

Aceleración de la gravedad

Plano inclinado

Biera, Adriana

Huck, Gabriel

Palermo, Pedro

Adribiera@hotmail.com

Huck_gabriel@hotmail.com

Pedro_leon44@hotmail.com

Introducción

La gravedad, o más correctamente la aceleración de gravedad, es la aceleración con la cual se mueven los cuerpos al caer. El fenómeno de la caída de un cuerpo se produce debido a la fuerza de gravedad o peso del mismo, que es la fuerza con la cual el planeta tierra atrae a los cuerpos cercanos a su superficie.

En la superficie de la Tierra el valor de esta aceleración, que se indica con la letra g (del orden de $9,81\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$), sería igual en cualquier punto si el globo fuese perfectamente esférico y si la fuerza centrífuga debida a la rotación terrestre, que tiene como efecto una disminución de la fuerza de atracción gravitacional, tuviera en cualquier parte el mismo valor. Al no verificarse estas dos condiciones, g varía ligeramente de un lugar a otro [1].

Existen diversos métodos para estimar el valor de g , a través de experimentos que involucran a la fuerza peso y por consiguiente a la aceleración de la gravedad.

Uno de ellos se basa en el estudio del movimiento de un cuerpo en un **plano inclinado**, que es una superficie plana que forma un ángulo muy agudo (mucho menor de 90°) con respecto a la horizontal.

Por el principio de Conservación de la Energía, se tiene que si se desliza por una superficie sin rozamiento un cuerpo, la variación de la energía mecánica (que es nula) será igual a la variación de energía cinética más la variación de energía potencial:

$$\Delta E_m = \Delta E_k + \Delta E_p \quad (1)$$

$$\Delta E_m = 0$$

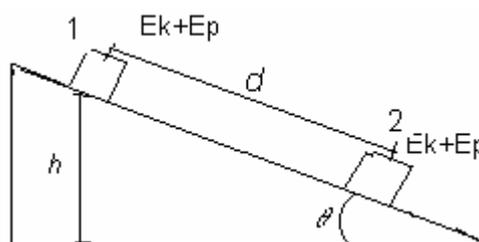


Figura 1: movimiento de un cuerpo en un plano inclinado.

Entonces se tiene que:

$$\Delta E_{k2} + \Delta E_{p2} = \Delta E_{k1} + \Delta E_{p1} \quad (2)$$

siendo E_{k2} la energía cinética en 2, E_{p2} la energía potencial en 2, E_{k1} la energía cinética en 1 y E_{p1} la energía potencial en 1.

Si medimos la altura h desde el punto b , tendremos:

$$\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = mgh \quad (3)$$

Si se simplifican las masas m tendremos:

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = gh \quad (4)$$

Por último, teniendo en cuenta que d es la distancia recorrida por el cuerpo y θ el ángulo que forma el plano con la horizontal y despejando g , tendremos:

$$\frac{(v_2^2 - v_1^2)}{2d\text{sen}\theta} = g \quad (5)$$

Procedimiento

Se montó un kit Pasco Scientific, compuesto por un riel de aire comprimido y su fuente de alimentación, sobre una mesa del laboratorio. Se niveló el riel de manera que quedara horizontal. Para esto se observó que un carrito colocado sobre el riel (con el flujo de aire encendido) no se moviera en ninguna dirección. Una vez nivelado se procedió a determinar el ángulo del plano inclinado como se detalla en el apéndice A. Luego se colocaron los Sensores Photogate Head (Pasco) a una determinada distancia (d). Se dejó deslizar el carrito desde el punto superior del riel inclinado, y cada sensor midió el tiempo que tardaba el carrito en recorrer una distancia igual a su longitud, obteniéndose a partir de éstos dos velocidades: v_1 y v_2 . Esta secuencia se repitió 11 veces para tres distancias diferentes entre los sensores, manteniendo el ángulo de inclinación θ constante.

De la ecuación (5)

$$v_2^2 - v_1^2 = 2g\text{d}\text{sen}\theta \quad (6)$$

Se obtuvo el valor de g a partir de una regresión lineal graficando $v_2^2 - v_1^2$ en función de $2d$.

Posteriormente se realizó un experimento para determinar si la fuerza de rozamiento, la cual se consideró despreciable según el modelo que expresa la ecuación (6), había influido en los datos obtenidos.

Para esto se impulsó hacia arriba, por el riel inclinado, el carrito que pasaba por delante de un sensor que nuevamente medía el tiempo que tardaba el mismo en recorrer una distancia igual a su longitud. Luego el carrito recorría una distancia d' antes de detenerse y comenzar a descender, pasando nuevamente delante del

sensor. A partir de estos tiempos se calcularon la velocidad de ascenso y de descenso del carrito en el mismo punto del riel.

Esta secuencia se repitió 11 veces.

Para el nuevo modelo a adoptar se tuvo en cuenta que:

$$\Delta E_m = WF_R \quad (7)$$

donde E_m es la energía mecánica y WF_R el trabajo de la fuerza de roce.

Como la velocidad de ascenso y la velocidad de descenso se tomaron en el mismo punto del plano inclinado:

$$\Delta E_m = \Delta E_k \quad (8)$$

donde E_k es la energía cinética.

Entonces se tiene, considerando la fuerza de rozamiento $F_R < 0$:

$$2d'F_R = \frac{1}{2}m(v_d^2 - v_a^2) \quad (9)$$

de donde:

$$\frac{F_R}{m} = \frac{(v_d^2 - v_a^2)}{4d'} \quad (10)$$

siendo v_a la velocidad de ascenso, v_d la velocidad de descenso, m la masa del carrito, d' la distancia que recorría el carrito desde que pasaba por delante del sensor hasta que comenzaba a descender.

Una vez calculado el valor del término $\frac{F_R}{m}$, se obtuvo nuevamente el valor de g a partir de la misma regresión lineal considerando que la ecuación (6) ahora se expresa como:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2d \left(g \sin \theta + \frac{F_R}{m} \right) \quad (11)$$

El cálculo del término $\frac{F_R}{m}$ con su incertidumbre correspondiente se puede ver en el apéndice B.

Resultados

En el siguiente gráfico se tiene $(v_2^2 - v_1^2)$ en función de $2d$. La tabla con dichos valores se encuentran en el apéndice C.

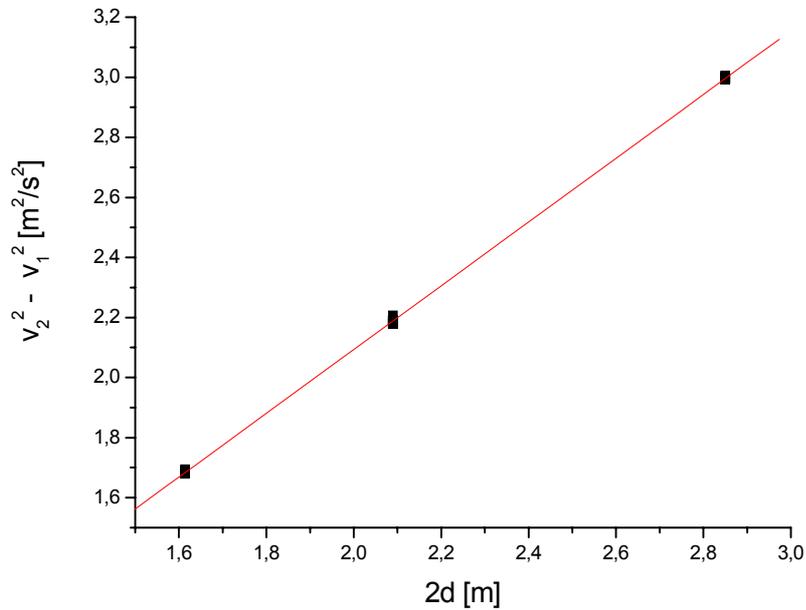


Gráfico 1

A partir de la regresión lineal se obtuvieron los siguientes valores:

$$\alpha = 1,06172 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

$$\beta = -0,03018 \text{ m}^2 \text{ s}^2$$

$$r = 0,99994$$

$$\sigma_\alpha = 0,00211 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

$$\sigma_\beta = 0,00473 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

donde α es la pendiente de la recta, β la ordenada al origen, r coeficiente de correlación lineal (si $r = \pm 1$ la relación es lineal unívocamente), σ la desviación estándar y σ_α , σ_β las desviaciones estándar correspondientes a α y β respectivamente.

En el primer caso, según el modelo que desprecia el efecto del rozamiento, la pendiente de la recta es:

$$\alpha = g \operatorname{sen} \theta$$

De esta manera:

$$g = \frac{\alpha}{\operatorname{sen} \theta} = (9,9 \pm 0,2) \text{ m/s}^2$$

Su incertidumbre se calculó mediante:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta \alpha}{\alpha} + \frac{\Delta \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta} \longrightarrow \Delta g = \left(\frac{\Delta \alpha}{\alpha} + \frac{\Delta \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right) g$$

En el segundo caso, según el modelo que tiene en cuenta el efecto del rozamiento, la pendiente de la recta es:

$$\alpha = g \operatorname{sen} \theta + \frac{F_R}{m}$$

De esta manera:

$$g = \frac{\alpha - \frac{F_R}{m}}{\operatorname{sen} \theta} = (10,0 \pm 0,4) \text{ m/s}^2$$

Su incertidumbre se calculó mediante:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta \left(\alpha - \frac{F_R}{m} \right)}{\alpha - \frac{F_R}{m}} + \frac{\Delta \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta} \longrightarrow \Delta g = \left(\frac{\Delta \alpha + \Delta \frac{F_R}{m}}{\alpha - \frac{F_R}{m}} + \frac{\Delta \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right) g$$

El cálculo de la incertidumbre del $\operatorname{sen} \theta$ se puede ver en el apéndice A

Análisis de resultados

El valor obtenido para g en la primera experiencia fue de $(9,9 \pm 0,2)m/s^2$, lo que representa el intervalo $[9,7 - 10,1]m/s^2$. En el segundo caso, donde se consideró la fuerza de rozamiento, el valor de g fue de $(10,0 \pm 0,4)m/s^2$, representando el intervalo de $[9,6 - 10,4]m/s^2$. En ambos intervalos también se encuentra el valor de la aceleración de la gravedad medido con técnicas más precisas, $9,799165 m/s^2$ [2]. Se puede notar que la incertidumbre en el valor de g en el segundo caso es mayor que en el primero. Esto se debe a que en el segundo caso también introdujo una incertidumbre el cálculo del término $\frac{F_R}{m}$.

Como resultado de la regresión lineal se obtuvo un valor negativo para β . Esto significa que la recta que mejor se ajusta a las observaciones tiene ordenada al origen no nula, lo cual no coincide con lo expresado por los modelos adoptados. De esto se puede deducir que la gráfica está desplazada hacia abajo o hacia la derecha, lo cual indicaría que se está subestimando el valor de $v_2^2 - v_1^2$, o bien, sobreestimando los valores de d .

Por otro lado, el coeficiente de correlación obtenido fue 0,99994 lo que indica que las variables están bien relacionadas.

Conclusión

Ambos valores obtenidos para g : $(9,9 \pm 0,2)m/s^2$ y $(10,0 \pm 0,4)m/s^2$ son bastante cercanos al valor obtenido con técnicas más precisas, lo cual indica que este método es aceptable para hallar un valor aproximado de la aceleración de la gravedad. El resultado de la experiencia podría mejorarse principalmente si se mejora la medida del seno del ángulo involucrado, ya que es el que presenta más dificultades a la hora de determinar su valor y también el que mayor error introduce.

Bibliografía

- [1] Sears-Zemansky-Young-Freedman. Física universitaria. Volumen I. 6ª edición Addison Wesley Longman.
- [2] Información brindada por el Dr. A. Introcaso, Grupo de Geofísicos del Instituto de Física de Rosario (IFIR)

Apéndice A

Como la superficie de la mesa de laboratorio no se encontraba horizontal, se midieron con una regla metálica las alturas h_1 (30,1 cm, del riel a la mesa) y h_2 (9,2cm) en cada extremo del riel ya nivelado, con el fin de determinar el apartamiento δh de la superficie de la mesa con respecto de la horizontal. Una vez elevado uno de los extremos de la barra, logrando así un ángulo de inclinación θ , se utilizó este δh para corregir las alturas que se emplearon en el cálculo de $\text{sen}\theta$.

La mesada estaba desnivelada unos 0,6 cm por debajo de la horizontal, por lo cual fue necesario realizar el siguiente ajuste:

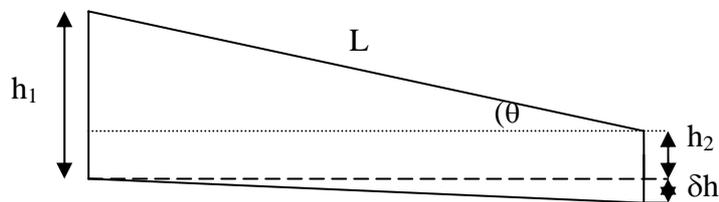


Figura 1: esquema del plano inclinado.

Cálculo del sen del ángulo:

$$\text{sen}\theta = \frac{h_1 - (h_2 - \delta h)}{L} = (0,108 \pm 0,002)$$

La incertidumbre del $\text{sen}\theta$ se calculó de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta \text{sen}\theta}{\text{sen}\theta} = \frac{\Delta(h_1 - h_2 + \delta h)}{h_1 - h_2 + \delta h} + \frac{\Delta L}{L} \longrightarrow \Delta \text{sen}\theta = \left(\frac{\Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta \delta h}{h_1 - h_2 + \delta h} + \frac{\Delta L}{L} \right) \text{sen}\theta$$

Apéndice B

A continuación se muestra como fue calculado el término $\frac{F_R}{m}$

$$\frac{F_R}{m} = \frac{(v_d^2 - v_a^2)}{4d'}$$

	t_a [s]	t_d [s]	v_a [m/s]	v_d [m/s]	d' [m]	$\frac{F_R}{m}$ [m/s ²]
1	0,0857	0,0864	1,5072	1,495	1,073	-0,008534
2	0,0877	0,0884	1,4729	1,4612	1,073	-0,007998
3	0,0919	0,0924	1,4055	1,3979	0,983	-0,005419
4	0,0994	0,1008	1,2995	1,2814	0,843	-0,013854
5	0,1141	0,1152	1,1321	1,1213	0,663	-0,009177
6	0,0975	0,0985	1,3248	1,3114	0,878	-0,010058
7	0,1123	0,1131	1,1502	1,1421	0,678	-0,006846
8	0,0875	0,0883	1,4762	1,4629	1,073	-0,009108
9	0,0904	0,0912	1,4289	1,4163	1,008	-0,008891
10	0,089	0,09	1,4513	1,4352	1,033	-0,011247
11	0,0925	0,0939	1,3964	1,3756	0,963	-0,014968
Promedio	0,0953	0,0962	1,3677	1,3546	0,933	-0,009645

$$\frac{F_R}{m} = \frac{\bar{F}_R}{m} \pm u_t$$

$$\frac{F_R}{m} = (-0,01 \pm 0,02) m/s^2$$

donde $u_t = \sqrt{u_\alpha^2 + u_i^2}$

siendo $u_\alpha = z_\alpha \left(\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}} \right)$

$z_\alpha = 1,96$ para $\alpha = 0,95$ (95% de probabilidad de que el valor verdadero se halle en el intervalo indicado)

S_{n-1} = estimador de la desviación estándar

n = número de mediciones

$$\text{y siendo } u_i = \sqrt{\left(\frac{\delta \frac{F_R}{m}}{v_a}\right)^2 u_{iva}^2 + \left(\frac{\delta \frac{F_R}{m}}{v_d}\right)^2 u_{ivd}^2 + \left(\frac{\delta \frac{F_R}{m}}{d'}\right)^2 u_{id'}^2}$$

Apéndice C

Primera muestra tomada a partir de una distancia entre fotosensores de 1,045 m

	t_1 [s]	t_2 [s]	v_1 [m.s ⁻¹]	v_2 [m.s ⁻¹]	$(v_2^2 - v_1^2)$ [m ² s ⁻²]	2d
1	0,1126	0,0691	1,147158082	1,869319826	2,178384949	2,09
2	0,1126	0,0691	1,147158082	1,869319826	2,178384949	
3	0,1125	0,0688	1,148177778	1,87747093	2,206584884	
4	0,1126	0,0690	1,147158082	1,872028986	2,188520858	
5	0,1126	0,0691	1,147158082	1,869319826	2,178384949	
6	0,1127	0,0690	1,146140195	1,872028986	2,190855176	
7	0,1126	0,0690	1,147158082	1,872028986	2,188520858	
8	0,1126	0,0691	1,147158082	1,869319826	2,178384949	
9	0,1126	0,0690	1,147158082	1,872028986	2,188520858	
10	0,1126	0,0690	1,147158082	1,872028986	2,188520858	
11	0,1126	0,0690	1,147158082	1,872028986	2,188520858	
Promedio			1,147158246	1,871538559	2,186689468	
Desviacion			0,000480263	0,002495834	0,008832525	

Segunda muestra tomada a partir de una distancia entre fotosensores de 1,425 m

	t_1 [s]	t_2 [s]	v_1 [m.s ⁻¹]	v_2 [m.s ⁻¹]	$(v_2^2 - v_1^2)$ [m ² s ⁻²]	2d
1	0,1826	0,06910	0,70739321	1,86931983	2,99395146	2,85
2	0,1836	0,06910	0,70354031	1,86931983	2,99938765	
3	0,1827	0,06910	0,70700602	1,86931983	2,9944991	
4	0,1826	0,06900	0,70739321	1,87202899	3,00408737	
5	0,1826	0,06910	0,70739321	1,86931983	2,99395146	
6	0,1827	0,06910	0,70700602	1,86931983	2,9944991	
7	0,1826	0,06900	0,70739321	1,87202899	3,00408737	
8	0,1826	0,06910	0,70739321	1,86931983	2,99395146	
9	0,1828	0,06910	0,70661926	1,86931983	2,99504584	
10	0,1826	0,06910	0,70739321	1,86931983	2,99395146	
11	0,1827	0,06910	0,70700602	1,86931983	2,9944991	
Promedio			0,70686699	1,8698124	2,9965374	
Desviacion			0,0011938	0,00114228	0,00420311	

Tercera muestra tomada con una distancia entre fotosensores de 0,807 m

	$t_1[s]$	$t_2[s]$	$v_1[ms^{-1}]$	$v_2[ms^{-1}]$	$(v_2^2 - v_1^2)[m^2s^{-2}]$	2d
1	0,0961	0,0691	1,34412071	1,86931983	1,68769614	1,614
2	0,096	0,0691	1,34552083	1,86931983	1,6839303	
3	0,096	0,069	1,34552083	1,87202899	1,69406621	
4	0,0959	0,0691	1,34692388	1,86931983	1,68015268	
5	0,0961	0,0691	1,34412071	1,86931983	1,68769614	
6	0,0959	0,0691	1,34692388	1,86931983	1,68015268	
7	0,096	0,0691	1,34552083	1,86931983	1,6839303	
8	0,0959	0,069	1,34692388	1,87202899	1,69028859	
9	0,096	0,0691	1,34552083	1,86931983	1,6839303	
10	0,0959	0,0691	1,34692388	1,86931983	1,68015268	
11	0,0959	0,0691	1,34692388	1,86931983	1,68015268	
Promedio			1,34590401	1,8698124	1,68474079	
Desviacion			0,00110575	0,00114228	0,00469311	