y_1',Y_2'\dots Y_k' \in C$; $d_1 ,d_2 \dots d_k ,d_1',d_2',\dots d_k' \in \{D, I, N\}$

Una Máquina de Turing no determinística acepta una cadena si cualquier secuencia de transiciones conduce a un estado final. Como con los autómatas finitos, la adición de no determinismo a las Máquinas de Turing no permite que la máquina acepte nuevos lenguajes. Es decir, existe una equivalencia entre MTD y MTND, para los conjuntos de lenguajes que aceptan.
Sin embargo el tiempo de ejecución de las MTND, es más costoso que el caso de MTD.

Lenguaje aceptado por la Máquina de Turing

Una cadena $\omega \in A^*$, es aceptada por una MT, si comienza en el estado e_0, con la cabeza de lectura/escritura en el símbolo más a la izquierda, luego de leer toda la cadena ω, llega a un estado $e_f \in$ F.

El lenguaje aceptado por MT, es el conjunto de todas las cadenas que son aceptadas por MT:

L(MT)= $\{ \omega \ / \ e_0\, \omega \vdash^{*} \alpha_1\, e_f\, \alpha_2$ y $e_f \in F$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in C^*$ y $\omega \in A^*\}$

Los lenguajes aceptados por las Máquinas de Turing se denominan lenguajes recursivos enumerables o estructurados por frases.

Autómata linealmente acotado

Es una máquina de Turing particular. La restricción sobre el modelo general de Máquina de Turing es que las transiciones se realizan sobre una cantidad de casilleros acotada. Es decir, en vez de tener una cinta de entrada infinita sobre la cual calcular, se restringe a una porción entre un casillero que contiene un símbolo de inicio #, y un símbolo final $, y se garantiza que las transiciones se van a realizar dentro de este conjunto de casilleros en la cinta de entrada.

Para el caso del modelo multicinta se extiende para cada cinta la condición de acotar el espacio de trabajo.

Una máquina de Turing con esta restricción ALA, permite reconocer un tipo de lenguajes en particular que se denominan Lenguajes Sensibles al Contexto.

ALA= $< E, A, C, \delta, e_0, B, F, \#, \$>$

donde E, A, e_0, B, F se definen como antes y

C = A $\cup$ {B, $, #} $\cup$ Símbolos_Auxiliares

δ: E x $C \rightarrow$ E x C x {D,I,N} donde {D,I,N} son posibles movimientos de la cabeza de lectura/escritura. No se permiten movimientos a la izquierda de # ni a la derecha de $.

El ALA también puede ser multicinta

$ALA_M= < E, A, C, \delta, e_0, B, F, \#, \$>$

donde E, A, C, e_0, B, F se definen como antes y

C = A $\cup$ {B, $, #} $\cup$ Símbolos_Auxiliares

δ: E x $C^{k} \rightarrow$ E x (C x {D,I,N})^{k} donde {D,I,N} son posibles movimientos de la cabeza de lectura/escritura. En ninguna de las cintas, se permiten movimientos a la izquierda de # ni a la derecha de $.

Todo lo que se hace en multicinta puede realizarse con el modelo de 1 cinta. Es decir, que son modelos equivalentes ya que pueden reconocer los mismos lenguajes.

Ejemplo 1 (**)

L=$\{\omega c \omega \ / \omega \in \{a,b\}^*\}$

a) Diseño con una Máquina de Turing de 2-cintas

$MT_1=<\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\},\{a, b, c\}, \{a, b, c,X, B\}, \delta_1, B, \{e_4\}>$

donde la función de transición de estados es

δ_1:E x C_1x $C_2 \rightarrow$ Ex (C_1x {D,I,N}) x (C_2 x {D,I,N})

δ_1	C_1	C_2	C_1		C_2		Nuevo estado
			Nuevo Símb.	Mov.	Nuevo Símb.	Mov.	
e_0	a	B	a	N	X	D	e_1
	b	B	b	N	X	D	e_1
	c	B	c	D	B	N	e_3
e_1	a	B	a	D	a	D	e_1
	b	B	b	D	b	D	e_1
	c	B	c	N	B	I	e_2
e_2	c	a	c	N	a	I	e_2
	c	b	c	N	b	I	e_2
	c	X	c	D	X	D	e_3
e_3	b	b	b	D	b	D	e_3
	a	a	a	D	a	D	e_3
	B	B	B	N	B	N	e_4
e_4	-	-	-	-	-	-	-

b) Diseño con un Modelo Máquina de Turing de 1-cinta
MT_1'=<{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9},{a, b, c}, {a, b, c, X, Y, B}, δ_1', B, {e_9}>
donde la función de transición de estados es δ_1':Ex C$\rightarrow$ Ex (Cx {D,I,N})

δ_1'	a	b	c	Y	X	B
e_0	e_2,X, D	e_5, X, D	e_7, c, D			
e_1	e_2,X, D	e_5, X, D	e_8, c, D			
e_2	e_2, a, D	e_2, b, D	e_3, c, D			
e_3	e_4, Y, I			e_3, Y, D		
e_4	e_4, a, I	e_4, b, I	e_4, c, I	e_4, Y, I	e_1, X, D	
e_5	e_5, a, D	e_5, b, D	e_6, c, D			
e_6		e_4, Y, I		e_6, Y, D		
e_7						e_9, B, N
e_8				e_8, Y, D		e_9, B, N
e_9	-	-	-	-	-	-

Ejemplo 2 (**)
Máquina de Turing para cálculo de funciones
f(x,y) = $\lfloor x/y \rfloor$ x, y codificados en unario.
Inicialmente x e y se encuentran en la cinta de entrada C_1, separados por un símbolo 0, en este orden. El resultado de la función f(x,y) queda en C_4.

MT_2=<{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6},{1, 0}, {1, 0, X, B}, δ_2, B, {e_6}> donde

δ_2:Ex C_1x C_2 x C_3 x $C_4$$\rightarrow$ Ex (C_1x {D,I,N}) x (C_2 x{D,I,N}) x (C_3 x{D,I,N}) x (C_4 x{D,I,N})

δ_2					C_1		C_2		C_3		C_4		Nuevo
	C_1	C_2	C_3	C_4	NS	M	NS	M	NS	M	NS	M	estado
e_0	1	B	B	B	1	N	X	D	B	N	B	N	e_1
	0	B	B	B	0	D	X	D	X	D	B	N	e_2
e_1	1	B	B	B	1	D	1	D	B	N	B	N	e_1
	0	B	B	B	0	D	B	N	X	D	B	N	e_2
e_2	1	B	B	B	1	D	B	N	1	D	B	N	e_3
e_3	1	B	B	B	1	D	B	N	1	D	B	N	e_3
	B	B	B	B	B	N	B	I	B	I	B	N	e_4
e_4	B	1	1	B	B	N	1	I	1	I	B	N	e_4
	B	1	X	B	B	N	1	N	X	D	1	D	e_5
	B	X	X	B	B	N	X	N	X	N	1	D	e_6
	B	X	1	B	B	N	X	N	1	N	B	N	e_6
e_5	B	1	1	B	B	N	1	I	1	D	B	N	e_5
	B	1	B	B	B	N	1	N	B	I	1	D	e_4
	B	X	B	B	B	N	X	N	B	N	1	D	e_6
	B	X	1	B	B	N	X	N	1	N	B	N	e_6
e_6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

<u>Ejemplo 3</u> (**)
Máquina de Turing para cálculo de funciones

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \leq y \\ x-y & \text{si } x > y \end{cases}$$

donde x, y están codificados en unario.

Inicialmente x e y se encuentran en la cinta de entrada C_1, separados por un símbolo 0, en este orden.
El resultado de f(x,y) queda en C_4.

$MT_3=<\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\},\{1,0\}, \{1, 0, X, B\}, \delta_3, B, \{e_5\}>$ donde

δ_3:Ex C_1xC_2 xC_3 x$C_4 \rightarrow$ Ex (C_1x {D,I,N}) x (C_2 x{D,I,N}) x (C_3 x{D,I,N}) x (C_4 x{D,I,N})

δ_3					C_1		C_2		C_3		C_4		Nuevo estado
	C_1	C_2	C_3	C_4	NS	M	NS	M	NS	M	NS	M	
e_0	1	B	B	B	1	N	X	D	B	N	B	N	e_1
	0	B	B	B	0	D	X	D	X	D	B	N	e_2
e_1	1	B	B	B	1	D	1	D	B	N	B	N	e_1
	0	B	B	B	0	D	B	N	X	D	B	N	e_2
e_2	1	B	B	B	1	D	B	N	1	D	B	N	e_2
	B	B	B	B	B	N	B	I	B	I	B	N	e_3
e_3	B	1	1	B	B	N	1	I	1	I	B	N	e_3
	B	1	X	B	B	N	1	N	X	N	B	N	e_4
	B	X	X	B	B	N	X	N	X	N	0	N	e_5
	B	X	1	B	B	N	X	N	1	N	0	N	e_5
e_4	B	1	X	B	B	N	1	I	X	N	1	D	e_4
	B	X	X	B	B	N	X	N	X	N	B	N	e_5
e_5	-	-	-	-	-		-	-	-	-	-	-	-

(**) El autómata más restrictivo para estos ejemplos es el Autómata Linealmente Acotado ya que son Lenguajes Sensibles al Contexto (tipo 1). Por razones prácticas se modelaron con una máquina de Turing general.