Medición de la gravedad

Física Experimental 1
Noviembre de 2006

Mac Intyre, Jonatan
Portillo, Miguel
jonamacintyre@hotmail.com
miguelanibalportillo@hotmail.com

Introducción

En 1687, Sir Isaac Newton publicó en su obra *Principia Matemática Philosophiae Naturalis* la **ley de gravitación universal** [1], la cual se le ocurrió, según lo que cuenta la historia, estando sentado debajo de un árbol viendo caer una manzana. Newton concluyó que existía una relación de fuerza entre dos masas que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que existe entre ellas. Esta relación puede expresarse como

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}$$

donde G es una constante universal, r la distancia que existe entre las masas M y m, $\vec{u}$ es un vector unitario en la dirección y sentido que va de M a m .

Si de esta relación eliminamos a una de las masas, por ejemplo m, se define a la **intensidad del campo gravitatorio** Γ como

$$\vec{\Gamma} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}$$

Así, el campo gravitatorio tiene dirección opuesta al del vector unitario $\vec{u}$, que apunta a lo largo de la línea que une a la masa que produce el campo con el punto en donde se calcula éste.

Si utilizamos a M como la masa de la Tierra y a r como el radio de la Tierra, el campo gravitatorio que produce la Tierra es de 9,786 m/s^2, aproximadamente, al cual se le da el nombre de aceleración de la gravedad. Ésta varía según la altura con respecto al nivel del mar.

Utilizando un péndulo físico, nos dispondremos a medir la aceleración de la gravedad en la ciudad de Tandil.

Marco teórico

Supongamos un cuerpo plano de masa m colgado de un punto situado a una distancia b de su centro de masa, como se muestra en la figura 1 ([1] y [2]). El cuerpo oscila por un eje perpendicular ZZ´ debido a su propio peso.

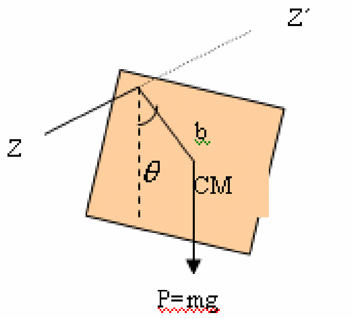


Fig. 1
-Péndulo Físico-

Si calculamos el torque τ con respecto al eje ZZ´, siendo I la inercia rotacional del cuerpo, éste es

$$\tau = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Por otra parte, la recta b forma un ángulo θ con la vertical, el torque que actúa sobre el cuerpo debido a su peso $\vec{P} = m\vec{g}$ es

$$\tau = -mgb\,\mathrm{sen}\,\theta$$

donde el signo menos corresponde a que se opone al ángulo de desplazamiento.

Igualando estas dos últimas expresiones se obtiene

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgb\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Suponiendo que las oscilaciones son pequeñas, podemos usar la aproximación de $\mathrm{sen}\,\theta \cong \theta$. Entonces la ecuación es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgb}{I}\theta$$

o

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgb}{I}\theta = 0 \quad (1)$$

La inercia rotacional *I* puede calcularse mediante el teorema de Steiner como:

$$I = I_{CM} + mb^2 \qquad (2)$$

donde I_{CM} es la inercia rotacional con respecto al centro de masa. Éste se puede expresar como $I_{CM} = mK^2$, donde *K* se denomina radio de giro. Reemplazando (2) en (1) y simplificando las masas, resulta que:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{gb}{b^2 + K^2}\theta = 0$$

Esta es una ecuación diferencial, cuya solución demuestra que el péndulo oscilará de manera armónica alrededor de la posición vertical con período *T* dado por:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{K^2 + b^2}{gb}}} \qquad (3)$$

Si modificamos la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$T^2 b = \frac{4\pi^2 K^2}{g} + \frac{4\pi^2}{g}b^2 \quad (4)$$

puede verse que T^2b será una función lineal de b^2, con pendiente $\alpha = 4\pi^2/g$, y ordena $\beta = 4\pi^2K^2/g$. De esta manera, si se mide el período de oscilación *T* para distintos valores de *b*, será posible obtener *g* a partir de una regresión lineal de T^2b vs. b^2.

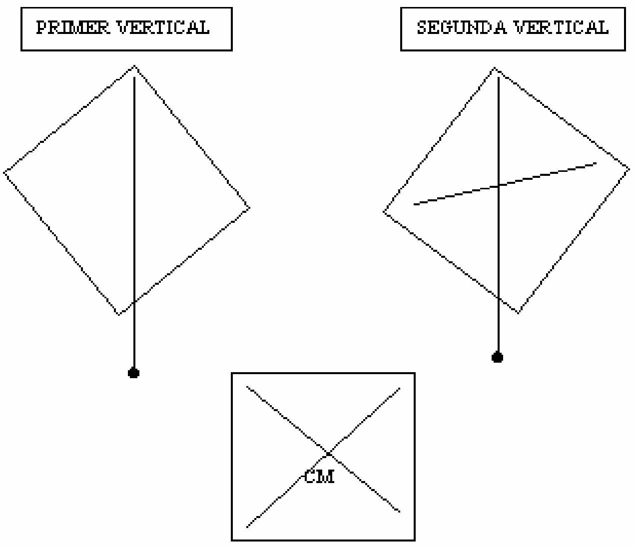


Fig. 2
- La intersección ubican el centro de masa -

Experimental

Para realizar el péndulo utilizamos una pieza cuadrada de fibra fenólica de 3 milímetros de espesor y con una dimensión de 50 x 50 centímetros. Se utilizó madera con el fin de aumentar la inercia del péndulo, disminuyendo los efectos del rozamiento con el aire.

Para nuestro experimento necesitamos ubicar el centro de masa del péndulo. Este se midió mediante el uso de una plomada de la siguiente forma. Se colgó en reposo al péndulo de un orificio hecho en un vértice. Se colgó una plomada desde el mismo punto para determinar la vertical. Se realizó lo mismo pero colgamos el péndulo de otro vértice y se determinó la nueva vertical. El centro de masa se encontró en la intersección de las verticales como se muestra en la figura 2.

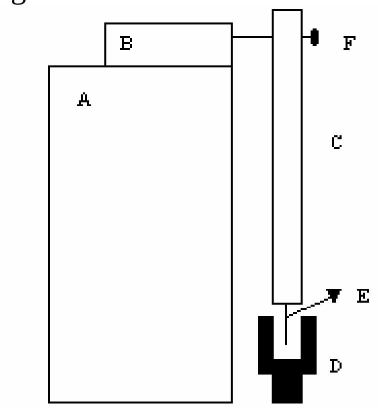


Fig. 3
A – Mesada; B – Madera;
C – Péndulo; D – Fotosensor
E – Invisible; F – Clavo

Una vez establecido el centro de masa, realizamos una serie de agujeros, por encima del mismo, estos puntos quedaron aproximadamente alineados a lo largo de una de las verticales utilizadas para determinar el CM del péndulo. Luego, suspendimos el péndulo de un clavo incrustado en una pieza de madera apoyada sobre la mesada del laboratorio (ver figura 3), para que oscile. La elección de un clavo se debió a que produce menos desgaste en la madera y por consiguiente el péndulo no se frena tanto. Cada vez que colgamos el péndulo de los diferentes agujeros, medimos la distancia *b* que hay al centro de masa con una cinta métrica que posee un error de 0,001 metro. Colocamos en el extremo inferior un invisible, que activa a un fotosensor ubicado en la vertical del péndulo. El fotosensor sirvió para medir el período de oscilación que realizaba el péndulo con un error de 0,001 segundos.

Una vez colgado el péndulo lo desplazamos 15º (para ángulos más grande que este, la ecuación (3) ya no es válida) de la posición de equilibrio, lo soltamos y empieza a oscilar. Para cada uno de los agujeros del péndulo, es decir, para cada uno de los posibles valores de *b*, medimos el tiempo que oscila 15 veces (ver apéndice), este proceso se repitió 3 veces por cada valor de *b*. Para medir un ángulo de 15º se tomó la altura a la que se encuentra, de donde cuelga el péndulo con respecto al suelo, luego mediante relaciones trigonométricas se definió la longitud de desplazamiento horizontal con respecto a un punto bajo la vertical. Se construyó un triángulo con un hilo que sirvió para desplazar péndulo 15º de manera repetitiva.

Resultados

Para cada una de las diferentes longitudes *b* se midió el tiempo que tarda en realizar 15 períodos (n = 15), estos datos se en listan en la siguiente tabla:

$b \pm \delta b$ (m)	$nT \pm \delta(nT)$ (s)	$T \pm \delta T$ (s)
0,328 ± 0,001	20,506 ± 0,001	1,36707 ± 0,00007
0,328 ± 0,001	20,505 ± 0,001	1,36700 ± 0,00007
0,328 ± 0,001	20,501 ± 0,001	1,36673 ± 0,00007
0,273 ± 0,001	19,77 ± 0,001	1,31800 ± 0,00007
0,273 ± 0,001	19,777 ± 0,001	1,31847 ± 0,00007
0,273 ± 0,001	19,784 ± 0,001	1,31893 ± 0,00007
0,221 ± 0,001	19,394 ± 0,001	1,29293 ± 0,00007
0,221 ± 0,001	19,389 ± 0,001	1,29260 ± 0,00007
0,221 ± 0,001	19,391 ± 0,001	1,29273 ± 0,00007
0,175 ± 0,001	19,464 ± 0,001	1,29760 ± 0,00007
0,175 ± 0,001	19,449 ± 0,001	1,29660 ± 0,00007
0,175 ± 0,001	19,469 ± 0,001	1,29793 ± 0,00007
0,108 ± 0,001	20,01 ± 0,001	1,33400 ± 0,00007
0,108 ± 0,001	21,017 ± 0,001	1,40113 ± 0,00007
0,108 ± 0,001	19,629 ± 0,001	1,30860 ± 0,00007

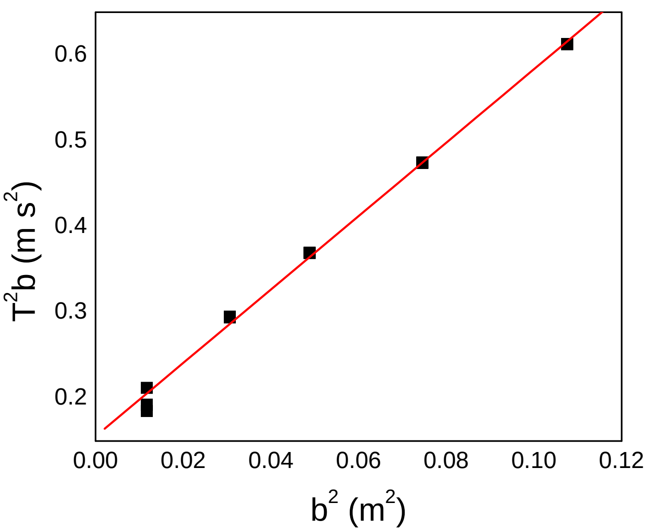
Tabla 1

Se encuentra los valores calculados para b^2 y T^2b, necesarios para realizar la regresión lineal de acuerdo a la ecuación (4):

$b^2 \pm \delta(b^2)$ (m^2)	$T^2b \pm \delta(T^2b)$ (m s^2)
0,1076 ± 0,0007	0,613 ± 0,003
0,1076 ± 0,0007	0,613 ± 0,003
0,1076 ± 0,0007	0,613 ± 0,003
0,0745 ± 0,0006	0,474 ± 0,003
0,0745 ± 0,0006	0,475 ± 0,003
0,0745 ± 0,0006	0,475 ± 0,003
0,0488 ± 0,0005	0,369 ± 0,003
0,0488 ± 0,0005	0,369 ± 0,003
0,0488 ± 0,0005	0,369 ± 0,003
0,0306 ± 0,0004	0,295 ± 0,003
0,0306 ± 0,0004	0,294 ± 0,003
0,0306 ± 0,0004	0,295 ± 0,003
0,0117 ± 0,0003	0,192 ± 0,003
0,0117 ± 0,0003	0,212 ± 0,003
0,0117 ± 0,0003	0,185 ± 0,003

Tabla 2

A partir de la ecuación (4) y con estos datos hacemos la regresión lineal, obteniendo la gráfica b^2 vs. T^2b de la siguiente manera:



Gráfica 1

Los resultados obtenidos por la regresión lineal son:

$$\alpha = 4{,}28 \pm 0{,}07 (s^2 / m)$$
$$\beta = 0{,}156 \pm 0{,}005 (ms^2)$$
$$R = 0{,}99851$$

donde R es coeficiente de correlación.

Si observamos la ecuación (4), resulta que:

$$\alpha = \frac{4\pi^2}{g} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2}{\alpha}$$

Con esto resulta que g = 9,2 m/s^2.

El error de g lo obtenemos de la siguiente manera:

$$\sigma_g{}^2 = (\frac{\partial g}{\partial \alpha})^2 \sigma_\alpha{}^2 \Rightarrow \sigma_g = \frac{4\pi^2}{\alpha^2}\sigma_\alpha$$

Usando lo anterior, el valor obtenido para el error σ_g es 0,2 m/s^2.

Finalizando, el valor obtenido de la aceleración de la gravedad es de:

$$\boxed{g \pm \sigma_g = 9{,}2 \pm 0{,}2 (m / s^2)}$$

Conclusiones

Comparando el valor calculado de la aceleración de la gravedad con el brindado por el Dr. A. Introcaso, la cual es de 9,799165 m/s^2 [3], la obtenida no difiere tanto. El error con respecto a esta es del 6,1%, por lo tanto concluimos que el valor obtenido por medio de este método es lo bastante bueno. Además, las variables se ajustan a la relación experimental, ya que el coeficiente de correlación obtenido es de 0,99851, con lo cual el valor de g es entonces confiable.

Sin embargo, al realizar la experiencia hubo ciertos errores que podrían mejorar el valor obtenido. El primero fue la determinacion del centro de masa, que nos cambiaría las distintas distancias medidas de b. Otro fue el propio péndulo, que tenía un hundimiento en el centro que provocaba que no oscile en el plano, sino que haga un zigzag cambiando el valor del período.

La forma del péndulo debería haber sido diferente, hubiese sido preferible que tenga una forma de paleta, para tener mayor peso en una de sus partes y menor rozamiento con el aire. La consecuencia fue que los últimos puntos, los más cercanos al centro de masa, generan demasiada fluctuación de los períodos, ya que en esta parte de la experiencia hay mayor peso en la parte superior del péndulo que hace que zigzaguee más.

Para experiencias futuras se debería tomar una mayor cantidad de mediciones más cercanas entre si y debería tener en cuenta todas las posibilidades de minimizar estas fuentes de fluctuaciones para obtener un valor más satisfactorio.

Apéndice

1) Cantidad de períodos elegidos

Previamente al comienzo de la experiencia, se planteó la cuestión de cuál era el mayor número de períodos que podría realizar el péndulo sin que estos valores varíen demasiado, con respecto al tiempo que tarda en realizar un período. Ésto se llevo a cabo de la siguiente manera. Se tomaron varios tiempos desde una misma distancia *b* cambiando la cantidad *n* de oscilaciones que realizaba el péndulo. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

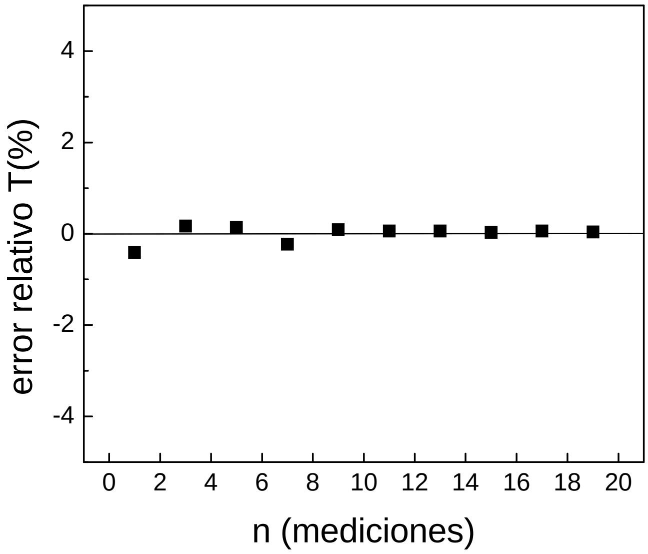
$t = Tn \pm \delta(Tn)$ (s)	n	$T = t/n \pm \delta T$ (s)	Error relativo de T (%)
1,361 ± 0,001	1	1,361 ± 0,001	-0,41706
4,107 ± 0,001	3	1,36900 ± 0.00003	0,16829
6,843 ± 0,001	5	1,36860 ± 0.00002	0,13902
9,545 ± 0,001	7	1,36357 ± 0.00002	-0,22891
12,311 ± 0,001	9	1,36789 ± 0.00001	0,08699
15,043 ± 0,001	11	1,36755 ± 0.00001	0,06186
17,778 ± 0,001	13	1,36754 ± 0.00001	0,06135
20,506 ± 0,001	15	1,36707 ± 0.00001	0,02683
23,248 ± 0,001	17	1,367530 ± 0.000006	0,06069
25,977 ± 0,001	19	1,367210 ± 0.000006	0,03735

El error relativo obtenido en la cuarta columna de la tabla anterior, se obtuvo de la siguiente manera:

$$T_{\%} = \left(1 - \frac{T_i}{\overline{T}}\right) \times 100$$

donde T_i es cada uno de los valores del tiempo, o sea la tercer columna, y $\overline{T}$ es un promedio de estos tiempos.

A partir de la tabla podemos graficar el error relativo *n* vs. *T*, que es lo que nos interesa, ya queremos obtener cual es el número de periodos óptimo para realizar la experiencia con el menor error posible. Esta gráfica queda de la siguiente manera:



Tomamos hasta 19 periodos y los tiempos no fluctuaban, entonces se tomo 15, ya que hasta cantidad de n períodos que tomamos el tiempo no variaba demasiado.

Bibliografía

[1] Alonso M. y Finn E., Física, Pearson Educación, México, 2000.
[2] Resnick R. y Halliday D., Física: Parte 1, Continental, México, 1986.
[3] Información brindada por el Dr. A. Introcaso, Grupo de Geofísica del Instituto de Física Rosario (IFIR)