

# **UNIDAD 9: Aguas Subsuperficiales y Subterráneas**

## ***Introducción***

Hasta ahora hemos estudiado los elementos del ciclo hidrológico que ocurren sobre la superficie de la tierra. En este capítulo estudiaremos los temas relacionados con las aguas subterráneas. Debido a la constante tendencia a la especialización en las profesiones, la hidrología de aguas subterráneas ha sido separada históricamente de la hidrología de superficie. Esta separación ha sido posible puesto que, como veremos, las escalas de tiempo involucradas en los sistemas subterráneos son generalmente mucho más largas que la de la mayoría de los problemas de aguas superficiales, tales como la predicción de crecidas. Sin embargo, problemas tales como las sequías, abastecimiento de agua potable, irrigación, y la contaminación de aguas deben ser tratados teniendo en cuenta ambos tipos de flujo: subterráneo y superficial.

Como es sabido, las aguas subterráneas del planeta constituyen el 62 % del volumen de agua dulce disponible, es decir cuatro órdenes de magnitud más que las aguas superficiales. Tal reserva de agua permanente no es en general explotada, si bien las explotaciones en determinadas regiones puede ser muy alta. Muchas de estas reservas de agua no pueden ser explotadas debido a las profundidades involucradas o porque consisten de humedades de suelo a niveles muy bajos de saturación, lo que hace prácticamente imposible su explotación.

A medida que las aguas superficiales de una dada región disminuyen en cantidad y calidad, el estudio de los flujos de aguas subterráneas se vuelven más importante. El tema está muy bien desarrollado, con innumerables libros y artículos sobre el mismo. En este capítulo, pretendemos introducir los conceptos básicos del flujo en medios porosos (suelo) bajo condiciones de saturación. El flujo en medios no saturados será tratado en el capítulo siguiente.

## ***Distribución del agua en el suelo y en el subsuelo***

El agua puede existir en todas sus fases dentro del suelo. El agua líquida puede aparecer como agua higroscópica, capilar o gravitacional. Las dos primeras están sostenidas por fuerzas moleculares en películas delgadas alrededor de las partículas del suelo. Cuanto más seco es el suelo y menores los intersticios entre las partículas, más fuerte son las fuerzas que sostienen esta agua. El agua higroscópica no está prácticamente disponible, y es sostenida por presiones (manométricas) negativas de 31 a 10 *kbars*. El agua capilar aparece cuando hay más agua disponible para llenar los espacios entre las partículas de suelo, pero de una manera discontinua. Esta agua es sostenida por presiones que van desde 0.33 a 31 *bars*, y puede estar conectada directamente con aguas subterráneas o en paquetes aislados. El agua capilar forma la zona capilar continua antes mencionada y puede ser usada por las plantas. Si las presiones negativas tienen magnitudes mayores que alrededor de 15 *bars*, las raíces de las plantas no pueden extraer el agua. Este nivel de sequedad se denomina *punto de marchitamiento (wilting point)*, y la vegetación no puede sobrevivir a menores contenidos de humedad. A medida que la humedad crece, se alcanza el punto que la gravedad es suficientemente fuerte como para contrarrestar estas presiones negativas (entre 0 y 0.33 *bars*). La máxima cantidad de agua que el suelo puede sostener contra la gravedad se denomina *capacidad de campo*. El agua en exceso de la capacidad de campo percola hacia abajo de la columna de suelo, y alcanza finalmente la zona de saturación limitada por un lecho de rocas, o algún otro material impermeable. Es razonable esperar que la humedad del suelo a cierta profundidad en la capa intermedia no varíe mucho con el

tiempo. La profundidad exacta dependerá naturalmente de la historia del sitio, pero es del orden de algunos metros en la mayoría de las regiones. En áreas húmedas o bien irrigadas, la capacidad de campo es una buena estimación de la humedad para esta capa.

### ***El perfil del suelo y subsuperficies de agua***

El suelo es un material complejo compuesto por materia presente en sus tres fases. La fase sólida está compuesta por minerales y materia orgánica; la fase líquida por agua y la fase gaseosa está formada esencialmente por aire y vapor de agua. El complejo sólido-aire, constituye la trama de las rocas y el soporte de las aguas subterráneas a la manera de esponja. La fase sólida rara vez es compacta, sino que presenta espacios vacíos o poros ocupados por gases o líquidos. Los elementos de la fase sólida pueden encontrarse en dos formas: sólidamente trabados entre sí, formando rocas coherentes o compactas (ej. calizas), y más o menos libres, formando rocas incoherentes o muelles (ej. arenas y gravas). Las primeras permitirán el pasaje de agua solo a través de fisuras, mientras que en las segundas será a través de intersticios intergranulares. Las propiedades hidráulicas que caracterizan la relación sólido-aire y sólido-aire-agua son la porosidad y la permeabilidad, respectivamente.

En función del tamaño de las partículas que conforman el suelo, los mismos pueden clasificarse granulométricamente según se observa en la Tabla I.

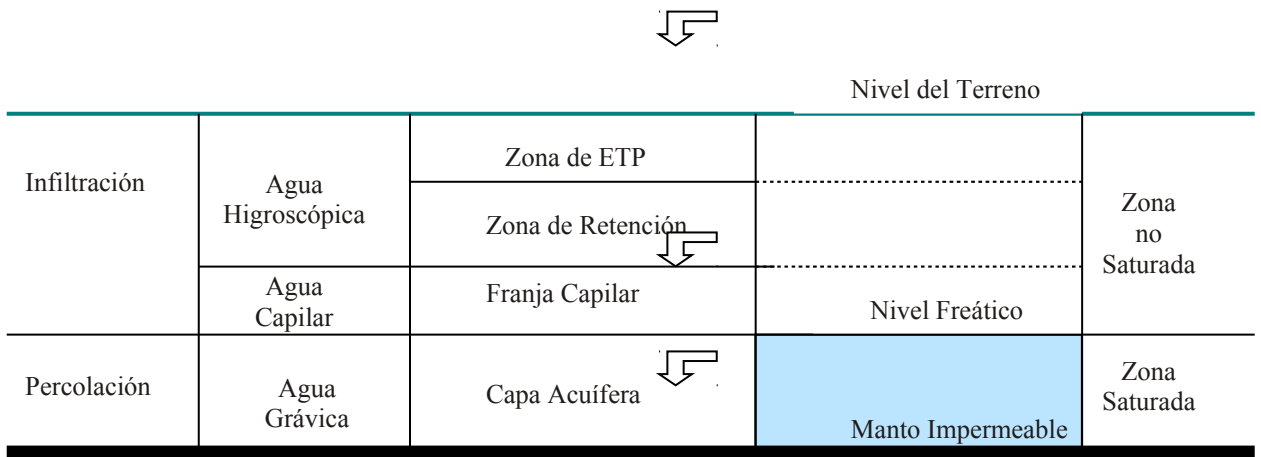
Nombre del sedimento	Diámetro de la partícula (mm)
Arena muy gruesa	2 – 1
Arena gruesa	1 – 0,5
Arena mediana	0,5 – 0,25
Arena fina	0,25 – 0,125
Arena muy fina	0,125 – 0,0625
Limo	0,0625 – 0,0039
Arcilla	Menos de 0,0039

**Tabla 1: Tamaño típico del sedimento**

El estudio de la sucesión vertical de las zonas de humedad en el suelo nos permitirá, en un ejemplo teórico, describir la distribución del agua en sus diferentes categorías. Suponemos un macizo de terreno permeable homogéneo (granulometría uniforme) e isótropo (sin estratificación, con permeabilidad uniforme en toda dirección) sobre un manto impermeable horizontal (roca). Consideramos una única entrada de agua proveniente de infiltración.

En el sistema teórico planteado en la Fig. 1, podemos diferenciar las siguientes zonas:

**Zona de evapotranspiración (ETP):** Es la zona superior, comenzando desde la superficie del terreno; se extiende hacia abajo, acompañando la capa de las raíces de las plantas. Está sometida a alteración del suelo y en ella se realiza la evapotranspiración. Normalmente, esta zona se encuentra en estado no saturado (parte de los poros de la tierra están llenos de aire, además de agua). Durante período de lluvia (o irrigación), esta zona puede volverse saturada. El espesor de esta zona es función del suelo, el clima y la cobertura vegetal, en zonas templadas alcanza 1 a 2 metros de profundidad y excepcionalmente 3 metros.



**Fig. 1: Esquema del perfil de suelo.**

***Zona de retención:*** El volumen de agua es igual al coeficiente de retención específico y el peso del agua es igual a la capacidad de campo. El agua de esta zona no presenta ningún vínculo hidráulico con las capas inferiores. Es una zona de conexión con la región usualmente saturada del sistema tierra-roca. Esta zona intermedia está normalmente no saturada, excepto en períodos de extrema precipitación. Su espesor medio puede variar entre 0.6 y 2 m, alcanzar los 15 m o, por el contrario, faltar completamente.

***Franja capilar:*** La zona capilar yace por encima de las capas bajas saturadas. Su nombre proviene de la existencia de agua que trepa debido a las fuerzas capilares. La capilaridad es una función del tipo de sistema tierra-roca. La columna de agua ascendente puede ser una fracción de un metro para arenas hasta decenas de metros para arcillas finas. La posición de la franja capilar se ve afectada por las fluctuaciones de la capa acuífera, pero no su potencia. La potencia varía de manera inversamente proporcional a la granulometría, con valores entre 30 y 60 cm en las arenas y de hasta 3 m en los limos.

***Zona saturada:*** Llamada capa o manto acuífero. En el ejemplo considerado, se denomina también *acuífero* libre o freático (en la superficie superior o nivel freático, la presión del agua es igual a la presión atmosférica). Todos los espacios vacíos están ocupados enteramente por agua. El coeficiente de saturación alcanza el 100 %. De esta zona puede extraerse agua mediante el uso de métodos convencionales (bombas).

## **Agua subterránea**

Como ya se mencionó, los reservorios de agua subterránea explotables se denominan *acuíferos*. Una formación saturada de este tipo es explotable si puede entregar una considerable cantidad de agua con relativa facilidad a costos razonables. Esta es una propiedad que depende del tipo de suelo y de los orígenes de la formación. Se los clasifica en confinado y no confinado (estos últimos también denominados napas freáticas). Relacionado con este punto, podemos mencionar también las formaciones llamadas *acuichudes* que se definen como una unidad geológica que es incapaz de transmitir cantidades significativas de agua bajo la acción de gradientes de carga hidráulica ordinarias. Una formación intermedia lo constituyen las *acuitardas* que son lo suficientemente permeables como para transmitir cantidades de agua significativas para el estudio de flujos de aguas subterráneas regionales, pero no suficientes como para permitir la implementación de pozos de producción.

Luego de perforar un pozo que penetra un acuífero no confinado (freático), el agua aparecerá en el nivel que define la superficie piezométrica donde la presión se igual a la

atmosférica. Estos acuíferos tienen una superficie libre. Esta superficie puede estar conectada directamente a una corriente superficial o a otras aguas. El agua en los acuíferos freáticos proviene de recargas de precipitación pluvial sobre el acuífero, de conexiones con aguas superficiales, y/o de otros acuíferos.

Los acuíferos confinados no tienen una superficie libre. Los lechos confinantes pueden ser completamente impermeables (*acuífugos*) o 'llovedizos' (*acuicludes*). Luego de perforar un pozo que penetra un acuífero confinado, el agua se elevará hasta un cierto nivel, denominado altura piezométrica, que es igual a la elevación del techo del acuífero por encima de un nivel de referencia más la presión en el acuífero. Si esta altura se eleva por encima del nivel del suelo, entonces se tendrá un pozo artesiano del que fluye agua espontáneamente. Estos acuíferos se recargan a través de afloramientos (áreas donde el sistema del suelo se expone a la superficie) o a través de acuicludes. Este tipo de recarga puede ser limitado. Muchos acuíferos confinados poseen 'aguas fósiles' depositadas en tiempos geológicos pasados.

Si una formación roca-suelo es un acuífero, acuífugo o acuiclud depende fuertemente de sus orígenes geológicos e historia. La información geológica nos dice mucho sobre las propiedades hidráulicas críticas tales como permeabilidad y porosidad. Los acuíferos con lechos rocosos no son generalmente muy productivos. Los depósitos de sedimentos consolidados (piedra arenosa o 'sandstone') son en general los mejores acuíferos potenciales. Estos depósitos y otras rocas sedimentarias fuertemente aglutinadas son propensos a resquebrajarse y fracturarse. Las fracturas y las grietas pueden también desarrollarse debido a la disolución del material aglutinante. La capacidad de retención de agua es básicamente proporcional al grado de fractura. Las rocas sedimentarias como la dolomita y la piedra caliza pueden tener muy poca permeabilidad intrínseca a través de sus poros, pero son propensas a disolverse y al desarrollo de fracturas, grietas o cavidades.

Otras formaciones rocosas de estructura volcánica o cristalina tienen poca permeabilidad inherente, pero podrían potencialmente contener y transmitir agua a través de sus fisuras y fracturas. Otro camino de transmisión pueden ser los contornos entre estratos de diferente origen geológico. Plegamientos, fallas y otras fuentes de esfuerzos geológicos pueden conspirar a reducir o incrementar las fracturas en una dada formación rocosa.

Los sedimentos no consolidados son generalmente los mejores acuíferos. Estos depósitos son usualmente de origen fluvial o glacial. Los sedimentos fluviales se depositan dentro y alrededor de cursos de agua existentes o ya no existentes. Ya que la capacidad de transportar agua depende del tamaño de las partículas, los elementos fluviales están normalmente bien clasificados y estratificados. Esto mejora la porosidad y la conductividad hidráulica, haciendo de estas formaciones muy buenos acuíferos.

## **Porosidad y razón de vacío**

Si el volumen total unitario  $V_T$  de un suelo o roca se divide en el volumen de la porción sólida  $V_s$  y el volumen de los espacios vacíos  $V_v$ , la porosidad  $n$  se define como  $n=V_v/V_T$ . La Fig. 2 muestra la relación entre varias texturas de roca y suelo con la porosidad. Es importante distinguir entre porosidad primaria, que se debe a la matriz de la roca o suelo (Fig. 2a, b, c y d), y la porosidad secundaria, que puede deberse a fenómenos tales como soluciones secundarias (Fig. 2e) o a fracturas locales dependientes de la estructura (Fig. 2f).

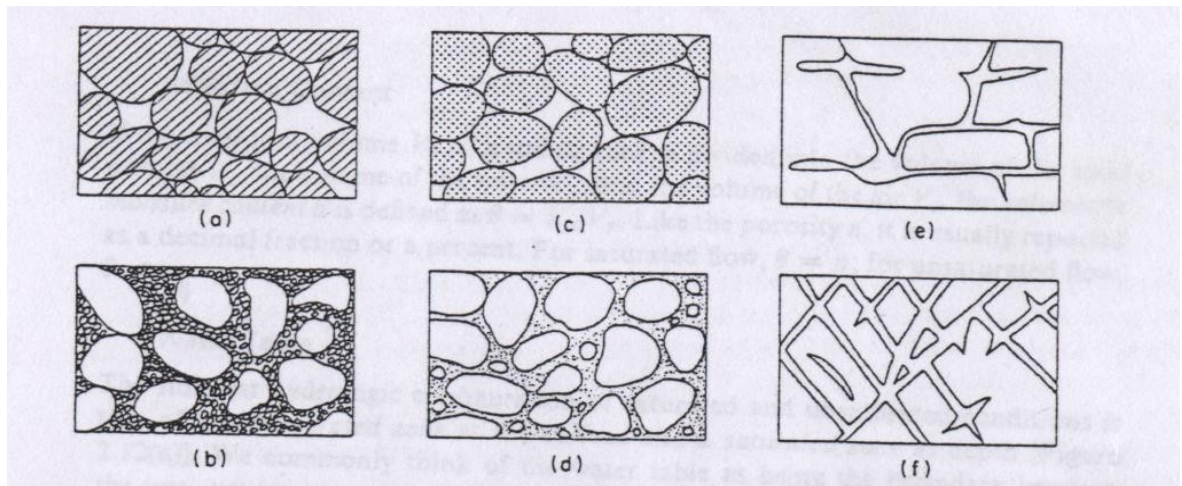


Fig. 2: Relación entre textura y porosidad. (a)-(d) Depósitos sedimentarios de distinta granulometría y porosidad: (a) uniforme y alta porosidad; (b) no uniforme y baja porosidad; (c) uniforme con piedras porosas y alta porosidad; (d) uniforme con porosidad reducida por mineral en los intersticios; (e) roca con porosidad debida a una solución; (f) roca con porosidad debida a fracturas.

La Tabla II muestra una lista de rangos de porosidad representativos de varios materiales geológicos. En general, las rocas tienen menores porosidades que los suelos; las gravas, las arenas y los sedimentos aluvionales, que están formados por partículas angulosas y redondeadas, tienen menores porosidades que los suelos ricos en minerales recubiertos de arcilla. Los depósitos poco ordenados (Fig. 2b) tienen menores porosidades que los depósitos bien ordenados (Fig. 2a).

Material	n
<i>Depósitos no consolidados</i>	
grava	0.25-0.40
arena	0.25-0.50
sedimento aluvional	0.35-0.50
arcilla	0.40-0.70
<i>Rocas</i>	
basalto fracturado	0.05-0.50
piedra caliza	0.05-0.50
arenizca	0.05-0.50
dolomita	0.00-0.20
pizarra	0.00-0.10
roca cristalina fracturada	0.00-0.10
roca cristalina densa	0.00-0.05

Tabla II: Rango de valores de porosidad.

La porosidad  $n$  puede ser un factor muy importante para determinar la conductividad hidráulica  $K$ . En programas de muestreos llevados a cabo en depósitos de arena bien ordenados o en formaciones rocosas fracturadas, las muestras con mayor  $n$  tienen generalmente mayores valores de  $K$ . Desafortunadamente, la relación no se mantiene a escala regional a través del espectro de posibles tipos de rocas y suelos. Por ejemplo, los suelos ricos en arcilla usualmente tienen mayores porosidades que los suelos arenosos y con mucha grava, pero tienen menor conductividad hidráulica.

La porosidad  $n$  esta muy relacionada con la razón de vacío  $e$ , que es ampliamente usada en la mecánica de suelos. La razón de vacío se define como  $e=V_v/V_s$ , y también puede escribirse en función de  $n$  como

$$e = \frac{n}{1-n}, \quad (9.1)$$

y, viceversa

$$n = \frac{e}{1+e}, \quad (9.2)$$

Los valores de  $e$  usualmente están en el rango 0-3.

### Ley de Darcy

La dinámica del flujo en un medio poroso saturado se describe mediante la ley de Darcy. Esta ley fue obtenida por Darcy usando un aparato similar al mostrado en la Fig. 3. Allí, se tiene un flujo constante de agua a través de un medio poroso de longitud  $l$ , manteniendo constante el nivel de agua sobre el mismo. Darcy encontró que el volumen  $V$  de agua que atraviesa el sistema en un tiempo  $t$ , viene dado por:

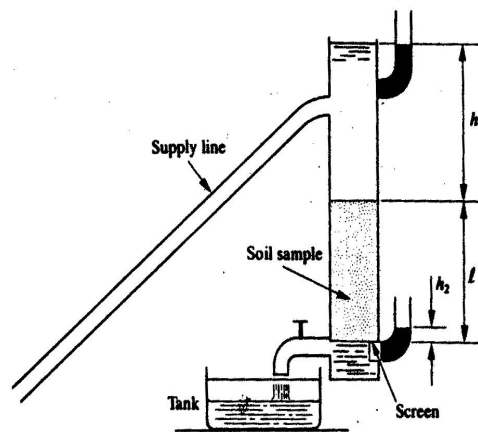


Fig. 3: Esquema del aparato de Darcy.

$$V = KA \frac{(h_1 + l - h_2)t}{l}, \quad (9.3)$$

donde  $A$  es el área de la sección transversal del medio poroso y  $K$  es una constante de proporcionalidad, denominada **conductividad hidráulica** o **permeabilidad**. La velocidad promedio del flujo a través de la sección es entonces,

$$q = \frac{V}{At} = K \frac{h_1 + l - h_2}{l}. \quad (9.4)$$

Más generalmente, la ley de Darcy dice que la velocidad del flujo a través del medio poroso es directamente proporcional a la gradiente de **presión piezométrica** o **carga hidráulica**  $h$ :

$$q = -K \frac{dh}{dl} \quad , \quad (9.5)$$

donde  $l$  indica ahora la dirección del flujo y  $h$  se define como:

$$h = z + \frac{p}{\rho g} \quad . \quad (9.6)$$

Aquí,  $z$  es la altura del punto en cuestión (entrada, salida o cualquier punto intermedio en el medio poroso) respecto de un cierto nivel de referencia,  $p$  la presión hidrostática en dicho punto,  $\rho$  la densidad del agua y  $g$  la aceleración de la gravedad. De esta manera, la carga hidráulica  $h$  tiene en cuenta no sólo la presión hidrostática sino también la altura del punto (asociada con su energía potencial). Nótese que  $p/\rho g$  tiene unidades de longitud (de hecho, la presión hidrostática se mide usualmente como la altura en una columna líquida de un manómetro, como por ej. en la Fig. 3). Usualmente,  $h$  se mide en  $cm$  o  $m$  de agua. La cantidad  $q$  se denomina también descarga por unidad de área. Al igual que  $q$ , la conductividad hidráulica  $K$  también tiene unidades de velocidad. La ley de Darcy escrita en la en Ec. (9.5) implica que el flujo tiene la dirección en la que disminuye la carga hidráulica  $h$ , y es perpendicular a las líneas de igual carga (líneas equipotenciales).

Debe tenerse en cuenta que  $q$  es la velocidad promedio sobre la sección transversal, y no se refiere a la velocidad real de un dado elemento de fluido dentro del medio poroso. Definiendo  $v=q/n$ , donde  $n$  es la porosidad, obtenemos la velocidad promedio del fluido en los poros de la sección transversal. La porosidad es la razón entre el volumen disponible para el flujo del agua y el volumen del suelo. Esta velocidad de filtración  $v$  es mayor que  $q$  y corresponderá, por ejemplo, a la de un trazador no-reactivo en el medio poroso.

La ley de Darcy puede derivarse a partir de principios básicos del flujo en medios porosos, y es aplicable en la mayoría de las situaciones encontradas en la práctica. Esencialmente, estas son situaciones donde predominan las fuerzas viscosas sobre las fuerzas inerciales, es decir de bajos números de Reynolds, definido por:

$$R_e = \frac{\rho q d}{\mu} \quad , \quad (9.7)$$

donde  $d$  es el diámetro medio del poro y  $\mu$  es la viscosidad. En general, se requiere  $R_e \ll 1$ , pero se ha observado que la ley de Darcy sigue siendo válida aún para  $R_e \cong 10$ .

La conductividad hidráulica  $K$  es función tanto de las propiedades del medio poroso como del fluido mismo. Es sabido que el flujo laminar a través de un conducto capilar recto se describe mediante la ecuación de Hagen-Poiseuille,

$$q = -\frac{\rho g d^2}{32 \mu} \frac{dh}{dl} \quad , \quad (9.8)$$

donde  $d$  es el diámetro del capilar y  $dh/dl$  es el gradiente de piezométrico. Así, podemos definir:

$$K = k \frac{\rho g}{\mu} \quad , \quad (9.9)$$

como la correspondiente conductividad hidráulica. Las propiedades del fluido están representadas por el factor  $\rho g/\mu$ , mientras que el factor  $k=d^2/32$  depende de la geometría del conducto (sección circular en este caso). Entonces, se define la conductividad específica del medio poroso como

$$k = \frac{\mu}{\rho g} K = c d^2 \quad , \quad (9.10)$$

donde  $c$  es una constante adimensional cuyo valor depende del medio poroso y  $d$  es ahora un diámetro poral típico. La conductividad específica  $k$  se mide en unidades de longitud al cuadrado, y se ha definido la unidad Darcy como:  $1 \text{ Darcy} = 0.987 \times 10^{-8} \text{ cm}^2$ . La Tabla III muestra valores típicos de  $k$  y  $K$  (con agua como fluido) de diferentes tipos de suelos.

Suelo	$k \text{ (cm}^2\text{)}$	$K \text{ (cm s}^{-1}\text{)}$	$n$
Arcilla	$4 \times 10^{-10}$	$3.4 \times 10^{-5}$	0.45
Barro aluvional	$4 \times 10^{-9}$	$3.4 \times 10^{-4}$	0.35
Barro arenoso	$4 \times 10^{-8}$	$3.4 \times 10^{-3}$	0.25
Arena	$1 \times 10^{-7}$	$8.6 \times 10^{-3}$	0.20

**Tabla III: Propiedades hidráulicas de suelos típicos.**

La ecuación de Darcy puede extenderse a tres dimensiones. Orientando cuidadosamente los ejes, de manera tal que éstos sean paralelos a las direcciones preferidas del flujo (normalmente dado por la estratificación del substrato geológico), el flujo en tres direcciones ortogonales viene dado por:

$$q_x = -K_x \frac{\partial h}{\partial x}; \quad q_y = -K_y \frac{\partial h}{\partial y}; \quad q_z = -K_z \frac{\partial h}{\partial z} \quad (9.11)$$

donde  $K_x$ ,  $K_y$  y  $K_z$  son las conductividades hidráulicas correspondientes. Un medio poroso se denomina *isótropo* si  $K_x = K_y = K_z$ . Si las conductividades hidráulicas no varían de punto a punto del espacio, entonces se dice que el medio es *homogéneo*. En general, en los suelos pueden darse cuatro combinaciones de estas dos propiedades, y en cada caso se tienen diferentes requerimientos para describir el flujo (ver Fig. 4):

*Caso 1:* El suelo es homogéneo e isótropo. Un solo valor de constante de  $K$  es suficiente.

*Caso 2:* El suelo es homogéneo y anisótropo. Tres diferentes conductividades constantes ( $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$ ) son necesarias.

*Caso 3:* El suelo es inhomogéneo e isótropo. Una sola función de punto, p. ej.  $K(x,y,z)$ , es suficiente.

*Caso 4:* El suelo es inhomogéneo y anisótropo: Se requieren seis funciones de punto.

En los casos anisótropos, el flujo no es perpendicular a las líneas equipotenciales (líneas de  $h=cte.$ ). Sin embargo, si el medio es homogéneo (caso 2), es posible hacer una transformación de escala en los ejes cartesianos y convertir el problema en isótropo con un permeabilidad equivalente  $K_0 = \sqrt{K_x K_y K_z}$ .

La principal causa de anisotropía a pequeña escala es la orientación de los minerales arcillosos en rocas sedimentarias y sedimentos no consolidados. Muestras de arcillas y pizarras rara vez poseen una anisotropía (relación entre conductividades horizontal y vertical) mayores que 10, y suele ser generalmente menor que 3.



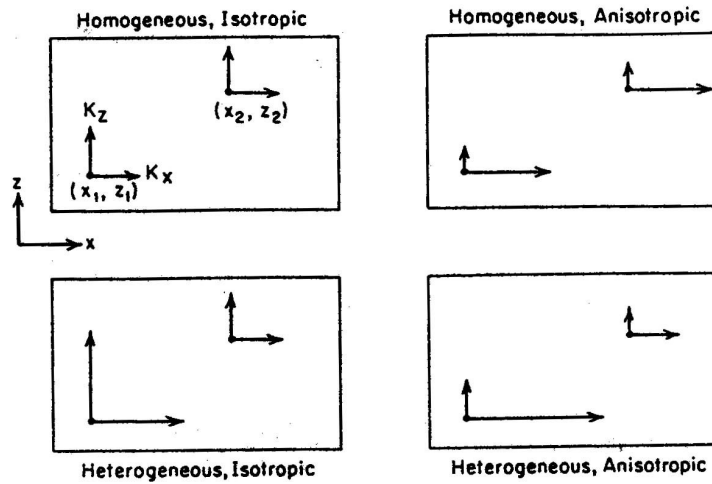


Fig. 4: Cuatro posibles combinaciones de heterogeneidad y anisotropía.

En escalas mayores, puede demostrarse que una relación entre heterogeneidad de estratificación y anisotropía. En efecto, considere la formación estratificada mostrada en la Fig. 3, donde cada estrato es homogéneo e isotrópico con conductividades hidráulicas  $K_1, K_2, \dots, K_n$ . Mostraremos que el sistema como un todo actúa como un simple estrato homogéneo y anisótropo.

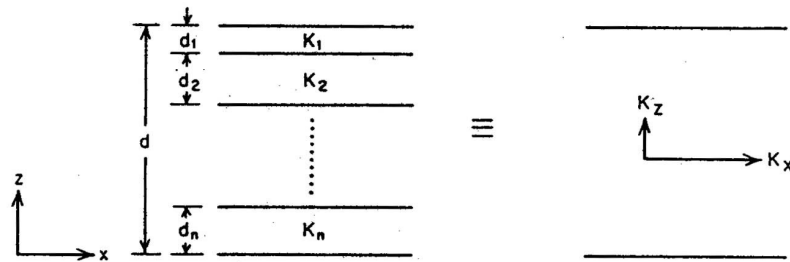


Fig. 5: Relación entre heterogeneidad estratificada y anisotropía.

En primer lugar, consideremos el flujo en la dirección perpendicular a la estratificación. La descarga específica  $q_z$  que entra al sistema debe ser la misma que sale (debe ser constante a lo largo de todo el conjunto). Sea  $\Delta h_1$  la pérdida de carga hidráulica a través del primer estrato,  $\Delta h_2$  a través del segundo estrato, etc. La pérdida total de carga es entonces,

$$\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \dots + \Delta h_n \quad (9.12)$$

y de la ley de Darcy,

$$q = \frac{K_1 \Delta h_1}{d_1} = \frac{K_2 \Delta h_2}{d_2} = \dots = \frac{K_n \Delta h_n}{d_n} = \frac{K_z \Delta h}{d} \quad (9.13)$$

donde  $K_z$  es una conductividad hidráulica vertical equivalente para toda la estratificación. Resolviendo para  $K_z$  y usando la Ec. (9.12), tenemos:

$$K_z = \frac{qd}{\Delta h} = \frac{qd}{qd_1/K_1 + qd_2/K_2 + \dots + qd_n/K_n} \quad (9.14)$$

lo que conduce a:

$$K_z = \frac{d}{\sum_{i=1}^n d_i / K_i} \quad (9.15)$$

Ahora consideremos el flujo en la dirección paralela a la estratificación. Sea  $\Delta h$  la pérdida de carga hidráulica sobre una distancia horizontal  $L$ . La descarga  $Q$  a través de un ancho unitario del sistema es la suma de las descargas a través de cada estrato. La descarga específica es  $q_x = Q/d$  y, entonces, viene dada por:

$$q_x = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^n Q_i = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^n q_{x,i} d_i = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^n K_i \frac{\Delta h}{L} d_i = K_x \frac{\Delta h}{L} \quad (9.16)$$

donde  $K_x$  es una conductividad hidráulica horizontal equivalente, dada por:

$$K_x = \sum_{i=1}^n \frac{K_i d_i}{d} \quad (9.17)$$

Las Ecs. (9.15) y (9.17) dan los valores de  $K_x$  y  $K_z$  para una formación hidráulica *homogénea y anisótropa* que es hidráulicamente equivalente al sistema estratificado constituido por formaciones geológicas *homogéneas e isotropas*. Asimismo, es posible demostrar que  $K_x > K_z$  para todos los posibles valores de  $K_i$ . Por ejemplo, consideremos un conjunto de dobles cíclicos  $K_1, K_2, K_1, K_2, \dots$ , con  $K_1 = 10^4$  and  $K_2 = 10^2$ , entonces  $K_x/K_z = 25$ . Para  $K_1 = 10^4$  and  $K_2 = 1$ , entonces  $K_x/K_z = 2500$ . En el campo, no es poco común tener para una heterogeneidad estratificada valores de anisotropía regional del orden de  $K_x/K_z = 100$  o aún mayores. En los casos de rocas fracturadas es posible tener  $K_z > K_x$ , debido al comportamiento anisotrópico de las variaciones de apertura y espaciado en las juntas.

### **Compresibilidad y esfuerzo efectivo**

El análisis del flujo no estacionario de aguas subterráneas requiere del concepto de compresibilidad. Esta es una propiedad que describe el cambio de volumen, o deformación, inducida en un material bajo un esfuerzo aplicado. En la teoría clásica de resistencia de materiales elásticos, el módulo de elasticidad es una propiedad material más familiar. Se define como el cociente entre la variación del esfuerzo aplicado y el cambio de deformación resultante. La compresibilidad es simplemente la inversa del módulo de elasticidad. El término se usa tanto para materiales elásticos como inelásticos. Para el flujo de agua en un medio poroso es necesario definir dos términos de compresibilidad: uno para el agua y el otro para el medio poroso.

### **La compresibilidad del agua**

El esfuerzo es impartido al agua a través de la presión de fluido  $p$ . Un aumento de presión  $dp$  conduce a una disminución en el volumen  $V_w$  de una dada masa de agua. La compresibilidad del agua  $\beta$  se define, entonces, como

$$\beta = - \frac{1}{V_w} \frac{dV_w}{dp} \quad (9.18)$$

El signo negativo es necesario si deseamos un valor positivo de  $\beta$ . Esta ecuación implica una relación lineal entre la deformación volumétrica  $dV_w/V_w$  y el esfuerzo inducido en el fluido por el cambio de presión  $dp$ . La compresibilidad  $\beta$  es entonces la pendiente de la recta que relaciona la deformación y el esfuerzo en el agua, y esta pendiente no cambia en el rango de presiones hallada en la hidrología de aguas subterráneas. Para el rango de temperaturas de estas aguas, no hay variaciones de  $\beta$  con la temperatura, así que

consideraremos que  $\beta$  es una constante. Sus dimensiones son de inversa de presión (o esfuerzo), y su valor puede tomarse como  $4.4 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$  (o  $\text{Pa}^{-1}$ ).

### Esfuerzo efectivo

Consideremos ahora la compresibilidad del medio poroso. Supongamos que se está aplicando un esfuerzo a una masa unitaria de arena saturada. Hay tres mecanismos por los cuales se puede tener una reducción de volumen: (1) por compresión del agua en los poros, (2) por compresión de los granos de arena individuales, y (3) por un acomodamiento de los granos de arena en una configuración más compacta.

El primero de estos mecanismos depende de la compresibilidad del fluido  $\beta$ . Asumamos que el segundo mecanismo es despreciable, es decir, que los granos de arena individuales son incompresibles. Nuestra tarea es definir el término de compresibilidad que reflejara el tercer mecanismo. Para ello invocaremos el principio del esfuerzo efectivo. Consideremos el equilibrio de esfuerzos sobre un plano arbitrario a través de una formación geológica en profundidad (ver Fig. 6), donde  $\sigma_T$  es el esfuerzo total actuando hacia abajo sobre el plano. Este esfuerzo es soportado en parte por el esqueleto granular del medio poroso y en parte por la presión  $p$  del agua en los poros. La porción del esfuerzo total que no es soportada por el fluido se denomina esfuerzo efectivo  $\sigma_e$ . Es este esfuerzo el que está en realidad aplicado a los granos del medio poroso. El acomodamiento de los granos de suelo y la resultante compresión del esqueleto granular es causada por los cambios en el esfuerzo efectivo, y no por los cambios en el esfuerzo total. Ambos están relacionados con la simple ecuación:

$$\sigma_T = \sigma_e + p \quad (9.19)$$

o, en términos de cambios,

$$d\sigma_T = d\sigma_e + dp \quad (9.20)$$

Muchos de los problemas no estacionarios de flujo subsuperficial que deben ser analizados no involucran cambios en el esfuerzo total. El peso de la roca y el agua sobre cada punto del sistema a menudo permanece prácticamente constante en el tiempo. En tales casos,  $d\sigma_T = 0$ , y

$$d\sigma_e = -dp \quad (9.21)$$

Bajo estas circunstancias, si la presión del fluido aumenta, el esfuerzo efectivo disminuye en la misma cantidad, y viceversa. Cuando el esfuerzo total no cambia con el tiempo, el esfuerzo efectivo en cualquier punto del sistema y las deformaciones volumétricas resultantes ahí, son controladas por la presión del fluido en ese punto. Puesto que  $p = \rho g \psi$  y  $\psi = h - z$  ( $z$  es constante en el punto en cuestión), cambios en el esfuerzo efectivo en un punto están de hecho relacionados con los cambios en la carga hidráulica en ese punto:

$$d\sigma_e = -\rho g d\psi = -\rho g dh \quad (9.22)$$

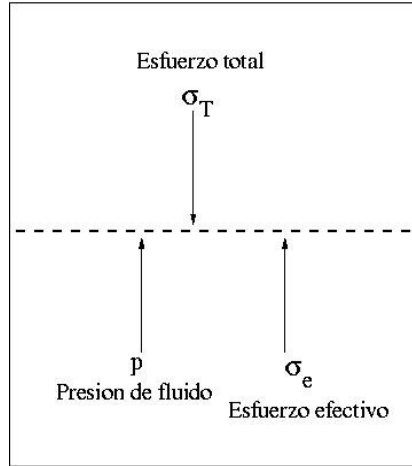


Fig. 6: Esfuerzo total, esfuerzo efectivo y presión de fluido sobre un plano arbitrario en un medio poroso saturado.

### Compresibilidad de un medio poroso

La compresibilidad de un medio poroso se define como:

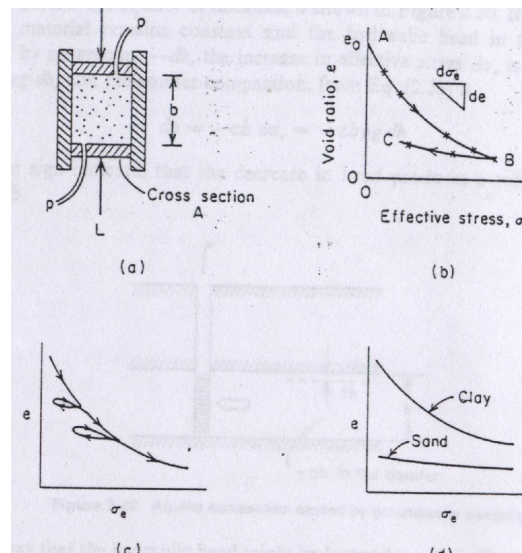
$$\alpha = -\frac{1}{V_T} \frac{dV_T}{d\sigma_e} \quad (9.23)$$

donde  $V_T$  es el volumen total de una masa de suelo y  $d\sigma_e$  es el cambio del esfuerzo efectivo. Recordemos que  $V_T = V_s + V_v$ , donde  $V_s$  es el volumen de sólidos y  $V_v$  es el volumen de los espacios vacíos (saturados de agua). Un aumento  $d\sigma_e$  del esfuerzo efectivo produce una disminución  $dV_T$  del volumen total de masa de suelo. En materiales granulares esta disminución ocurre casi enteramente como resultado de un reordenamiento de los granos. Si bien es cierto que los granos individuales pueden ser compresibles, su efecto es usualmente despreciable. En general,  $dV_T = dV_s + dV_v$ , pero para nuestros propósitos asumiremos que  $dV_s = 0$ , y entonces  $dV_T = dV_v$ .

Consideremos una muestra de suelo saturado que ha sido colocada en una celda de carga del laboratorio como se muestra en la Fig. 7a. Un esfuerzo total  $\sigma_T = L/A$  (donde  $L$  es la carga) puede aplicarse a la muestra a través de los pistones. La muestra está lateralmente confinada por las paredes de la celda, y al agua atrapada se le permite escapar a través de aberturas en los pistones hacia una pileta externa mantenida a una presión constante conocida. La reducción volumétrica de la muestra se mide para diversos valores de  $L$ , a medida que  $L$  aumenta de manera escalonada. En cada paso, el esfuerzo total incrementado  $d\sigma_T$  es inicialmente soportado por el agua bajo presiones de fluido incrementadas, pero el drenaje de agua de la muestra hacia la pileta externa lentamente transfiere el esfuerzo del agua al esqueleto granular. Este proceso transitorio se conoce con el nombre de consolidación, y el tiempo requerido para que el proceso de consolidación alcance el equilibrio hidráulico para cada valor de  $L$  puede ser considerable. Una vez obtenido, sin embargo, es sabido que  $dp = 0$  dentro de la muestra, y de la ec. (9.20),  $d\sigma_e = d\sigma_T = dL/A$ . Si la muestra de suelo tiene una razón de vacío inicial  $e_0$  y una altura inicial  $b$  (Fig. 7a), y asumiendo que  $dV_T = dV_v$ , la Ec. (9.23) puede escribirse como:

$$\alpha = -\frac{1}{b} \frac{db}{d\sigma_e} = -\frac{1}{1+e_0} \frac{de}{d\sigma_e} \quad (9.24)$$

La compresibilidad  $\alpha$  se determina usualmente a partir de la pendiente de un gráfico deformación versus esfuerzo en la forma de  $e$  versus  $\sigma_e$ . La curva AB en la Fig. 7b corresponde a la etapa de carga (aumento de  $\sigma_e$ ), BC corresponde a descarga (disminución de  $\sigma_e$ ). En general, la relación deformación versus esfuerzo no es lineal ni elástica. De hecho, para cargas y descargas repetitivas, muchos suelos de grano fino muestran propiedades de histéresis (Fig. 7c). La compresibilidad  $\alpha$ , a diferencia de la compresibilidad del fluido  $\beta$ , no es constante; sino que es una función del esfuerzo aplicado y depende de la historia de cargas previas.



**Fig. 3: (a) Celda de carga para la determinación de la compresibilidad del suelo; (b), (c) y (d) curvas esquemáticas de la relación de vacío versus el esfuerzo efectivo.**

La Fig. 7d muestra una comparación esquemática de las curvas  $e-\sigma_e$  para arcilla y arena. La pendiente más pequeña de la curva de la arena implica un menor valor de  $\alpha$ , y su linealidad implica un valor de  $\alpha$  que se mantiene constante sobre un amplio rango de  $\sigma_e$ . En los sistemas de aguas subterráneas, las fluctuaciones dependientes del tiempo de  $\sigma_e$  son a menudo bastante pequeñas, de modo que aún para arcillas, un valor constante de  $\alpha$  puede tener algún significado. La Tabla IV muestra los rangos de valores típicos de compresibilidad.

Material	Compres. $\alpha$ ( $\text{Pa}^{-1}$ )
Arcilla	$10^{-6}-10^{-8}$
Arena	$10^{-7}-10^{-9}$
Grava	$10^{-8}-10^{-10}$
Roca con juntas	$10^{-9}-10^{-10}$
Rocas sólida	$10^{-9}-10^{-11}$
Agua ( $\beta$ )	$4.4 \times 10^{-10}$

**Tabla IV: Rango de valores de compresibilidad.**

## Ecuación de conservación de la masa en un medio poroso

La ecuación de Darcy es la expresión básica para el balance de momentum en un flujo en un medio poroso. Debe combinarse con la ecuación de continuidad o de balance de masa para obtener una descripción completa del flujo. Aquí derivaremos esa ecuación no sólo para el caso de un medio saturado, sino que obtendremos una expresión general que será válida también para medios no saturados.

Consideremos un pequeño elemento de volumen  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  del medio poroso, y apliquemos sobre él la ecuación integral de conservación de la masa en la forma,

$$\frac{\partial \Delta M}{\partial t} = - \oint \rho \vec{q} \cdot \hat{n} dS \quad , \quad (9.25)$$

donde  $\Delta M = \rho \Delta V_w$  es la masa de agua contenida en  $\Delta V$  (siendo  $\Delta V_w$  el volumen de agua) y  $\Delta S$  es la superficie de control que rodea  $\Delta V$ . Esta ecuación expresa que la tasa de variación de la masa contenida en  $\Delta V$  es igual al flujo neto del fluido a través de su contorno  $\Delta S$ . Utilizando el teorema de Green, convertimos el flujo a través de  $\Delta S$  en una integral de volumen en  $\Delta V$ ,

$$\oint \rho \vec{q} \cdot \hat{n} dS = \int \nabla \cdot (\rho \vec{q}) dV \quad . \quad (9.26)$$

Para  $\Delta V$  suficientemente pequeño, el integrando puede extraerse fuera del signo integral, y la Ec.(9.26) se escribe ahora:

$$\frac{\partial \Delta M}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{q}) \Delta V = 0 \quad . \quad (9.27)$$

En general, el agua ocupa sólo una fracción del elemento de volumen, y entonces podemos escribir:

$$\Delta V_w = \theta \Delta V \quad , \quad (9.28)$$

donde  $\theta (< 1)$  es el contenido de *humedad* del medio. Además, el agua sólo puede ocupar parte o, a lo sumo, todo el volumen vacío del elemento, o volumen poral. Se define la porosidad del medio como la relación entre el volumen poral (vacío) y el volumen total en la forma:

$$n = \frac{\Delta V_v}{\Delta V} \quad . \quad (9.29)$$

Si el agua no llena todas las cavidades del elemento, esto es si  $\Delta V_w < \Delta V_v$ , se dice que el medio no está saturado. Se define el grado de saturación, o simplemente saturación, a la relación:

$$s = \frac{\Delta V_w}{\Delta V_v} \leq 1 \quad , \quad (9.30)$$

de modo tal que  $s=1$  corresponde a un medio saturado. Nótese que el contenido de humedad puede escribirse ahora en términos de la porosidad del medio y la saturación como:

$$\theta = ns \quad .$$

Haciendo uso de estas definiciones, la masa de agua contenida en nuestro elemento  $\Delta V$  puede escribirse como:

$$\Delta M = \rho ns \Delta x \Delta y \Delta z \quad . \quad (9.31)$$

Su variación temporal puede deberse a variaciones de  $\rho$ ,  $n$ ,  $s$  ó  $\Delta z$ , puesto que consideramos que la sección horizontal  $\Delta x \Delta y$  del elemento no se deforma por efecto del flujo o la fuerza de gravedad. Luego, obtenemos:

$$\frac{\partial \Delta M}{\partial t} = \Delta x \Delta y \left( ns \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho ns \frac{\partial \Delta z}{\partial t} + \rho s \Delta z \frac{\partial n}{\partial t} + \rho n \Delta z \frac{\partial s}{\partial t} \right) . \quad (9.32)$$

Analizaremos por separado cada uno de estos cuatro términos entre paréntesis.

Para el primer término, empleamos la definición del coeficiente de compresibilidad (isotérmico) del agua,

$$\beta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} , \quad (9.33)$$

que expresa la variación relativa de densidad por unidad de cambio de la presión (a temperatura constante). Luego,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta \rho \frac{\partial p}{\partial t} . \quad (9.34)$$

Análogamente, para el segundo término, se define el coeficiente de compresibilidad vertical del suelo,  $\alpha$ , como:

$$\alpha = - \frac{1}{\Delta z} \frac{\partial \Delta z}{\partial \sigma_e} , \quad (9.35)$$

donde  $\sigma_e$  es el esfuerzo normal efectivo que soporta la matriz porosa. La carga vertical por unidad de área a una determinada profundidad del suelo debe ser balanceada tanto por este esfuerzo matricial como por la presión  $p$  del agua contenida en los poros. Así,  $p + \sigma_e = cte$  y entonces,

$$\frac{\partial \Delta z}{\partial t} = - \alpha \Delta z \frac{\partial \sigma_e}{\partial t} = \alpha \Delta z \frac{\partial p}{\partial t} . \quad (9.36)$$

Para el tercer término, suponemos que el flujo de agua no desgasta el volumen sólido  $V_s$  (arrancando y arrastrando partículas del medio), es decir:

$$\Delta V_s = \Delta V - \Delta V_v = (1-n) \Delta V = (1-n) \Delta x \Delta y \Delta z = cte . , \quad (9.37)$$

de donde obtenemos:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = (1-n) \frac{1}{\Delta z} \frac{\partial \Delta z}{\partial t} = - (1-n) \alpha \frac{\partial \sigma_e}{\partial t} . \quad (9.38)$$

Combinando las Ecs.(9.34), (9.36) y (9.38) con las Ecs.(9.25) y (9.30), obtenemos:

$$n \rho \frac{\partial s}{\partial t} + n s \rho \left( \beta + \frac{\alpha}{n} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{q}) = 0 , \quad (9.39)$$

que es la ecuación de conservación de la masa para flujos en medios porosos. Ésta dará lugar a la ecuación fundamental de gobierno para flujos en medios saturados y no saturados. A ella debe agregársele la ley de Darcy, que da cuenta de la dinámica del flujo atendiendo a las propiedades de la conductividad hidráulica del medio.